Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(8), 100-110
Published Online August 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.168184

Hans汉斯

具有倒数可积位势的临界非线性Choquard方程基态解的存在性

钟志民，郭　挺*

江西理工大学数理学院，江西　赣州

收稿日期：2026年7月20日；录用日期：2026年8月18日；发布日期：2026年8月25日

摘　要

本文致力于研究Choquard方程

$$-\Delta u+V(x)u=\left(I_\alpha*\left(|u|^{\bar{p}}+G(u)\right)\right)\left(|u|^{\bar{p}-2}u+\frac{1}{\bar{p}}g(u)\right),\ x\in\mathbb{R}^N,$$

其中 $N\geq 3$，$\alpha\in(0,N)$，$G(u)=\int_0^u g(s)\mathrm{d}s$，$\bar{p}=\frac{N+\alpha}{N-2}$ 为Hardy-Littlewood-Sobolev上临界指数，I_α 是Riesz势。当正位势 V 的倒数可积且扰动项 g 满足适当条件时，我们利用变分方法证明上述问题存在Nehari型基态解。

关键词

Choquard方程，Hardy-Littlewood-Sobolev上临界指数，倒数可积位势，Nehari型基态解

Existence of Ground State Solutions for Critical Nonlinear Choquard Equations with Reciprocally Integrable Potentials

Zhimin Zhong, Ting Guo*

School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou Jiangxi

Received: July 20, 2026; accepted: August 18, 2026; published: August 25, 2026

*通讯作者。

文章引用: 钟志民, 郭挺. 具有倒数可积位势的临界非线性 Choquard 方程基态解的存在性[J]. 理论数学, 2026, 16(8): 100-110. DOI: 10.12677/pm.2026.168184

Abstract

This paper is devoted to the study of the Choquard equation

$$-\Delta u+V(x)u=\left(I_\alpha*\left(|u|^{\bar{p}}+G(u)\right)\right)\left(|u|^{\bar{p}-2}u+\frac{1}{\bar{p}}g(u)\right),\ x\in\mathbb{R}^N,$$

where $N\geq 3$, $\alpha\in(0,N)$, $G(u)=\int_0^u g(s)\mathrm{d}s$, $\bar{p}=\frac{N+\alpha}{N-2}$ is the upper critical Hardy-Littlewood-Sobolev exponent, and I_α is the Riesz potential. When the positive potential V is reciprocally integrable and the perturbed term g satisfies suitable conditions, we prove the existence of Nehari-type ground state solutions to the above problem by variational methods.

Keywords

Choquard Equations, Upper Critical Hardy-Littlewood-Sobolev Exponent, Reciprocally Integrable Potential, Nehari-Type Ground State Solutions

1. 引言

本文研究 Choquard 方程

$$-\Delta u+V(x)u=\left(I_\alpha*\left(|u|^{\bar{p}}+G(u)\right)\right)\left(|u|^{\bar{p}-2}u+\frac{1}{\bar{p}}g(u)\right),\quad x\in\mathbb{R}^N,\tag{1.1}$$

其中 $N\geq 3$，$\alpha\in(0,N)$，$G(u)=\int_0^u g(s)\mathrm{d}s$，$\bar{p}=\frac{N+\alpha}{N-2}$ 为 Hardy-Littlewood-Sobolev 上临界指数并且 I_α 是由下式定义的 Riesz 势：

$$I_\alpha(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\pi^{\frac{N}{2}}2^\alpha|x|^{N-\alpha}},\quad x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}.$$

同时，V 和 g 满足以下条件：

- (V_1)：$V\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ 且 $\inf_{x\in\mathbb{R}^N}V(x)>0$；
- (V_2)：$\frac{1}{V}\in L^1(\mathbb{R}^N)$；
- (G_1)：$g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，且存在 $\lambda>1$ 使得 $g(s)s\geq\lambda G(s)\geq 0$，$\forall s\in\mathbb{R}$；
- (G_2)：$\lim_{s\to 0}\frac{g(s)}{|s|^{\alpha/N}}=\lim_{|s|\to\infty}\frac{g(s)}{|s|^{(2+\alpha)/(N-2)}}=0$；
- (G_3)：存在 $C_0>0$，使得对任意 $s\geq 0$，都有 $G(s)\geq C_0 s^q$，其中

$$\begin{cases} 1+\alpha<q<3+\alpha, & N=3, \\ \dfrac{N+\alpha}{N}<q<\dfrac{N+\alpha}{N-2}, & N\ge 4; \end{cases}$$

- (G_4)： g 是单调不减的。

方程(1.1)的一般形式为

$$-\Delta u+V(x)u=\left(I_\alpha*F(u)\right)f(u),\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

近些年来，方程(1.2)得到众多学者的广泛关注(参见文献[1]-[15])。方程(1.2)的物理原型为 Choquard-Pekar 方程

$$-\Delta u+u=\left(I_2*|u|^2\right)u,\quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{1.3}$$

