Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(8), 152-160
Published Online August 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.168189

Hans汉斯

环同态定理在高等代数中的应用研究

陈丹露

景德镇陶瓷大学信息工程学院，江西 景德镇

收稿日期：2026年7月21日；录用日期：2026年8月19日；发布日期：2026年8月26日

摘　要

环同态定理是抽象代数中连接不同环结构的核心工具，在高等代数中具有广泛而深刻的应用价值。本文系统探讨环同态基本定理在高等代数若干重要领域中的具体应用。首先回顾环同态的定义与基本定理，分析其思想方法；进而给出三个具有代表性的应用案例：线性变换环与矩阵环的同构关系、赋值同态在代数元与超越元刻画中的应用，以及多项式商环在块循环矩阵极小多项式求解中的应用。每个案例均从同态构造出发，详细分析核与像的结构，并导出相应的同构结论。研究表明，环同态定理不仅为高等代数中的经典问题提供了统一的理论框架，而且为矩阵计算与多项式判定等实际问题提供了算法化路径。

关键词

环同态定理，高等代数，线性变换环，赋值同态，块循环矩阵，商环

Applications of Ring Homomorphism Theorems in Advanced Algebra

Danlu Chen

School of Information Engineering, Jingdezhen Ceramic University, Jingdezhen Jiangxi

Received: July 21, 2026; accepted: August 19, 2026; published: August 26, 2026

Abstract

The ring homomorphism theorems are core tools connecting different ring structures in abstract algebra and have extensive and profound application value in advanced algebra. This paper systematically explores the specific applications of the fundamental homomorphism theorem of rings in several important areas of advanced algebra. It first reviews the definition of ring homomorphisms and the fundamental theorem, analyzing its conceptual methodology. Furthermore, three representative application cases are presented: the isomorphism between the ring of linear transformations and the ring of matrices, the application of evaluation homomorphisms in characterizing

文章引用: 陈丹露. 环同态定理在高等代数中的应用研究[J]. 理论数学, 2026, 16(8): 152-160.
DOI: 10.12677/pm.2026.168189

algebraic and transcendental elements, and the application of polynomial quotient rings in solving minimal polynomials of block circulant matrices. Each case starts from the construction of the homomorphism, analyzes the structure of the kernel and image in detail, and derives the corresponding isomorphism conclusions. The research shows that the ring homomorphism theorem not only provides a unified theoretical framework for classical problems in advanced algebra but also offers algorithmic pathways for practical problems such as matrix computation and polynomial determination.

Keywords

Ring Homomorphism Theorem, Advanced Algebra, Ring of Linear Transformations, Evaluation Homomorphism, Block Circulant Matrices, Quotient Ring

1. 引言

在高等代数中，线性空间与线性变换、矩阵理论、多项式理论是贯穿始终的核心内容。线性变换作为保持向量加法和数乘运算的映射，其合成与加法构成环结构；方阵在加法与乘法运算下也构成环结构；多项式在加法与乘法下同样构成环。这些不同的环之间存在着深刻的内在联系，而揭示这种联系的基本工具正是环同态[1] [2]。

环同态是保持环的两种代数运算的结构映射。德国数学家埃米·诺特(Emmy Noether)于 1920 年代系统建立了环同态的基本定理[3]，将环同态的像与商环等同起来，为抽象代数和高等代数的发展奠定了基础。环同态基本定理在高等代数中的意义尤为突出：它将抽象的线性变换运算与具体的矩阵运算联系起来，将多项式环的抽象性质与赋值计算联系起来，为诸多经典问题提供了结构性理解[4]。

本文旨在通过三个具体案例展示环同态定理在高等代数中的应用。第二节回顾环同态的定义与基本定理。第三节讨论线性变换环与矩阵环之间的同构关系。第四节分析赋值同态在代数元与超越元刻画中的应用。第五节探讨多项式商环在块循环矩阵极小多项式求解中的应用。第六节给出结语。

2. 环同态基本定理及思想方法

定义 2.1 设 R 和 S 是两个环，映射 $\varphi: R \to S$ 称为环同态，若对于任意 $a,b \in R$，有

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b),\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b),$$

