

复杂数据模型下指数Pareto分布的参数估计

罗 琼

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年7月22日; 录用日期: 2026年8月19日; 发布日期: 2026年8月26日

摘 要

针对服从指数Pareto分布的逐步II型删失竞争风险模型, 在潜在失效时间的寿命分布具有不同参数的情况下, 使用Newton-Raphson方法获得了未知参数的极大似然估计; 在平方误差损失函数下, 使用重要性抽样方法获得了未知参数的贝叶斯估计。最后, 使用蒙特卡洛模拟对所提方法的性能进行了评估, 结果显示两种方法的估计效果都很好。

关键词

逐步II型删失, 竞争风险, Newton-Raphson方法, 重要性抽样方法, 指数Pareto分布

Parameter Estimation of Exponential Pareto Distribution Based on Complex Data Model

Qiong Luo

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: July 22, 2026; accepted: August 19, 2026; published: August 26, 2026

Abstract

We consider the parameter estimation problem of the type II progressively censored competing risks model obeying the exponential Pareto distribution. When the life distribution of the potential failure time has different parameters, the maximum likelihood estimation of the unknown parameters is obtained by using the Newton-Raphson method, and the Bayesian estimation of the unknown parameters is obtained by using the importance sampling method under the square error loss function. Finally, the performance of the proposed method is evaluated by Monte Carlo simulation. The results show that the estimation results of the two methods are very good.

Keywords

Progressive Type II Censoring, Competing Risks, Newton-Raphson Method, Importance Sampling Method, Exponential Pareto Distribution

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在寿命试验中, 由于不断变化的外部环境和复杂的内部环境, 可能导致部件失效的原因往往不止一个, 失效原因定义为失效发生前的风险因素, 从某种意义上来说, 这些风险因素与部件的失效相竞争, 因此被称为竞争风险。竞争风险模型广泛应用于医学、社会学、经济学和工程学等诸多领域[1] [2]。

此外, 由于成本和时间的限制, 研究者希望能在寿命试验中撤出一部分未失效部件, 于是各种类型的删失方案被引入, 删失方案允许研究者在寿命试验的不同阶段任意移除未失效部件。随着部件的可靠性和寿命的提高, 为了更有效地进行寿命试验, 逐步删失方案被提出, 主要包括逐步 I 型和逐步 II 型删失方案, 近年来逐步删失方案引起了广大学者的关注, 王娟等[3]利用 EM 算法计算了逐步 II 型删失数据下对数正态分布总体的极大似然估计, 并与经典 Newton-Raphson 方法进行了比较; 于力超等[4]结合逐步删失样本, 研究了如何基于样本数据对产品寿命分布的参数进行估计; 林玉婷等[5]研究了逐步 II 型删失数据下广义指数分布的 E-Bayes 估计。

复杂删失数据下的竞争风险模型已逐渐成为统计学者关注的焦点, 也是未来可靠性分析和生存领域的一个重要发展趋势。Chacko 等[6]在带有随机移除的逐步 II 型删失竞争风险模型下, 研究了威布尔分布的参数估计; Lodhi 等[7]在逐步 II 型删失竞争风险模型下, 研究了 Gompertz 分布的极大似然估计, 并利用 Fisher 信息矩阵确定了最优结尾方案; Davies 等[8]在逐步 II 型删失竞争风险模型下, 对线性指数分布进行了似然推理, 并进行了数值模拟; Fan 等[9]针对右删失竞争风险数据提出了一种性能良好、收敛速度较快的核非参数分位数估计。

本文考虑了逐步 II 型删失下竞争风险模型的统计分析, 假设潜在失效时间的寿命分布独立且服从参数不同的指数 Pareto 分布, 使用 Newton-Raphson 方法获得参数的极大似然估计值, 使用重要性抽样方法获得参数的近似贝叶斯估计值。其中, 重要性抽样方法是蒙特卡洛方法的一种扩展, 是一种从后验密度函数中提取样本的非常有用的技术, 它可以大大减少模拟中的抽样次数[10], 该方法被广泛应用于各种模型的统计分析中。最后, 使用蒙特卡洛方法进行数值模拟, 并对两种方法的性能进行了比较和分析。