Pekar 在文献[16]中率先研究了方程(1.3)，将其用来刻画静止极化子的量子理论。此后，Choquard (参见文献[17])借助该方程描述被自身空穴束缚的电子。Penrose 在文献[18]中把该方程运用于自引力物质的研究框架，从量子态引力坍缩的角度重新阐释该模型，在此背景下方程(1.2)也被称为薛定谔－牛顿方程。在 Lieb [17]和 Lions [19]的开创性工作中，他们通过变分法证明了非平凡解的存在性。对于自治情形 $V(x)\equiv 1$，Moroz 和 Van Schaftingen 在文献[12]中证明：在非线性项 f 满足一般的“Berestycki-Lions 假设”时，方程(1.2)存在基态解。通常，$(N+\alpha)/(N-2)$ (或 $(N+\alpha)/N$)被称为 Hardy-Littlewood-Sobolev 上(或下)临界指数(参见文献[20])。针对上临界情形，Li 和 Ma 在文献[9]中研究了带非局部项的 Brezis-Nirenberg 型问题

$$-\Delta u+u=\left(I_\alpha*|u|^{\frac{N+\alpha}{N-2}}\right)|u|^{\frac{N+\alpha}{N-2}-2}u+\lambda|u|^{q-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{1.4}$$

在 $\lambda>0$，并且满足

$$\begin{cases} 4<q<6, & N=3, \\ 2<q<2^*:=\dfrac{2N}{N-2}, & N\ge 4, \end{cases}$$

的假设条件下，他们证明(1.4)存在非平凡解。在文献[21]中，Alves-Gao-Squassina-Yang 进一步研究了一类上临界问题

$$-\Delta u+V(\varepsilon x)u=\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|u(y)|^{6-\mu}+G(u(y))}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}y\right)\left(|u|^{4-\mu}u+\frac{1}{6-\mu}g(u)\right),\quad x\in\mathbb{R}^3,$$

并且证明：当下列条件全部成立时，该方程存在基态解。

- (V)： $V\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 是有界函数且 $0<\kappa_{\min}:=\min_{x\in\mathbb{R}^3}V(x)<\kappa_\infty=\liminf_{|x|\to\infty}V(x)<\infty$；
- (g_1)：存在 $(6-\mu)/3<q\le p<6-\mu$， $5-\mu<\zeta<6-\mu$ 以及 $c_0,c_1>0$ 使得对所有 $s\in\mathbb{R}$，有 $|g(s)|\le c_0\left(|s|^{q-1}+|s|^{p-1}\right)$ 和 $G(s)\ge c_1|s|^\zeta$；
- (g_2)：存在 $\lambda>2$，对任意 $s\in\mathbb{R}^+$ 有 $0<\lambda G(s)\le 2g(s)s$；
- (g_3)： $g(s)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上严格递增。

近期，Guo 和 Gui [2]研究了如下带 Hardy 位势和临界指数的 Choquard 型问题

$$-\Delta u+\left(V(x)-\frac{\theta}{|x|^2}\right)u=\left(I_\alpha*\left(|u|^{\bar{p}}+G(u)\right)\right)\left(|u|^{\bar{p}-2}u+\frac{1}{\bar{p}}g(u)\right),\quad x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}, \tag{1.5}$$

其中 $0<\theta<(N-2)^2/4$， $G(u)=\int_0^u g(s)\mathrm{d}s$， V 和 g 满足

- (V_1')：$V\in C^1\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$，并且存在一个正数 $\lambda<\frac{\alpha+2}{2}\left(\frac{(N-2)^2}{4}-\theta\right)$ 使得

$$\left(\nabla V(x),x\right)\le\frac{2\lambda}{|x|^2},x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\text{ 且 }\lim_{|x|\to\infty}\left(\nabla V(x),x\right)=0；$$

- (V_2')：$V_\infty:=\lim_{|x|\to\infty}V(x)=V_\infty\ge V(x)\ge V_0>0,x\in\mathbb{R}^N$；
- (G_1')：$g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}),g(s)s\ge0,s\in\mathbb{R}$；
- (G_2')：$\lim_{s\to0}\frac{g(s)}{|s|^{\alpha/N}}=\lim_{|s|\to\infty}\frac{g(s)}{|s|^{(\alpha+2)/(N-2)}}=0$；
- (G_3')：存在常数 $C_0>0$，使得对所有 $s\ge0$，有 $G(s)\ge C_0s^q$，其中

$$\max\left\{\frac{N+\alpha}{N},\overline{p}-2+\frac{4\beta}{N-2}\right\}<q<\overline{p}\text{ 且 }\beta=\frac{N-2-\sqrt{(N-2)^2-4\theta}}{2}。$$

他们证明(1.5)存在非平凡解。

目前针对带有倒数可积位势的 Choquard 型方程的研究尚且较少。受文献[2] [4]的启发，本文针对 Hardy-Littlewood-Sobolev 上临界指数情形，考察含有倒数可积位势与上临界指数的一般非线性 Choquard 方程，得到方程(1.1)基态解的存在性结果。

首先，我们定义工作空间

$$\mathcal{H}=\left\{u\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right):\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^2\,\mathrm{d}x<\infty\right\}.$$