且 $\varphi(1_R)=1_S$ (若环含单位元)。

环同态的核

$$\ker\varphi=\{r\in R\mid \varphi(r)=0_S\},$$

是 R 的理想。环同态的像

$$\mathrm{Im}\,\varphi=\{s\in S\mid \exists r\in R,\varphi(r)=s\}$$

是 S 的子环。

定理 2.1 (环同态基本定理)设 $\varphi: R \to S$ 是环同态，则存在唯一的环同构

$$R/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi,$$

使得 $\varphi = \bar{\varphi}\circ\pi$，其中 $\pi: R \to R/\ker\varphi$ 为自然投影。

该定理的证明要点是构造映射 $\bar{\varphi}(r+\ker\varphi) = \varphi(r)$，验证其良定义性和同构性。环同态基本定理的核心思想是：任何一个环同态的像都可以表示为原环模去核所得的商环。这一思想在高等代数中的应用模式可概括为：构造同态→计算核与像→导出同构。下文三个案例将完整展示这一模式。

3. 线性变换环与矩阵环的同构

3.1. 问题的提出

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，$\mathrm{End}_F(V)$ 表示 V 上所有线性变换组成的集合，在变换的加法与合成运算下构成一个环。另一方面，$M_n(F)$ 表示所有 n 阶方阵组成的集合，在矩阵的加法与乘法运算下也构成一个环[5]。高等代数中一个基本事实是：选定基后，线性变换与矩阵之间存在一一对应。本节从环同态的角度证明这一对应是环同构。

3.2. 同态的构造

选定 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$。定义映射

$$\Phi: \mathrm{End}_F(V) \to M_n(F),$$

对任意线性变换 $\mathcal{A} \in \mathrm{End}_F(V)$，$\Phi(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 在该基下的表示矩阵，即满足

$$\big(\mathcal{A}(\alpha_1),\mathcal{A}(\alpha_2),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_n)\big) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\Phi(\mathcal{A}).$$

下面验证环同态：对任意 $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathrm{End}_F(V)$，

1. 加法保持：$\Phi(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{A}) + \Phi(\mathcal{B})$；
2. 乘法保持：$\Phi(\mathcal{A}\circ\mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{A})\Phi(\mathcal{B})$；
3. 单位元保持：$\Phi(\mathrm{id}_V) = I_n$。

故 Φ 是环同态。

3.3. 核与像的分析

核的计算：若 $\Phi(\mathcal{A}) = O$ (零矩阵)，则 $\mathcal{A}(\alpha_j) = 0$ 对所有 $j = 1,2,\cdots,n$ 成立。由于 $\{\alpha_j\}$ 张成 V，$\mathcal{A}$ 把每个向量映为零向量，故 $\mathcal{A}$ 为零变换。因此

$$\ker\Phi = \{0\}.$$

像的确定：任意矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$，可唯一定义线性变换 $\mathcal{A}$ 满足

$$\mathcal{A}(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i \ (j = 1,2,\cdots,n),$$

则 $\Phi(\mathcal{A}) = A$。因此 Φ 是满射，$\operatorname{Im}\Phi = M_n(F)$。

3.4. 同构结论

由环同态基本定理，

$$\mathrm{End}_F(V)/\ker\Phi \cong \operatorname{Im}\Phi,$$

代入 $\ker\Phi = \{0\}$ 和 $\operatorname{Im}\Phi = M_n(F)$，得

$$\mathrm{End}_F(V) \cong M_n(F).$$

应用价值：该同构将抽象的线性变换运算全部转化为具体的矩阵运算，具有以下多方面的理论意义和实用价值。

(1) 理论统一性：线性变换的合成对应矩阵乘法，可逆性对应矩阵可逆性，特征值与特征向量在两种表示下完全对应。这一同构表明，矩阵理论并非独立于线性变换理论之外，而是线性变换理论在选定基下的具体坐标表示。因此，高等代数中看似分立的“线性变换”与“矩阵”两个板块，在环同构的意义上本质上是同一数学对象的两种不同表现形式。

(2) 基变换下的变形：更换基时，表示矩阵变为相似矩阵 $P^{-1}AP$。这等价于：环同构 Φ 依赖于基的选择，不同基下的表示矩阵相差一个内自同构。这一观察将“相似矩阵”的概念提升为“同一线性变换在不同坐标下的表示”，为矩阵的相似对角化、Jordan 标准形等理论提供了几何解释。

