

具有多重卷积结构的梯度 $\tilde{h}$ -近Ricci孤立子

赵晓慧, 刘建成*

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年7月24日; 录用日期: 2026年8月23日; 发布日期: 2026年9月8日

摘 要

该文得到了具有多重卷积结构的黎曼流形是梯度 $\tilde{h}$ -近Ricci孤立子的充要条件。作为应用, 在关于卷积函数或基流形和纤维流形上梯度向量场的一些自然假设下, 运用强极值原理, 证明了具有多重卷积结构的梯度 $\tilde{h}$ -近Ricci孤立子的不存在性结果, 即这样的孤立子只能是黎曼直积流形。

关键词

多重卷积流形, 梯度 $\tilde{h}$ -近Ricci孤立子, 不存在性

Gradient $\tilde{h}$ -Almost Ricci Solitons with Multiply Warped Product Structure

Xiaohui Zhao, Jiancheng Liu*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: July 24, 2026; accepted: August 23, 2026; published: September 8, 2026

Abstract

In this paper, we derive necessary and sufficient conditions for a multiply warped product manifold to be a gradient $\tilde{h}$ -almost Ricci soliton. As applications, under some natural assumptions on the warping functions or the gradient vector fields on the base and fiber manifolds, we obtain the non-existence results of gradient $\tilde{h}$ -almost Ricci solitons with multiply warped product structure by applying the strong maximum principle, i.e., such solitons are Riemannian product manifolds.

Keywords

Multiply Warped Product Manifolds, Gradient $\tilde{h}$ -Almost Ricci Soliton, Nonexistence

*通讯作者。



1. 引言及主要结果

1982 年, Hamilton 在文献[1]中创建了 Ricci 流理论, 并提出了可用其作为破解庞加莱猜想的解析方法。后来, 进一步得到了 Ricci 流上的自相似解-Ricci 孤立子。之后, Pigola 等[2]提出了近 Ricci 孤立子的概念, 并对其性质进行了研究。2017 年, Gomes 等[3]将近 Ricci 孤立子推广到 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子, 即若黎曼流形 (M^n, g) 上存在光滑向量场 X 和光滑函数 $\tilde{h}, \tilde{\lambda}: M^n \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

$$\text{Ric} + \frac{\tilde{h}}{2} \mathcal{L}_X g = \tilde{\lambda} g, \quad (1.1)$$

则称 (M^n, g) 为 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子, 记为 $(M^n, g, X, \tilde{h}, \tilde{\lambda})$, 其中 $\mathcal{L}_X g$ 是度量 g 关于光滑向量场 X 的李导数, Ric 表示 M^n 的 Ricci 张量。当 $X = \nabla \tilde{\varphi}$, 其中 $\tilde{\varphi}: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数, 则称该 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子为梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子, $\tilde{\varphi}$ 称为势函数。此时方程(1.1)变为

$$\text{Ric} + \tilde{h} \text{Hess}(\tilde{\varphi}) = \tilde{\lambda} g, \quad (1.2)$$

其中 $\text{Hess}(\tilde{\varphi}) = \nabla^2 \tilde{\varphi}$ 表示 $\tilde{\varphi}$ 的 Hessian。当孤立子函数 $\tilde{\lambda}$ 分别大于零、等于零或小于零时, 梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子称为收缩型、稳定型或扩张型。以下是 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子的几种特殊情形:

- i) 爱因斯坦流形: $\tilde{h} \equiv 0$, 或 $\tilde{\varphi} \equiv \text{常数}$, $\tilde{\lambda} \equiv \text{常数}$;
- ii) Ricci 孤立子: $\tilde{h} \equiv 1$, $\tilde{\lambda} \equiv \text{常数}$;
- iii) 近 Ricci 孤立子: $\tilde{h} \equiv 1$, $\tilde{\lambda} \in C^\infty(M)$;
- iv) $\tilde{h}$ -Ricci 孤立子: $\tilde{\lambda} \equiv \text{常数}$;
- v) 广义 m -拟爱因斯坦流形: $\tilde{h} = -\frac{m}{\tilde{\varphi}}$ 且 $\tilde{\lambda} \equiv \text{常数}$, $m > 0$ 。

本文研究具有多重卷积结构的 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子, 为此先回顾多重卷积流形的相关概念(参见文献[4])。设 (B^r, g_B) 和 $(F_i^{s_i}, g_{F_i})$ 分别是 r 维和 s_i 维黎曼流形, $1 \leq i \leq m$ 。 $f_i: B^r \rightarrow (0, +\infty)$ 是 B^r 上 m 个光滑函数。记乘积流形

$$M^n := B^r \times F_1^{s_1} \times F_2^{s_2} \times \cdots \times F_m^{s_m}$$

到 B^r 上和到 $F_i^{s_i}$ 上的自然投影分别为 π 和 σ_i , 其中 $n = r + s$, $s = \sum_{i=1}^m s_i$ 。若在 M^n 上赋予如下度量

$$g = \pi^*(g_B) \oplus (f_1 \circ \pi)^2 \sigma_1^*(g_{F_1}) \oplus (f_2 \circ \pi)^2 \sigma_2^*(g_{F_2}) \oplus \cdots \oplus (f_m \circ \pi)^2 \sigma_m^*(g_{F_m}),$$