若位势 $V(x)$ 满足(V_1)和(V_2)条件，则 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间，其内积定义为

$$(u,v)_{\mathcal{H}}=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla u\nabla v+V(x)uv\right)\mathrm{d}x.$$

本文记号约定如下：

- $\|u\|_{\mathcal{H}}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$；
- $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)(1\le p<\infty)$ 表示 Lebesgue 空间，其范数为 $|u|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$；
- $B_\rho(0)$ 表示以原点为中心、半径为 $\rho>0$ 的开球；
- $C,C_0,C_1,C_2,\cdots$ 用来表示不同正的常数；
- 若 $\varepsilon\to0$，有 $C_1\varepsilon\le A(\varepsilon)\le C_2\varepsilon$，则记 $A(\varepsilon)$ 为 $O_+(\varepsilon)$。

显然，方程(1.1)在 $\mathcal{H}$ 上对应的能量泛函为

$$J(u)=\frac{1}{2}|\nabla u|_2^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2\overline{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha*F(u)\right)F(u)\mathrm{d}x.$$

其中 $F(u)=\overline{p}\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$，$f(u)=|u|^{\overline{p}-2}u+\frac{1}{\overline{p}}g(u)$。

设 $\mathcal{N}:=\left\{u\in\mathcal{H}\setminus\{0\}:\left\langle J'(u),u\right\rangle=0\right\}$ 为 J 的 Nehari 流形，若存在 $\overline{u}\in\mathcal{N}$ 满足 $J'(\overline{u})=0$ 且 $J(\overline{u})=\inf_{\mathcal{N}}J$，则称 $\overline{u}$ 为方程(1.1)的 Nehari 型基态解。

我们用 S_α 表示 Sobolev 嵌入最佳常数

$$S_\alpha:=\inf\left\{|\nabla u|_2^2:u\in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right),\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha*|u|^p\right)|u|^p\,\mathrm{d}x=1\right\}.$$

根据文献[20]，S_α 的极值函数为

$$U_\varepsilon(x)=C\frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{\left(\varepsilon^2+|x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}},$$

其中 $C>0$ 为固定的常数，$\varepsilon>0$ 为任意参数。

本文的主要结果如下：

定理 1.1 设 $N\ge 3$，$\alpha\in(0,N)$，且 V 和 g 分别满足(V_1)~(V_2)和(G_1)~(G_4)，则问题(1.1)存在 Nehari 型基态解。

本文结构如下：第 2 节给出若干预备结果，第 3 节致力于定理 1.1 的证明。

2. 预备引理

本节给出后续证明所需的预备引理。参照文献[22]中引理 2.4 的论证方法，可以得到下面的嵌入结果。

引理 2.1. 假设 V 满足(V_1)~(V_2)，则

(i) 对任意 $q\in\left[1,2^*\right]$，$\mathcal{H}$ 连续嵌入于 $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$。

(ii) 对于任意 $q\in\left[1,2^*\right)$，$\mathcal{H}$ 紧嵌入于 $L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$。

下面是经典的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式。

引理 2.2. ([20]) 设 $\alpha\in(0,N)$，$p,r>1$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1+\frac{\alpha}{N}$。若 $f\in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$，$g\in L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$，则存在常数 $S(N,\alpha,p,r)>0$ 使得

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * f\right)g\mathrm{d}x\right|\le S(N,\alpha,p,r)|f|_p|g|_r. \tag{2.1}$$

下述非局部形式的 Brezis-Lieb 引理是紧性分析的重要工具，其证明参见文献[1]引理 2.2。

引理 2.3. 设(G_1)和(G_2)条件成立且 $u_n\rightharpoonup\bar{u}$ 于 $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$，则

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u_n)\right)F(u_n)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u_n-\bar{u})\right)F(u_n-\bar{u})\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(\bar{u})\right)F(\bar{u})\mathrm{d}x+o(1).$$

3. 变分结构和主要结果的证明

我们先利用条件(G_1)和(G_2)给出非线性项 $g(s)$ 的增长控制。由假设易知，存在常数 $C>0$ 使得

$$|g(s)|\le C\left(|s|^{\frac{\alpha}{N}}+|s|^{\bar{p}-1}\right). \tag{3.1}$$

进一步，对任意 $\varepsilon>0$ 以及 $p\in\left(\frac{N+\alpha}{N},\bar{p}\right)$，存在常数 $C_\varepsilon>0$，满足

$$|g(s)|\le\varepsilon\left(|s|^{\frac{\alpha}{N}}+|s|^{\bar{p}-1}\right)+C_\varepsilon|s|^{p-1},\quad\forall s\in\mathbb{R}. \tag{3.2}$$

接下来，我们验证能量泛函 J 具有山路几何结构。

引理 3.1. 设定理 1.1 的条件成立，则 $J:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ 满足