(3) 计算上的便利：在实际应用中，抽象的线性变换往往难以直接操作，而矩阵的加法和乘法可以通过数值软件高效实现。该同构保证了所有关于矩阵的代数结论都可以直接翻译为关于线性变换的结论，反之亦然，为科学与工程计算中大量涉及的线性系统求解、特征值计算等问题提供了可行的计算框架。

4. 赋值同态与代数元的刻画

4.1. 问题的提出

在域论和代数数论中，复数域中的元素可分为代数元与超越元两类[6]。设 $\alpha\in\mathbb{C}$，α 称为代数元，若存在非零整系数多项式 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 使得 $f(\alpha)=0$；否则称为超越元。本节利用赋值同态的核来精确刻画这一区分，并构造相应的环同构。

4.2. 同态的构造

设 $\alpha\in\mathbb{C}$，定义赋值同态

$$\Phi_\alpha:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{C},f(x)\mapsto f(\alpha),$$

即把多项式 $f(x)$ 中的未知元 x 替换为复数 α 求值。

验证环同态：对任意 $f,g\in\mathbb{Z}[x]$，

$$\Phi_\alpha(f+g)=(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)=\Phi_\alpha(f)+\Phi_\alpha(g),$$

$$\Phi_\alpha(fg)=(fg)(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)=\Phi_\alpha(f)\Phi_\alpha(g),$$

且 $\Phi_\alpha(1)=1$。故 Φ_α 是环同态。其像为

$$\operatorname{Im}\Phi_\alpha=\{f(\alpha)\mid f(x)\in\mathbb{Z}[x]\}=\mathbb{Z}[\alpha],$$

即由 α 生成的子环。

4.3. 核的分析与情形区分

$$\ker\Phi_\alpha=\{f(x)\in\mathbb{Z}[x]\mid f(\alpha)=0\},$$

即所有以 α 为根的整系数多项式组成的集合。

情形一：α 为超越元。若 $\ker\Phi_\alpha\neq0$，则存在非零多项式以 α 为根，与超越元定义矛盾。因此

$$\ker\Phi_\alpha=\{0\}.$$

此时 Φ_α 是单射，由环同态基本定理，

$$\mathbb{Z}[x]/\{0\}\cong\mathbb{Z}[\alpha],$$

即

$$\mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}[\alpha].$$

情形二：α 为代数元。此时 $\ker\Phi_\alpha \neq 0$。当 α 为代数整数时，存在唯一的首一不可约多项式 $m_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (称为 α 的极小多项式)使得

$$\ker\Phi_\alpha = (m_\alpha(x)).$$

由环同态基本定理，

$$\mathbb{Z}[x]/(m_\alpha(x)) \cong \mathbb{Z}[\alpha].$$

4.4. 具体实例

取 $\alpha = \sqrt{2}$。则 $\Phi_{\sqrt{2}}: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$，$f(x) \mapsto f(\sqrt{2})$。$\sqrt{2}$ 的极小多项式为 $m(x) = x^2 - 2$，故

$$\ker\Phi_{\sqrt{2}} = (x^2-2), \mathbb{Z}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

取 $\alpha = \pi$ (超越元)，则 $\ker\Phi_\pi = 0$，$\mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}[\pi]$。

应用价值：该同态框架具有深刻的数学意义和广泛的应用。

(1) 代数元与超越元的判别：将“代数元”与“超越元”的区分转化为环同态核是否为零的判定。核为零当且仅当 α 是超越元，核非零当且仅当 α 是代数元。这一判别法在数论和域论中具有基础性地位。

(2) 代数整数环的构造：对于代数整数 α，$\mathbb{Z}[\alpha]$ 作为环同态 Φ_α 的像，其结构完全由商环 $\mathbb{Z}[x]/(m_\alpha(x))$ 确定。这是代数数论中研究代数整数环的基本方法。例如，二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 的整数环可以由此统一构造。

(3) 域的代数扩张：将系数环从 $\mathbb{Z}$ 推广到域 F，赋值同态 $\Phi_\alpha: F[x] \to F[\alpha]$ 的核由 α 在 F 上的极小多项式 $m_\alpha(x)$ 生成，于是 $F[x]/(m_\alpha(x)) \cong F[\alpha]$。当 $m_\alpha(x)$ 不可约时，$F[\alpha]$ 是一个域，这正是添加 m_α 的一个根所得的扩域。因此，该同态框架为 Galois 理论中有限域扩张的构造提供了标准工具。