2. 逐步 II 型删失竞争风险模型

假设寿命实验中有 n 个相同的部件, 部件的寿命由独立同分布的随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 表示。设实验中存在 s 个导致部件失效的原因, 令 $X_i = \min\{X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{si}\}, i=1, 2, \dots, n$, 其中 X_{ji} 表示第 i 个部件在第 j 个失效原因下的潜在寿命, $j=1, 2, \dots, s$ 。假设失效原因是独立的, 则 $X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{si}, i=1, 2, \dots, n$ 也是相互独立的。

在逐步 II 型删失过程前预先指定删失方案 $R=(R_1, R_2, \dots, R_m)$ 和有效样本量 $m(m < n)$, m 和 R 满足

$\sum_{i=1}^n R_i + m = n$, 当第 i 个部件失效时, R_i 个未失效部件会被随机移除, 记录部件失效时间 $X_{i:m:n}$ 和相应的失

效原因 $\delta_i (\delta_i \in 1, 2, \dots, s), i = 1, 2, \dots, m$ ，最终得到逐步 II 型删失竞争风险模型的观测样本为

$$\{(X_{1:m:n}, \delta_1), (X_{2:m:n}, \delta_2), \dots, (X_{m:m:n}, \delta_m)\}。$$

本文重点考虑两种失效原因下的竞争风险模型，方便起见，记观测样本为

$$\{(X_1, \delta_1), (X_2, \delta_2), \dots, (X_m, \delta_m)\}。此时，X_i = \min\{X_{1i}, X_{2i}\}, \delta_i (\delta_i \in 1, 2), i = 1, 2, \dots, m，令 I(\delta_i = k) = \begin{cases} 1, \delta_i = k \\ 0, \delta_i \neq k \end{cases}，$$

则 $m_k = \sum_{i=1}^m I(\delta_i = k)$ 表示因为原因 k 失效的部件总数， $k = 1, 2$ 。因此，逐步 II 型删失竞争风险数据的联合概率密度函数为：

$$L(\mathbf{x}) = C \prod_{k=1}^2 \prod_{i=1}^m [f_k(x_i) \bar{F}_{3-k}(x_i)]^{I(\delta_i=k)} [\bar{F}_k(x_i) \bar{F}_{3-k}(x_i)]^{R_i} \quad (1)$$

其中 $C = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \cdots (n - R_1 - R_2 - \cdots - R_m - m + 1)$ ， $f_k(\cdot)$ 和 $\bar{F}_k(\cdot) = 1 - F_k(\cdot)$ 分别表示因失效原因 k 导致的潜在失效时间所服从寿命分布的概率密度函数和累积分布函数。

考虑使用指数 Pareto 分布 $EP(\alpha, \lambda)$ 作为潜在失效时间的寿命分布，该分布相较于传统的 Weibull 分布或对数正态分布等寿命分布，具有更强的灵活性，其失效率函数可呈现单调递减、单调递增、浴盆形(先减后增)或倒浴盆形(先增后减)等多种形态，因而能够更精确地刻画复杂工程系统或生物医学中非单调风险变化的失效机制，因此在极端事件研究中被广泛使用[11]，其密度函数和分布函数分别为：

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda \left[1 - (1+x)^{-\alpha}\right]^{\lambda-1} (1+x)^{-(\alpha+1)}, x > 0, \alpha < 0, \lambda > 0,$$

$$F(x; \alpha, \lambda) = \left[1 - (1+x)^{-\alpha}\right]^{\lambda}, x > 0, \alpha < 0, \lambda > 0.$$

3. 极大似然估计

假设潜在失效时间的寿命分布独立且服从参数不同的指数 Pareto 分布，设 $X_{1i} \sim EP(\alpha_1, \lambda_1)$ ， $X_{2i} \sim EP(\alpha_2, \lambda_2)$ ，对于给定的删失方案 $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_m)$ ，由式(1)可得删失样本 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 的似然函数为：

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2; \mathbf{x}) = C \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \prod_{k=1}^2 \prod_{i=1}^m \left[1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}\right]^{(\lambda_k-1)I(\delta_i=k)} \prod_{k=1}^2 \prod_{i=1}^m (1+x_i)^{-(\alpha_k+1)I(\delta_i=k)} \prod_{k=1}^2 \prod_{i=1}^m \left\{1 - \left[1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}\right]^{\lambda_k}\right\}^{I(\delta_i=3-k)+R_i} \quad (2)$$

其中 $C = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \cdots (n - R_1 - R_2 - \cdots - R_m - m + 1)$ 。