(i) 存在 $\rho>0$，使得 $\inf\limits_{\|u\|_{\mathcal{H}}=\rho}J(u)>0$；

(ii) 存在 $e\in\mathcal{H}$ 且 $\|e\|_{\mathcal{H}}>\rho$ 使得 $J(e)<0$。

证明：(i) 由 S_α 的定义，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * |u|^{\bar{p}}\right)|u|^{\bar{p}}\,\mathrm{d}x\le S_\alpha^{-\bar{p}}\|u\|_{\mathcal{H}}^{2\bar{p}}.$$

由引理 2.1(i)、引理 2.2 和(3.1)，得

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{H}}^{2}-\frac{1}{2\overline{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u)\right)F(u)\mathrm{d}x\geq\frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{H}}^{2}-C_1\left(\|u\|_{\mathcal{H}}^{2\overline{p}}+\|u\|_{\mathcal{H}}^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}\right).$$

注意到 $2\overline{p}>2$，$\frac{2N+2\alpha}{N}>2$，所以存在 $\rho>0$，使得 $\inf_{\|u\|_{\mathcal{H}}=\rho}J(u)>0$。

(ii) 对任意 $u\in\mathcal{H}\setminus\{0\}$，因 $\overline{p}>1$，当 $t\to+\infty$ 时，有

$$J(tu)\leq\frac{t^2}{2}\|u\|_{\mathcal{H}}^{2}-\frac{t^{2\overline{p}}}{2\overline{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * |u|^{\overline{p}}\right)|u|^{\overline{p}}\mathrm{d}x\to-\infty.$$

故存在 $t_0>0$ 满足 $\|t_0u\|_{\mathcal{H}}>\rho$ 且 $J(t_0u)<0$，取 $e=t_0u$。结论得证。 □

根据引理 3.1 和极小极大原理[23]，存在 $\{u_n\}\subset\mathcal{H}$，使得

$$J(u_n)\to m \text{ 且 } J'(u_n)\to 0, \tag{3.3}$$

其中 $m=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(\gamma(t))$ 以及

$$\Gamma=\left\{\gamma\in C([0,1],\mathcal{H}):\gamma(0)=0,\|\gamma(1)\|_{\mathcal{H}}>\rho \text{ 且 } J(\gamma(1))<0\right\}. \tag{3.4}$$

显然 $m>0$。

引理 3.2. 设定理 1.1 的条件成立，则

$$J(u)\geq J(tu)+\frac{1-t^2}{2}\langle J'(u),u\rangle,\quad \forall u\in\mathcal{H},\ t\geq 0.$$

特别地，若 $u\in\mathcal{N}$，则 $J(u)=\max_{t\geq 0}J(tu)$。

证明：类似于[4]引理 3.3 的证明，根据(G_4)，对任意 $s,t\in\mathbb{R}$ 有

$$0\leq F(t)\leq F(s), \tag{3.5}$$

且

$$\overline{p}f(s)t\leq\overline{p}f(s)s+F(t)-F(s). \tag{3.6}$$

注意到

$$\begin{aligned}&J(u)-J(tu)-\frac{1-t^2}{2}\langle J'(u),u\rangle\\&=\frac{1}{2\overline{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(tu)\right)F(tu)-\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u)\right)F(u)+\overline{p}\left(1-t^2\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u)\right)f(u)u\right),\end{aligned}$$

记 $v=tu$，结合(3.5)和(3.6)，则

$$\begin{aligned}&2\overline{p}\left(J(u)-J(tu)-\frac{1-t^2}{2}\langle J'(u),u\rangle\right)\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(v)\right)F(v)-\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u)\right)F(u)+\left(1-t^2\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u)\right)\overline{p}f(u)u\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u)\right)\left[\left(1+t^2\right)\overline{p}f(u)u-2t^2\overline{p}f(u)v-F(u)\right]+\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(v)\right)F(v)\\&\geq\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u)\right)\left[\left(t^2-1\right)\overline{p}f(u)u+(2t-1)F(u)-2tF(v)\right]+\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(v)\right)F(v)\\&\geq\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(v)\right)F(v)+t^2\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u)\right)F(u)-2t\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u)\right)F(v)\\&\geq\left(\sqrt{\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(v)\right)F(v)}-t\sqrt{\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u)\right)F(u)}\right)^2\geq 0.\end{aligned}$$

取 $u\in\mathcal{N}$，则 $J(u)=\max_{t\ge 0}J(tu)$。因此，结论得证。 □

引理 3.3. 设定理 1.1 的条件成立，则 $m<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\overline{p}}\right)S_\alpha^{\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}}$。