5. 多项式商环在块循环矩阵极小多项式求解中的应用

5.1. 问题的提出

块循环矩阵在信号处理、编码理论和数值计算中有着广泛应用。求块循环矩阵的极小多项式是一个重要的计算问题[5] [7]。本节证明：域上所有块循环矩阵组成的环同构于某个多元多项式环的商环，从而将矩阵的极小多项式计算转化为多项式理想的 Gröbner 基计算。

5.2. 循环矩阵的准备

定义 5.1 (单项式序)设 K 是域，$K[x_1, \cdots, x_n]$ 是 n 元多项式环。$K[x_1, \cdots, x_n]$ 中全体单项式上的一个全序 $<$ 称为单项式序，若它满足：(i) 乘法保序：对任意单项式 u, v, w，$u < v \Rightarrow uw < vw$；(ii) 良序：任意非空子集有最小元。常用的单项式序包括字典序(lex)、分次字典序(grlex)和分次逆字典序(grevlex)。

定义 5.2 (首项理想与 Gröbner 基)固定一个单项式序 $<$。对非零多项式 $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$，其首项 $\mathrm{LT}(f)$ 是指 f 的展开式中在序 $<$ 下最大的单项式(连同其系数)。设 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$ 是非零理想，$\mathrm{LT}(I)$ 表示 I 中所有非零多项式的首项生成的理想。I 的一个有限生成集 $G = \{g_1, \cdots, g_t\}$ 称为 I 的 Gröbner 基，若

$$\langle \mathrm{LT}(g_1), \cdots, \mathrm{LT}(g_t) \rangle = \mathrm{LT}(I).$$

定义 5.3 (S-多项式与 Buchberger 算法)对两个非零多项式 f, g，令 $L = \mathrm{lcm}(\mathrm{LT}(f), \mathrm{LT}(g))$，定义其

S-多项式为

$$S(f,g)=\frac{L}{\mathrm{LT}(f)}f-\frac{L}{\mathrm{LT}(g)}g.$$

Buchberger 准则指出：$G=\{g_1,\cdots,g_t\}$ 是 $I=G$ 的 Gröbner 基当且仅当对任意 $i\neq j$，$S(g_i,g_j)$ 除以 G 的余式为零。Buchberger 算法从任意一组生成元出发，不断计算各对生成元的 S-多项式并添加其余式，直到所有 S-多项式归约到零为止，从而得到 Gröbner 基。

5.3. 循环矩阵的环同构

设 F 为域，P 为 n 阶循环移位矩阵：

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

易验证 $P^n=I_n$。定义赋值同态

$$\Phi:F[x]\to M_n(F),f(x)\mapsto f(P).$$

由于 P 的极小多项式为 x^n-1 (在特征不整除 n 的域上)，有

$$\ker\Phi=(x^n-1).$$

由环同态基本定理，

$$F[x]/(x^n-1)\cong\mathrm{Im}\,\Phi=\mathcal{C}_n(F),$$

其中 $\mathcal{C}_n(F)$ 为所有 n 阶循环矩阵组成的环。

5.4. 块循环矩阵的核心同构

现在将上述结论推广到块循环矩阵。设 $n,k_1,\cdots,k_n$ 为正整数。考虑分块矩阵，其分块模式为 $n\times n$ 块阵列，其中第 i 行第 j 列的块是一个 $k_i\times k_j$ 矩阵。特别地，我们考虑 level-$n(r_1,\cdots,r_n)$-块循环矩阵：这类矩阵由 n 个基本块 $B_1,\cdots,B_n$ (其中 B_i 为 $k_i\times k_i$ 方阵)按循环模式生成[7]。