对似然函数(2)求对数可得对数似然函数：

$$\begin{aligned} l(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2; \mathbf{x}) &\propto \sum_{k=1}^2 m_k \ln \alpha_k + \sum_{k=1}^2 m_k \ln \lambda_k + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^m (\lambda_k - 1) I(\delta_i = k) \ln \left[1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}\right] \\ &\quad - \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^m (\alpha_k + 1) I(\delta_i = k) \ln(1+x_i) \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^m \left[I(\delta_i = 3-k) + R_i \right] \ln \left\{1 - \left[1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}\right]^{\lambda_k}\right\} \end{aligned} \quad (3)$$

对对数似然函数(3)分别关于参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ 求偏导并令其等于 0，可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \alpha_k} &= \frac{m_k}{\alpha_k} + \sum_{i=1}^m (\lambda_k - 1) I(\delta_i = k) \frac{(1+x_i)^{-\alpha_k} \ln(1+x_i)}{1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}} - \sum_{i=1}^m I(\delta_i = k) \ln(1+x_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m [I(\delta_i = 3-k) + R_i] \frac{\lambda_k [1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}]^{\lambda_k - 1} (1+x_i)^{-\alpha_k} \ln(1+x_i)}{1 - [1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}]^{\lambda_k}} \end{aligned} \quad (4)$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \lambda_k} &= \frac{m_k}{\lambda_k} + \sum_{i=1}^m I(\delta_i = k) \ln[1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}] + \sum_{i=1}^m I(\delta_i = k) \ln[1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}] \\ &\quad - \sum_{i=1}^m [I(\delta_i = 3-k) + R_i] \frac{[1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}]^{\lambda_k} \ln[1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}]}{1 - [1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}]^{\lambda_k}} \end{aligned} \quad (5)$$

$$= 0$$

同时求解方程组(4)和(5)可获得参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ 的极大似然估计值 $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ ，显然很难通过计算获得其显式解，为了解决这个问题，可在 R 软件中使用 Newton-Raphson 方法来求解参数的极大似然估计值。

4. 贝叶斯估计

贝叶斯方法结合样本信息和先验信息进行统计推断，所以贝叶斯估计更精确、更合理。选择比较常见的平方误差损失函数进行参数估计，其定义为 $L(\beta, \hat{\beta}) = (\hat{\beta} - \beta)^2$ ，在平方误差损失函数下，参数的贝叶斯估计为后验均值。

由于参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ 均未知，所以考虑分段独立的先验假设。 λ_1, λ_2 取其共轭先验分布伽马分布；考虑到伽马分布的灵活性，设参数 α_1, α_2 做正向变换后都服从独立的伽马分布，则参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ 的先验分布为：

$$\pi_1(\alpha_1) \propto \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1}, \alpha_1 > 0, a_1 > 0, b_1 > 0,$$

$$\pi_2(\alpha_2) \propto \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_2}, \alpha_2 > 0, a_2 > 0, b_2 > 0,$$

$$\pi_3(\lambda_1) \propto \lambda_1^{c_1-1} e^{-d_1 \lambda_1}, \lambda_1 > 0, c_1 > 0, d_1 > 0,$$

$$\pi_4(\lambda_2) \propto \lambda_2^{c_2-1} e^{-d_2 \lambda_2}, \lambda_2 > 0, c_2 > 0, d_2 > 0,$$

由此可得参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ 的联合先验密度函数为：

$$\pi(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) = \pi_1(\alpha_1) \pi_2(\alpha_2) \pi_3(\lambda_1) \pi_4(\lambda_2) \propto \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1} \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_2} \lambda_1^{c_1-1} e^{-d_1 \lambda_1} \lambda_2^{c_2-1} e^{-d_2 \lambda_2} \quad (6)$$

由式(2)和式(6)可得参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ 的联合后验密度函数：

$$\begin{aligned} \pi^*(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2; \mathbf{x}) &= \frac{\pi(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) L(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2; \mathbf{x})}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) L(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2; \mathbf{x}) d\alpha_1 d\alpha_2 d\lambda_1 d\lambda_2} \\ &\propto \alpha_1^{m_1+a_1-1} \alpha_2^{m_2+a_2-1} \lambda_1^{m_1+c_1-1} \lambda_2^{m_2+c_2-1} e^{-b_1 \alpha_1} e^{-b_2 \alpha_2} e^{-d_1 \lambda_1} e^{-d_2 \lambda_2} \prod_{k=1}^2 \prod_{i=1}^m [1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}]^{(\lambda_k-1)I(\delta_i=k)} \\ &\quad \prod_{k=1}^2 \prod_{i=1}^m (1+x_i)^{-(\alpha_k+1)I(\delta_i=k)} \prod_{k=1}^2 \prod_{i=1}^m \left\{ 1 - [1 - (1+x_i)^{-\alpha_k}]^{\lambda_k} \right\}^{I(\delta_i=3-k)+R_i} \end{aligned} \quad (7)$$