证明： 对任意 $\varepsilon>0$，设 $u_\varepsilon(x)=\psi(x)U_\varepsilon(x)$， $\forall x\in\mathbb{R}^N$，其中 $\psi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N,[0,1]\right)$ 为截断函数满足：存在 $\rho>0$，在 $B_\rho(0)$ 上 $\psi\equiv 1$，在 $\mathbb{R}^N\setminus B_{2\rho}(0)$ 上 $\psi\equiv 0$。对任意 $\varepsilon>0$，我们有以下估计(参见[2])：

$$|\nabla u_\varepsilon|_2^2=S_\alpha+O_+\left(\varepsilon^{N-2}\right); \tag{3.7}$$

$$1>\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha*|u_\varepsilon|^{\overline{p}}\right)|u_\varepsilon|^{\overline{p}}\,\mathrm{d}x\ge 1-O_+\left(\varepsilon^N\right); \tag{3.8}$$

$$|u_\varepsilon|_2^2=\begin{cases}O_+(\varepsilon), & N=3,\\ O_+\left(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|\right), & N=4,\\ O_+\left(\varepsilon^2\right), & N\ge 5;\end{cases} \tag{3.9}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha*|u_\varepsilon|^{\overline{p}}\right)|u_\varepsilon|^q\,\mathrm{d}x\sim\begin{cases}\varepsilon^{\frac{N+\alpha}{2}-\frac{N-2}{2}q}|\ln\varepsilon|, & \text{if } \alpha=(N-2)q,\\ \varepsilon^{\frac{N-\alpha}{2}+\frac{N-2}{2}q}, & \text{if } \alpha>(N-2)q,\\ \varepsilon^{\frac{N+\alpha}{2}-\frac{N-2}{2}q}, & \text{if } \alpha<(N-2)q,\end{cases} \tag{3.10}$$

其中 $\frac{N+\alpha}{N}<q<\overline{p}=\frac{N+\alpha}{N-2}$。根据 G_3 和(3.10)可得

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha*|u_\varepsilon|^{\overline{p}}\right)|u_\varepsilon|^q\,\mathrm{d}x\sim\varepsilon^{\frac{N+\alpha}{2}-\frac{N-2}{2}q}. \tag{3.11}$$

由 $\lim_{t\to 0}J(tu_\varepsilon)=0$ 及 $\lim_{t\to+\infty}J(tu_\varepsilon)=-\infty$ 知，存在 $t_\varepsilon>0$ 使得 $J(t_\varepsilon u_\varepsilon)=\max_{t>0}J(tu_\varepsilon)$。接下来我们证明 t_ε 有界，假若不然，不妨设 $t_\varepsilon\to+\infty$ $(\varepsilon\to 0)$。由(3.7)~(3.9)，得

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2&=|\nabla u_\varepsilon|_2^2+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x=|\nabla u_\varepsilon|_2^2+\int_{B_{2\rho}(0)}V(x)|u_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x\\&\le|\nabla u_\varepsilon|_2^2+\max_{|x|\le 2\rho}V(x)|u_\varepsilon|_2^2=S_\alpha+o(1)\end{aligned} \tag{3.12}$$

及

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha*|u_\varepsilon|^{\overline{p}}\right)|u_\varepsilon|^{\overline{p}}\,\mathrm{d}x=1+o(1).$$

因此

$$\begin{aligned}J(t_\varepsilon u_\varepsilon)&=\frac{t_\varepsilon^2}{2}\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2-\frac{1}{2\overline{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha*F(t_\varepsilon u_\varepsilon)\right)F(t_\varepsilon u_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\\&\le\frac{t_\varepsilon^2}{2}\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2-\frac{t_\varepsilon^{2\overline{p}}}{2\overline{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha*|u_\varepsilon|^{\overline{p}}\right)|u_\varepsilon|^{\overline{p}}\,\mathrm{d}x\to-\infty,\end{aligned} \tag{3.13}$$

这与 $J(t_\varepsilon u_\varepsilon)\ge m>0$ 矛盾，所以 t_ε 有界。类似地，$\liminf_{\varepsilon\to 0}t_\varepsilon>0$，假若不然，由(3.12)与(3.13)，得 $\liminf_{\varepsilon\to 0}J(t_\varepsilon u_\varepsilon)\le 0$，这也与 $J(t_\varepsilon u_\varepsilon)\ge m>0$ 矛盾。根据(G_3)与(3.11)，对充分小的 $\varepsilon>0$，有

$$
\begin{aligned}
J\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right) &= \frac{t_\varepsilon^2}{2}\left|\nabla u_\varepsilon\right|_2^2 + \frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_\varepsilon^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2\bar{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right)\right) F\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right)\mathrm{d}x \\
&\le \sup_{t>0}\left(\frac{\left|\nabla u_\varepsilon\right|_2^2}{2} t^2 - \frac{t^{2\bar{p}}}{2\bar{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * \left|u_\varepsilon\right|^{\bar{p}}\right)\left|u_\varepsilon\right|^{\bar{p}}\mathrm{d}x\right) \\
&\quad -\frac{t_\varepsilon^{\bar{p}}}{\bar{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * \left|u_\varepsilon\right|^{\bar{p}}\right) G\left(t_\varepsilon u_\varepsilon\right)\mathrm{d}x + \frac{t_\varepsilon^2}{2}\max_{|x|\le 2\rho} V(x)\left|u_\varepsilon\right|_2^2 \\
&\le \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\bar{p}}\right) S_\alpha^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}} + O_+\left(\varepsilon^{N-2}\right) - O_+\left(\varepsilon^{\frac{N+\alpha}{2}-\frac{N-2}{2}q}\right) + \begin{cases} K_1\varepsilon, & N=3 \\ K_2\varepsilon^2\left|\ln\varepsilon\right|, & N=4 \\ K_3\varepsilon^2, & N\ge 5 \end{cases} \\
&< \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\bar{p}}\right) S_\alpha^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}}.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$
m < \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\bar{p}}\right) S_\alpha^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}}. \tag{3.14}
$$