设 F 为域，$k_1,\cdots,k_n$ 为正整数，$r_1,\cdots,r_n\in F$。令 P_{k_i} 表示 k_i 阶循环移位矩阵。定义多元多项式环

$$R=F[x_1,\cdots,x_n].$$

对每个 $i=1,\cdots,n$，令 τ_i 表示如下 $K\times K$ 分块循环矩阵(其中 $K=k_1+\cdots+k_n$)：τ_i 的第 i 个对角块为 P_{k_i}，其余对角块为零矩阵，且非对角块全部为零。换言之，τ_i 是在第 i 个对角块位置上放置 P_{k_i} 的块对角矩阵。

定义映射

$$\Psi:R=F[x_1,\cdots,x_n]\to\mathcal{BC}_{k_1,\cdots,k_n}(F),$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)\mapsto f(\tau_1,\cdots,\tau_n),$$

其中 $\mathcal{BC}_{k_1,\cdots,k_n}(F)$ 表示由 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ 生成的所有矩阵多项式组成的环(即所有 level-$n(r_1,\cdots,r_n)$-块循环矩阵构成的环)。

验证 Ψ 是环满同态：对任意 $f,g\in R$，

$$\Psi(f+g)=(f+g)(\tau_1,\cdots,\tau_n)=f(\tau_1,\cdots,\tau_n)+g(\tau_1,\cdots,\tau_n)=\Psi(f)+\Psi(g),$$
$$\Psi(fg)=(fg)(\tau_1,\cdots,\tau_n)=f(\tau_1,\cdots,\tau_n)g(\tau_1,\cdots,\tau_n)=\Psi(f)\Psi(g),$$

且 $\Psi(1)=I_K$。满射性由 $\mathcal{BC}_{k_1,\cdots,k_n}(F)$ 的定义(由 τ_i 生成)保证。因此 Ψ 是环满同态。

5.5. 核与同构以及极小多项式的 Gröbner 基计算方法

由上述构造，$\tau_i^{k_i}=r_iI_K$ (因为在循环移位矩阵中 $P_{k_i}^{k_i}=I_{k_i}$，而 r_i 是标量，乘以单位矩阵)。因此

$$x_i^{k_i}-r_i\in\ker\Psi(i=1,\cdots,n).$$

事实上

$$\ker\Psi=\left\langle x_1^{k_1}-r_1,x_2^{k_2}-r_2,\cdots,x_n^{k_n}-r_n\right\rangle.$$

由环同态基本定理，

$$\mathcal{BC}_{k_1,\cdots,k_n}(F)\cong F[x_1,\cdots,x_n]\Big/\left\langle x_1^{k_1}-r_1,\cdots,x_n^{k_n}-r_n\right\rangle. \tag{5.1}$$

进一步证明：$A=f(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 的极小多项式是消元理想

$$J=\left\langle x_1^{k_1}-r_1,\cdots,x_n^{k_n}-r_ny-f(x_1,\cdots,x_n)\right\rangle\cap F[y]$$

的首一生成元[5]。具体而言，设 G 是理想

$$I=\left\langle x_1^{k_1}-r_1,\cdots,x_n^{k_n}-r_ny-f(x_1,\cdots,x_n)\right\rangle\subset F[x_1,\cdots,x_n,y]$$

在消元序下的 Gröbner 基，则 $G\cap F[y]$ 中的非零多项式就是 A 的极小多项式。

这一方法的理论依据是消元定理：对于理想 $I\subset K[x_1,\cdots,x_n]$，若 G 是 I 在消元序下的 Gröbner 基，则 $G\cap K[x_{l+1},\cdots,x_n]$ 是消元理想 $I\cap K[x_{l+1},\cdots,x_n]$ 的 Gröbner 基。因此，只需在消元序下计算 I 的 Gröbner 基，然后取其中仅含 y 的多项式即可。

此外，矩阵 $A=f(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 非奇异当且仅当

$$1\in\left\langle f(x_1,\cdots,x_n),x_1^{k_1}-r_1,\cdots,x_n^{k_n}-r_n\right\rangle,$$

即存在多项式 $g,w_1,\cdots,w_n$ 使得

$$1=fg+\sum_{i=1}^{n}w_i\left(x_i^{k_i}-r_i\right).$$

5.6. 具体数值实例

考虑一个非平凡情形：取 $n=1$，$k_1=2$，$r_1=1$，即退化为普通的 2×2 循环矩阵环。此时同构(5.1)简化为

$$\mathcal{C}_2(F)\cong F[x]\Big/\left\langle x^2-1\right\rangle.$$

令 $f(x)=x+1$，则对应的循环矩阵为

$$A=f(P)=P+I_2,\ \text{其中}\ P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