因此, 参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ 的任意函数 $\xi(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2)$ 在平方损失函数下的贝叶斯估计值为:

$$\hat{\xi}(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \xi(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) \pi^*(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2; \mathbf{x}) d\alpha_1 d\alpha_2 d\lambda_1 d\lambda_2$$

显然, 以上这些复杂积分很难计算出具体显性形式, 因此, 采用重要性抽样方法对这些复杂积分进行逼近, 并计算未知参数的近似贝叶斯估计值。

联合后验密度函数(7)可以被改写为:

$$\pi(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2; \mathbf{x}) \propto y_1(\alpha_1 | \mathbf{x}) y_2(\alpha_2 | \mathbf{x}) y_3(\lambda_1 | \alpha_1, \mathbf{x}) y_4(\lambda_2 | \alpha_2, \mathbf{x}) D_1(\alpha_1, \lambda_1 | \mathbf{x}) D_2(\alpha_2, \lambda_2 | \mathbf{x})$$

其中

$$\begin{aligned} y_1(\alpha_1 | \mathbf{x}) &\propto \alpha_1^{m_1+a_1-1} e^{-\left[b_1 + \sum_{i=1}^m I(\delta_i=1) \ln(1+x_i)\right] \alpha_1}, \\ y_2(\alpha_2 | \mathbf{x}) &\propto \alpha_2^{m_2+a_2-1} e^{-\left[b_2 + \sum_{i=1}^m I(\delta_i=2) \ln(1+x_i)\right] \alpha_2}, \\ y_3(\lambda_1 | \alpha_1; \mathbf{x}) &\propto \lambda_1^{m_1+c_1-1} e^{-\left\{d_1 - \sum_{i=1}^m I(\delta_i=1) \ln[1-(1+x_i)^{-\alpha_1}]\right\} \lambda_1}, \\ y_4(\lambda_2 | \alpha_2; \mathbf{x}) &\propto \lambda_2^{m_2+c_2-1} e^{-\left\{d_2 - \sum_{i=1}^m I(\delta_i=2) \ln[1-(1+x_i)^{-\alpha_2}]\right\} \lambda_2}, \\ D_1(\alpha_1, \lambda_1 | \mathbf{x}) &\propto \prod_{i=1}^m \left[1-(1+x_i)^{-\alpha_1}\right]^{-I(\delta_i=1)} \prod_{i=1}^m \left\{1-\left[1-(1+x_i)^{-\alpha_1}\right]^{\lambda_1}\right\}^{I(\delta_i=2)}, \\ D_2(\alpha_2, \lambda_2 | \mathbf{x}) &\propto \prod_{i=1}^m \left[1-(1+x_i)^{-\alpha_2}\right]^{-I(\delta_i=2)} \prod_{i=1}^m \left\{1-\left[1-(1+x_i)^{-\alpha_2}\right]^{\lambda_2}\right\}^{I(\delta_i=1)}. \end{aligned}$$

显然函数 $y_1(\alpha_1 | \mathbf{x}), y_2(\alpha_2 | \mathbf{x}), y_3(\lambda_1 | \mathbf{x}), y_4(\lambda_2 | \mathbf{x})$ 都服从伽马分布, 即:

$$\begin{aligned} y_1(\alpha_1 | \mathbf{x}) &\sim G\left(m_1 + a_1, b_1 + \sum_{i=1}^m I(\delta_i=1) \ln(1+x_i)\right), \\ y_2(\alpha_2 | \mathbf{x}) &\sim G\left(m_2 + a_2, b_2 + \sum_{i=1}^m I(\delta_i=2) \ln(1+x_i)\right), \\ y_3(\lambda_1 | \alpha_1; \mathbf{x}) &\sim G\left(m_1 + c_1, d_1 - \sum_{i=1}^m I(\delta_i=1) \ln[1-(1+x_i)^{-\alpha_1}]\right), \\ y_4(\lambda_2 | \alpha_2; \mathbf{x}) &\sim G\left(m_2 + c_2, d_2 - \sum_{i=1}^m I(\delta_i=2) \ln[1-(1+x_i)^{-\alpha_2}]\right). \end{aligned}$$