因此，引理得证。 □

定理 1.1 的证明： 由(3.3)，我们可以获得一个 PS 序列 $\{u_n\}\subset\mathcal{H}$，满足 $J(u_n)\to m$ 且 $J'(u_n)\to 0$。取 $1<\theta\le\min\{\lambda,\bar{p}\}$，根据($G_1$)，得

$$
\begin{aligned}
m+1+\|u_n\|_{\mathcal{H}} &\ge J(u_n) - \frac{1}{2\theta}\left\langle J'(u_n), u_n\right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\theta}\right)\|u_n\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{1}{2\bar{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * \left(\left|u_n\right|^{\bar{p}} + G(u_n)\right)\right)\left(\left(1-\frac{\bar{p}}{\theta}\right)\left|u_n\right|^{\bar{p}} + G(u_n) - \frac{1}{\theta} g(u_n) u_n\right)\mathrm{d}x \\
&\ge \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\theta}\right)\|u_n\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}
$$

注意到 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\theta}>0$，故 $\{u_n\}$ 有界。结合引理 2.1(ii)，有

$$
\begin{cases}
u_n \rightharpoonup \bar{u} \text{ in } \mathcal{H}; \\
u_n \to \bar{u} \text{ a.e. on } \mathbb{R}^N; \\
u_n \to \bar{u} \text{ in } L^s\left(\mathbb{R}^N\right)\left(1\le s<2^*\right).
\end{cases}
$$

所以 $J'(\bar{u})=0$。接下来，我们证明 $\bar{u}\ne 0$。假若 $\bar{u}=0$，则 $u_n\to 0 \text{ in } L^s\left(\mathbb{R}^N\right)\left(1\le s<2^*\right)$。根据(3.2)和引理 2.2 可得

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * \left|u_n\right|^{\bar{p}}\right) g(u_n) u_n \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * \left|u_n\right|^{\bar{p}}\right) G(u_n)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * G(u_n)\right) g(u_n) u_n \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * G(u_n)\right) G(u_n)\mathrm{d}x = o(1)
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

利用 $\left\langle J'(u_n), u_n\right\rangle = o(1)$ 和(3.15)，得到

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u_n\right|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n^2\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u_n)\right) f(u_n) u_n\mathrm{d}x + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * \left|u_n\right|^{\bar{p}}\right)\left|u_n\right|^{\bar{p}}\mathrm{d}x + o(1).
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

由(V_1)知$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n^2 \mathrm{d}x \ge 0$，所以(3.16)蕴含

$$|\nabla u_n|_2^2 \le \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * |u_n|^{\bar{p}}\right)|u_n|^{\bar{p}}\,\mathrm{d}x + o(1). \tag{3.17}$$

根据S_α的定义，我们可以得到

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * |u_n|^{\bar{p}}\right)|u_n|^{\bar{p}}\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{\bar{p}}} \le S_\alpha^{-1}|\nabla u_n|_2^2.$$

令$\sigma_n = \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * |u_n|^{\bar{p}}\right)|u_n|^{\bar{p}}\,\mathrm{d}x$，$\tau_n = |\nabla u_n|_2^2$，结合(3.17)可得，$\sigma_n^{\frac{1}{\bar{p}}} \le S_\alpha^{-1}\tau_n \le S_\alpha^{-1}\sigma_n + o(1)$。因为$\{\sigma_n\}$和$\{\tau_n\}$为有界数列，所以存在收敛子列使得$\sigma_n \to \sigma$，$\tau_n \to \tau$，且$\sigma^{\frac{1}{\bar{p}}} \le S_\alpha^{-1}\sigma$。若$\sigma = 0$，则$\tau = 0$。由(3.15)和(3.16)知

$$\begin{aligned} m + o(1) &= J(u_n) \\ &= \frac{1}{2}|\nabla u_n|_2^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2\bar{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u_n)\right)F(u_n)\mathrm{d}x \\ &= o(1). \end{aligned}$$

这与$m > 0$矛盾，故$\sigma > 0$，进而$\sigma \ge S_\alpha^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}}$且$\tau \ge S_\alpha \sigma^{\frac{1}{\bar{p}}} \ge S_\alpha^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}}$。结合(3.16)式有

$$m + o(1) = J(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\bar{p}}\right)\sigma_n + o(1) \ge \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\bar{p}}\right)S_\alpha^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}} + o(1).$$