直接计算得

$$A^2=(P+I)^2=P^2+2P+I=I+2P+I=2(P+I)=2A,$$

故 $A^2-2A=O$，且 $A\neq O$ 与 $A\neq 2I$ (易验证)，所以 A 的极小多项式为

$$m_A(t)=t(t-2)=t^2-2t. \tag{5.2}$$

下面用 Gröbner 基方法复现同一结果。根据 5.5 节的公式，构造消元理想

$$J=\langle x^2-1, y-(x+1)\rangle \subset F[x,y],$$

其中 y 代表矩阵 A。采用消元序(如 $y<x$)，计算 $J\cap F[y]$ 的生成元。由 $y=x+1$ 得 $x=y-1$，代入 $x^2-1=0$：

$$(y-1)^2-1=y^2-2y=y(y-2)=0.$$

因此 $y^2-2y\in J\cap F[y]$。由于该多项式已经是首一的，且其根为 0 和 2，对应于矩阵 A 的特征值，故它正是 A 的极小多项式。于是

$$J\cap F[y]=\langle y^2-2y\rangle,$$

即从 Gröbner 基得到 $m_A(t)=t^2-2t=t(t-2)$，与直接矩阵计算结果(5.2)完全一致。

应用价值：本案例展示了环同态定理在计算代数中的应用。

(1) 代数与计算的桥梁：通过环同构(5.1)，将块循环矩阵的代数问题转化为多项式商环的理想论问题。这一转化使得原本需要直接处理矩阵的复杂计算，可以通过 Gröbner 基算法系统地完成。Gröbner 基理论本身是 Buchberger 于 1965 年发展的，而本案例表明环同态定理为这一理论在矩阵计算中的应用提供了理论框架。

(2) 极小多项式的系统化计算：构造消元理想，计算其在消元序下的 Gröbner 基，然后取与 $F[y]$ 的交集。这一方法适用于任意域上的块循环矩阵，且可以在 CoCoA 4.0 等计算机代数系统中实现。

(3) 可逆性判定与逆矩阵计算：同构(5.1)还提供了块循环矩阵可逆性的代数判别法。这等价于上述理想是整个多项式环。通过 Gröbner 基可以检验这一条件，并在条件满足时计算 f 的逆元。

6. 结语

本文通过三个具体案例展示了环同态定理在高等代数中的若干重要应用。案例一建立了线性变换环与矩阵环之间的同构关系，揭示了抽象变换与具体矩阵在代数结构上的本质一致性，为整个矩阵理论提供了基础。案例二利用赋值同态的核精确刻画了代数元与超越元的区别，并构造了相应的环同构，这是代数数论和域扩张理论的基本工具。案例三将块循环矩阵环表示为多元多项式环的商环，将矩阵计算问题转化为 Gröbner 基计算问题，体现了环同态定理在计算代数中的算法价值。

三个案例的共同方法论可归纳为：根据具体问题构造合适的环同态，准确计算核与像的结构，由环同态基本定理导出同构结论，进而利用商环的结构研究原问题。这一模式不仅统一了高等代数中看似分散的若干经典结果，也为解决实际问题提供了可操作的数学工具。环同态定理作为连接抽象代数与高等代数的桥梁，其理论深度和应用广度值得进一步发掘。

参考文献

[1] 张禾瑞. 近世代数基础[M]. 修订本. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[2] 北京大学数学系. 高等代数[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[3] Noether, E. (1927) Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl-und Funktionenkörpern. *Mathematische Annalen*, **96**, 26-61. https://doi.org/10.1007/bf01209152

[4] 聂灵沼, 丁石孙. 代数学引论[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[5] 王约华. 矩阵多项式的极小多项式算法[D]: [硕士学位论文]. 成都: 电子科技大学, 2011.

[6] Lang, S. (2002) Algebra. 3rd Edition, Springer-Verlag.

[7] Zhang, S., Jiang, Z. and Liu, S. (2002) An Application of the Gröbner Basis in Computation for the Minimal Polynomials and Inverses of Block Circulant Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **347**, 101-114. https://doi.org/10.1016/s0024-3795(01)00529-8