可直接利用伽马分布生成参数 $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ 的随机样本。根据 Dey [12] 介绍的方法, 推导了使用重要性抽样方法获得参数近似贝叶斯估计值的具体步骤:

步骤 1 利用 $G\left(m_k + a_k, b_k + \sum_{i=1}^m I(\delta_i=k) \ln(1+x_i)\right)$ 生成 $\alpha_k, k=1, 2$;

步骤 2 利用 $G\left(m_k + c_k, d_k - \sum_{i=1}^m I(\delta_i=k) \ln[1-(1+x_i)^{-\alpha_k}]\right)$ 生成 $\lambda_k, k=1, 2$;

步骤 3 将步骤 1 和步骤 2 重复 M 次, 获得样本 $\{(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \lambda_{1i}, \lambda_{2i}), i=1, 2, \dots, M\}$;

步骤 4 在平方损失函数下, 参数 $\xi(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2)$ 的贝叶斯估计值可近似表示为:

$$\hat{\xi}(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sum_{i=1}^M \xi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \lambda_{1i}, \lambda_{2i}) D_1(\alpha_{1i}, \lambda_{1i}) D_2(\alpha_{2i}, \lambda_{2i})}{\sum_{i=1}^M D_1(\alpha_{1i}, \lambda_{1i}) D_2(\alpha_{2i}, \lambda_{2i})}.$$

5. 数值模拟

使用蒙特卡洛方法计算未知参数的估计值。首先, 根据 Wang [13]提出的产生逐步 II 型删失样本的算法, 推导了生成逐步 II 型删失竞争样本的具体算法:

- 步骤 1 利用均匀分布 $U(0,1)$ 生成 m 个独立同分布的随机样本 $U_1, U_2, \dots, U_m$;
- 步骤 2 计算 $V_i = U_i^{1/(i+R_m+R_{m-1}+\dots+R_{m-i+1})}$, $i=1, 2, \dots, m$;
- 步骤 3 计算 $W_i = 1 - V_m V_{m-1} \dots V_{m-i+1}$, $i=1, 2, \dots, m$, 则 $W_1, W_2, \dots, W_m$ 为服从均匀分布 $U(0,1)$ 的逐步 II 型删失样本;
- 步骤 4 设 $X_1 \sim EP(\alpha_1, \lambda_1)$, $X_2 \sim EP(\alpha_2, \lambda_2)$, 计算 $\min(X_1, X_2)$ 的分布函数 $F(\cdot)$;
- 步骤 5 计算 $x_i = F^{-1}(W_i)$, $i=1, 2, \dots, m$, 则 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 为服从指数 Pareto 分布的逐步 II 型删失竞争风险模型的随机样本;
- 步骤 6 计算 $X_1 < X_2$ 的概率, 其中 X_1, X_2 表示因原因 1 或原因 2 导致部件失效的时间;
- 步骤 7 利用参数为 $P(X_1 < X_2)$ 的两点分布生成失效原因样本 $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$;

基于以上随机样本, 利用 Newton-Raphson 算法获得参数的极大似然估计值, 利用重要性抽样方法获得参数的贝叶斯估计值, 估计过程重复 1000 次, 估计值的平均绝对偏差 $AB = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} |\hat{\beta} - \beta|$ 和均方误差

$$MSE = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{\beta} - \beta)^2$$

被用来比较和分析估计值的性能。

选取样本量 n 和 m 的不同组合进行模拟, 在相同的 (n, m) 下采取以下三种不同的删失方案:

- (1) 方案 L (左删失): $R = (n-m, 0^{m-1})$;
- (2) 方案 R (右删失): $R = (0^{m-1}, n-m)$;
- (3) 方案 M (均匀删失): $R = (1^{n-m}, 0^{m-1})$ 。