即$m \ge \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\bar{p}}\right)S_\alpha^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}}$，这与(3.14)式矛盾，因此$\bar{u} \ne 0$。记$v_n = u_n - \bar{u}$，则在$\mathcal{H}$中$v_n \rightharpoonup 0$，由引理2.3，有

$$J(v_n) = J(u_n) - J(\bar{u}) + o(1) = m - J(\bar{u}) + o(1). \tag{3.18}$$

由引理2.1(ii)，在$L^s(\mathbb{R}^N)(1 \le s < 2^*)$中$v_n \to 0$，类似于[2]引理3.4的证明，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u_n)\right)\left(|u_n|^{\bar{p}-2}u_n v_n + \frac{1}{\bar{p}}g(u_n)v_n\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * |v_n|^{\bar{p}}\right)|v_n|^{\bar{p}}\,\mathrm{d}x + o(1) \tag{3.19}$$

及

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(v_n)\right)F(v_n)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * |v_n|^{\bar{p}}\right)|v_n|^{\bar{p}}\,\mathrm{d}x + o(1). \tag{3.20}$$

注意到$J'(u_n) \to 0$，结合(3.19)得

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle J'(u_n), v_n\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n \nabla v_n \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n v_n - \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * F(u_n)\right)\left(|u_n|^{\bar{p}-2}u_n v_n + \frac{1}{\bar{p}}g(u_n)v_n\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)v_n^2\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * |v_n|^{\bar{p}}\right)|v_n|^{\bar{p}}\,\mathrm{d}x + o(1). \end{aligned} \tag{3.21}$$

令$\sigma_n = \int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha * |v_n|^{\bar{p}}\right)|v_n|^{\bar{p}}\,\mathrm{d}x$，$\tau_n = |\nabla v_n|_2^2$。设$\sigma_n \to \sigma$，$\tau_n \to \tau$，由(3.21)式和$S_\alpha$定义有$\tau_n \le \sigma_n + o(1)$及$\sigma_n^{\frac{1}{\bar{p}}} \le S_\alpha^{-1}\tau_n \le S_\alpha^{-1}\sigma_n + o(1)$。因此$\sigma^{\frac{1}{\bar{p}}} \le S_\alpha^{-1}\sigma$。下证$\sigma = 0$，假若$\sigma \ne 0$，则有$\sigma \ge S_\alpha^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}}$且$\sigma \ge \tau \ge S_\alpha \sigma^{\frac{1}{\bar{p}}} \ge S_\alpha^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}}$。由(3.18)、(3.20)与(3.21)得

$$
\begin{aligned}
m-J(\bar{u})+o(1)=J(v_n)&\\
&=\frac{1}{2}|\nabla v_n|_2^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)v_n^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2\bar{p}}\int\left(I_\alpha*F(v_n)\right)F(v_n)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}|\nabla v_n|_2^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)v_n^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2\bar{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha*|v_n|^{\bar{p}}\right)|v_n|^{\bar{p}}\,\mathrm{d}x+o(1)\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\bar{p}}\right)\sigma+o(1)\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\bar{p}}\right)S_\alpha^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}}+o(1).
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

取$1<\theta\leq\min\{\lambda,\bar{p}\}$，根据$(G_1)$，得

$$
\begin{aligned}
J(\bar{u})&=J(\bar{u})-\frac{1}{2\theta}\langle J'(\bar{u}),\bar{u}\rangle\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\theta}\right)\|\bar{u}\|_{\mathcal{H}}^2-\frac{1}{2\bar{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha*\left(|\bar{u}|^{\bar{p}}+G(\bar{u})\right)\right)\left(\left(1-\frac{\bar{p}}{\theta}\right)|\bar{u}|^{\bar{p}}+G(\bar{u})-\frac{1}{\theta}g(\bar{u})\bar{u}\right)\mathrm{d}x\\
&\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\theta}\right)\|\bar{u}\|_{\mathcal{H}}^2>0.
\end{aligned}
$$

结合(3.22)，得到$m>\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\bar{p}}\right)S_\alpha^{\frac{\bar{p}}{\bar{p}-1}}$。这与(3.14)式矛盾，因此$\sigma=0$且$\tau=0$。结合(3.21)，得到$\int_{\mathbb{R}^N}V(x)v_n^2\mathrm{d}x=o(1)$。由此推知在$\mathcal{H}$中$v_n\to0$且$J(\bar{u})=m$。再注意到$\bar{u}\in\mathcal{N}$，所以

$$
m=J(\bar{u})\geq\inf_{v\in\mathcal{N}}J(v).
$$

结合(3.4)和引理3.2有

$$
J(\bar{u})=m=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(\gamma(t))\leq\inf_{v\in\mathcal{N}}\max_{t>0}J(tv)=\inf_{v\in\mathcal{N}}J(v),
$$

则$J(\bar{u})=m=\inf_{v\in\mathcal{N}}J(v)$。所以，$\bar{u}$是方程(1.1)的基态解。 □

基金项目

国家自然科学基金项目(No. 12101273)。

参考文献

[1] Cassani, D. and Zhang, J. (2018) Choquard-Type Equations with Hardy-Littlewood-Sobolev Upper-Critical Growth. *Advances in Nonlinear Analysis*, **8**, 1184-1212. https://doi.org/10.1515/anona-2018-0019