其中 0^j 表示 j 个 0。

参数的真实值取 $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.6$, $\lambda_1 = 2$ 和 $\lambda_2 = 2.1$, 贝叶斯估计中的超参数取 $a_1 = 13.5$, $a_2 = 15$, $c_1 = 14$, $c_2 = 10$, $b_1 = 5$, $b_2 = 2.7$, $d_1 = 3$, $d_2 = 2$ 。参数的极大似然估计值如表 1 所示, 参数的贝叶斯估计值如表 2 所示。

Table 1. Maximum likelihood estimation of parameters

表 1. 参数的极大似然估计值

(n, m)	R	α_1		α_2		λ_1		λ_2	
		AB	MSE	AB	MSE	AB	MSE	AB	MSE
(30, 15)	L	0.2707	0.5667	0.2239	0.5600	0.7145	4.0547	0.4776	2.5176
	R	0.3744	0.8422	0.3324	0.8597	0.8003	4.4590	0.6307	3.4312
	M	0.2735	0.6010	0.2359	0.5898	0.6145	5.7442	0.5496	2.7370

续表

(30, 25)	L	0.2354	0.4309	0.2010	0.4861	0.5398	1.9479	0.4548	1.5880
	R	0.2737	0.6208	0.1972	0.5607	0.6595	2.9785	0.5074	2.4471
	M	0.2082	0.3781	0.1707	0.4061	0.5265	1.9933	0.4415	1.8104
(60, 30)	L	0.1452	0.2145	0.1186	0.2091	0.3071	0.7363	0.2390	0.6592
	R	0.2136	0.2943	0.1554	0.2868	0.3545	0.8003	0.2700	0.8322
	M	0.1557	0.2331	0.1008	0.2321	0.2804	0.6133	0.1924	0.5604
(60, 40)	L	0.1503	0.2323	0.1000	0.1812	0.2924	0.6481	0.2210	0.6177
	R	0.1667	0.2602	0.1118	0.2312	0.3169	0.6619	0.2125	0.5927
	M	0.1343	0.1836	0.1028	0.1926	0.2716	0.5152	0.1839	0.4687
(60, 50)	L	0.1212	0.1651	0.0876	0.1762	0.2383	0.4969	0.1861	0.6493
	R	0.1402	0.1946	0.0950	0.1987	0.2898	0.5973	0.1808	0.5243
	M	0.1353	0.1908	0.0835	0.1575	0.2799	0.5266	0.1638	0.4661

Table 2. Bayesian estimation of parameters
表 2. 参数的贝叶斯估计值

(n, m)	R	α_1		α_2		λ_1		λ_2	
		AB	MSE	AB	MSE	AB	MSE	AB	MSE
(30, 15)	L	0.0656	0.0399	0.2771	0.1515	0.5281	0.5736	0.3818	0.3006
	R	0.3432	0.1983	0.7967	0.7550	0.6455	0.7294	0.5422	0.5569
	M	0.0737	0.0537	0.3838	0.2335	0.5416	0.5074	0.5123	0.4786
(30, 25)	L	0.1114	0.0537	0.1890	0.0982	0.3390	0.3704	0.3588	0.3152
	R	0.1438	0.0847	0.4763	0.3299	0.5649	0.5234	0.4688	0.4976
	M	0.0825	0.0487	0.1943	0.1059	0.4610	0.3713	0.4151	0.3711
(60, 30)	L	0.1313	0.0526	0.0979	0.0755	0.2335	0.1636	0.2173	0.2116
	R	0.3522	0.2042	0.7529	0.6808	0.3219	0.3009	0.1982	0.2600
	M	0.0972	0.0527	0.1353	0.0778	0.2604	0.2259	0.1828	0.1849
(60, 40)	L	0.1216	0.0513	0.0943	0.0714	0.2441	0.1908	0.1941	0.1678
	R	0.2330	0.1246	0.5652	0.4176	0.2752	0.2849	0.1637	0.2046
	M	0.1219	0.0567	0.0911	0.0707	0.2532	0.1341	0.1730	0.2041
(60, 50)	L	0.1126	0.0477	0.0782	0.0567	0.1232	0.1141	0.1552	0.1470
	R	0.1384	0.0776	0.3387	0.1863	0.2377	0.2117	0.1601	0.2030
	M	0.1197	0.0469	0.0632	0.0534	0.2371	0.1633	0.1457	0.1758

从表 1 和表 2 可得到如下结论:

- (1) 极大似然估计值和贝叶斯估计值的平均绝对偏差和均方误差都很小, 说明这两种估计都很精确;
- (2) 随着样本量 n 或有效样本量 m 的增加, 极大似然估计值和贝叶斯估计值的平均绝对偏差和均方误差都会逐渐减小, 即有效样本越多估计越精确;
- (3) 在相同的样本量和删失方案下, 相比于极大似然估计值, 贝叶斯估计值的平均绝对偏差和均方误差都更小, 这是因为极大似然估计只考虑了样本信息, 而贝叶斯估计不仅考虑了样本信息, 还考虑了样本的先验信息, 因此, 贝叶斯估计比极大似然估计更精确;
- (4) 极大似然估计和贝叶斯估计中, 在相同的样本量下, 左删失方案和均匀删失方案下估计值的平均绝对偏差和均方误差都略小于右删失方案下的平均绝对偏差和均方误差, 说明左删失方案和均匀删失方案优于右删失方案;
- (5) 在极大似然估计中, 参数 α_2 和 λ_2 的估计效果优于参数 α_1 和 λ_1 的估计效果, 这是由于参数选取的真值不同, 导致竞争失效样本中由失效原因 2 失效的部件数相对较多, 所以参数 α_2 和 λ_2 的估计效果更好;
- (6) 若选取不适当的先验分布和超参数, 贝叶斯估计可能会有较大的偏差, 模拟结果表明, 本文对先验分布和超参数的选取是合理的。

参考文献

- [1] 孙赞, 王瑛, 郭之俊, 李超, 朱法顺. 基于竞争失效的产品可靠性评估[J]. 火力与指挥控制, 2020, 45(1): 32-35+42.
- [2] 吕晶晶, 巫宏基, 侯雅文, 陈征. 竞争风险存在时基于限制平均损失时间的统计分析[J]. 中国卫生统计, 2021, 38(5): 661-664.
- [3] 王娟, 王晓荣. 基于 EM 算法的一般 II 型逐步删失数据下的参数估计[J]. 安徽师范大学学报(自然科学版), 2014, 37(6): 524-529.
- [4] 于力超, 俞翰君. 相依结构样本次序统计量的随机比较及逐步删失寿命试验参数估计方法研究[J]. 数理统计与管理, 2021, 40(1): 61-70.
- [5] 林玉婷, 韦程东, 陈丽玲, 罗文婷, 唐璐薇, 周昭君. 逐步 II 型删失数据下广义指数分布形状参数估计[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版), 2021, 38(3): 6-11.
- [6] Chacko, M. and Mohan, R. (2018) Bayesian Analysis of Weibull Distribution Based on Progressive Type-II Censored Competing Risks Data with Binomial Removals. *Computational Statistics*, **34**, 233-252. <https://doi.org/10.1007/s00180-018-0847-2>
- [7] Lodhi, C., Tripathi, Y.M. and Bhattacharya, R. (2021) On a Progressively Censored Competing Risks Data from Gompertz Distribution. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, **52**, 1278-1299. <https://doi.org/10.1080/03610918.2021.1879141>
- [8] Davies, K.F. and Volterman, W. (2020) Progressively Type-II Censored Competing Risks Data from the Linear Exponential Distribution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **51**, 1444-1460. <https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1764044>
- [9] Fan, C., Ding, G. and Zhang, F. (2020) A Kernel Nonparametric Quantile Estimator for Right-Censored Competing Risks Data. *Journal of Applied Statistics*, **47**, 61-75. <https://doi.org/10.1080/02664763.2019.1631267>
- [10] Xiong, Z. and Gui, W. (2021) Classical and Bayesian Inference of an Exponentiated Half-Logistic Distribution under Adaptive Type II Progressive Censoring. *Entropy*, **23**, Article 1558. <https://doi.org/10.3390/e23121558>
- [11] 程从华. 基于截尾数据指数 Pareto 分布应力-强度模型的可靠性[J]. 数学学报(中文版), 2020, 63(3): 193-208.
- [12] Dey, T., Dey, S. and Kundu, D. (2016) On Progressively Type-II Censored Two-Parameter Rayleigh Distribution. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, **45**, 438-455. <https://doi.org/10.1080/03610918.2013.856921>
- [13] Wang, X. and Gui, W. (2021) Bayesian Estimation of Entropy for Burr Type XII Distribution under Progressive Type-II Censored Data. *Mathematics*, **9**, Article 313. <https://doi.org/10.3390/math9040313>