[2] Guo, T., Gui, S. and Tang, X. (2025) Nontrivial Solutions for a Choquard Equation Involving the Hardy Potential and Critical Nonlinearity. *The Journal of Geometric Analysis*, **35**, Article No. 219. https://doi.org/10.1007/s12220-025-02055-8

[3] Guo, T., Tang, X. and Gui, S. (2024) Ground State Solutions of Nehari-Pankov Type for a Indefinite Choquard Equation with the Hardy Potential and Critical Nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **540**, Article ID: 128639. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128639

[4] Guo, T., Xia, T. and Tang, X. (2026) Existence of Solutions for Choquard Equations with an L^1-Integrable Reciprocal Potential and Upper Critical Growth. *Boundary Value Problems*, **2026**, Article No. 74. https://doi.org/10.1186/s13661-026-02262-4

[5] Ji, C. and Rădulescu, V.D. (2022) Multi-Bump Solutions for the Nonlinear Magnetic Choquard Equation with Deepening Potential Well. *Journal of Differential Equations*, **306**, 251-279. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.10.030

[6] Jin, P., Yang, H. and Zhou, X. (2025) Normalized Solutions for Schrödinger Equations with Critical Sobolev Exponent and Perturbations of Choquard Terms. *Bulletin of Mathematical Sciences*, **15**, Article ID: 2550005. https://doi.org/10.1142/s1664360725500055

[7] Lai, L., Qin, D., Hu, D. and Zhang, J. (2025) Existence of Ground State Solution for Critical *N*-Laplacian Kirchhoff-Type Problem with Convolution Nonlinearity. *Bulletin of Mathematical Sciences*, **15**, Article ID: 2550013. https://doi.org/10.1142/s1664360725500134

[8] Lai, L., Qin, D., Wu, Q. and Xiang, Z. (2026) Ground State Solutions for Choquard Equation with Indefinite Potential and Critical Exponential Growth. *Asymptotic Analysis*, **147**, 476-497. https://doi.org/10.1177/09217134251335461

[9] Li, X. and Ma, S. (2020) Choquard Equations with Critical Nonlinearities. *Communications in Contemporary Mathematics*, **22**, Article ID: 1950023. https://doi.org/10.1142/s0219199719500238

[10] Liang, S., Ma, J., Shi, S. and Song, Y. (2025) Multiple Normalized Solutions for Choquard Equation Involving the Biharmonic Operator and Competing Potentials in $\mathbb{R}^N$. *Bulletin of Mathematical Sciences*, **15**, Article ID: 2450017. https://doi.org/10.1142/s1664360724500176

[11] Liu, S. and Chen, H. (2022) Ground State Solutions for Nonlinear Choquard Equation with Singular Potential and Critical Exponents. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **507**, Article ID: 125799. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125799

[12] Moroz, V. and Van Schaftingen, J. (2015) Existence of Groundstates for a Class of Nonlinear Choquard Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **367**, 6557-6579. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2014-06289-2

[13] Song, Y., Sun, X. and Repovš, D.D. (2026) Concentrating Solutions of the Fractional (*p*,*q*)-Choquard Equation with Exponential Growth. *Analysis and Applications*, **24**, 665-704. https://doi.org/10.1142/s0219530525500290

[14] Tripathi, V.M. (2025) Multiplicity Result for Mixed Local and Nonlocal Kirchhoff Problems Involving Critical Growth. *Opuscula Mathematica*, **45**, 523-542. https://doi.org/10.7494/opmath.2025.45.4.523

[15] Xia, J. and Zhang, X. (2024) Multibump Solutions for Critical Choquard Equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **56**, 3832-3860. https://doi.org/10.1137/23m1581820

[16] Pekar, S.I. (1954) Untersuchungen über die Elektronentheorie der Kristalle. 1st Edition, Akademie-Verlag GmbH., 24-108.

[17] Lieb, E.H. (1977) Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. *Studies in Applied Mathematics*, **57**, 93-105. https://doi.org/10.1002/sapm197757293

[18] Penrose, R. (1996) On Gravity's Role in Quantum State Reduction. *General Relativity and Gravitation*, **28**, 581-600. https://doi.org/10.1007/bf02105068

[19] Lions, P.L. (1980) The Choquard Equation and Related Questions. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **4**, 1063-1072. https://doi.org/10.1016/0362-546x(80)90016-4

[20] Lieb, E.H. and Loss, M. (2001) Analysis. 2nd Edition, American Mathematical Society, 79-294.

[21] Alves, C.O., Gao, F., Squassina, M. and Yang, M. (2017) Singularly Perturbed Critical Choquard Equations. *Journal of Differential Equations*, **263**, 3943-3988. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.05.009

[22] Yang, Y. (2012) Existence of Positive Solutions to Quasi-Linear Elliptic Equations with Exponential Growth in the Whole Euclidean Space. *Journal of Functional Analysis*, **262**, 1679-1704. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2011.11.018

[23] Willem, M. (1996) Minimax Theorems, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser, 41-42.