则 (M^n, g) 称为多重卷积流形。此时, f_i 称为卷积函数, (B^r, g_B) 称为基流形, $(F_i^{s_i}, g_{F_i})$ 称为纤维流形。特别地, 若 f_i 均为正常值函数时, (M^n, g) 即为多重黎曼直积流形。

多重卷积流形位于现代微分几何与概率论、信息论、几何分析、机器学习的交叉前沿, 是推动这些领域发展的一个富有活力的思想工具。也在广义相对论中扮演着描述物理系统的数学模型、参数空间或理论框架的角色。例如, 若在 $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ 上赋予如下度量

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

则 (M, g) 即为 Reissner-Nordström 时空 (Schwarzschild 黑洞的特殊情形), 其中 m 表示质量, q 表示电荷。若在 $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^k \times F$ 上赋予如下度量

$$g = -dt^2 + \cosh^2 t g_{\mathbb{S}^k} + g_F,$$

则 (M, g) 即为 de Sitter 时空, 其中 (F, g_F) 为黎曼流形。再如在 $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^k$ 上赋予度量 $g = -dt^2 + \cosh^2 t g_{\mathbb{S}^k}$, 则 (M, g) 即为广义 Robertson-Walker 时空 (参见文献[5])。上述几类经典时空都是多重卷积流形的具体实例。因此, 对多重卷积流形上的梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子开展研究, 可以从孤立子几何的角度, 对上述时空模型给出相应的几何约束。

研究多重卷积流形的目的之一是寻找其上具有某种曲率性质的度量。譬如, 文献[6]得到了卷积流形是 Einstein 流形的充要条件。文献[7]给出了卷积函数的一些特殊形式, 使得对应的广义 Robertson-Walker 时空是常数量曲率空间。文献[8]得到了卷积函数的特解, 使得广义 Robertson-Walker 时空是 Einstein 流形, 且其纤维也是 Einstein 流形。

另一个重要的应用是寻找具有多重卷积结构的各种孤立子。例如, 文献[9]构造了一个稳定 Ricci 孤立子, 其形式是卷积流形 $(0, +\infty) \times f^{\mathbb{S}^k}$, $k > 1$, 卷积函数 f 是一条射线。文献[10]得到了卷积流形是梯度 Ricci 孤立子的充要条件, 特别地证明了具有卷积结构的梯度收缩 Ricci 孤立子是紧致黎曼流形的必要条件是基流形是紧致的, 且纤维流形的维数至少为 2。文献[11]得到卷积流形是梯度近 Ricci 孤立子的充要条件。更为一般地, 文献[12]和[13]得到了多重卷积流形是梯度 Ricci 孤立子或梯度近 Ricci 孤立子的充要条件。

Ricci 孤立子是研究黎曼流形曲率演化与奇点结构的重要研究对象, 受到众多几何学者的广泛关注。 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子是 Ricci 孤立子的一类重要推广, 具有重要的理论研究价值。多重卷积流形作为卷积流形的进一步推广, 是构造大量非平凡完备黎曼流形的有效工具。目前, 已有大量工作讨论卷积上各类孤立子的刚性问题, 但针对多重卷积流形上梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子的相关研究仍然比较匮乏。因此, 在多重卷积框架下开展梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子的研究, 一方面可以检验该类孤立子在复杂分解流形上的刚性, 另一方面也能够为 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子提供新的实例, 进一步完善 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子的理论体系。

基于此, 本文的主要目的之一是研究具有多重卷积结构的梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子的充要条件, 得到如下主要定理。为叙述方便, 以下约定: 定义在多重卷积流形 $M^n = B^r \times_{f_1} F_1^{s_1} \times_{f_2} F_2^{s_2} \times \cdots \times_{f_m} F_m^{s_m}$ 上的函数 $\tilde{\varphi}$, $\tilde{h}$ 和 $\tilde{\lambda}$ 分别表示定义在 B^r 上的光滑函数 φ , h 和 λ 在 M^n 上的提升 (提升的具体定义参见第 2 节)。

定理 1.1 设 (M^n, g) 是以 (B^r, g_B) 为基流形, 以 $(F_i^{s_i}, g_{F_i})$ ($s_i > 1$) 为纤维, 卷积函数为 $f_i > 0$ 的多重卷积流形, $i = 1, 2, \dots, m$ 。假设对所有 $1 \leq i \neq k \leq m$, 有 $\nabla f_i \perp \nabla f_k$ 。则 $(M^n, g, \nabla \tilde{\varphi}, \tilde{h}, \tilde{\lambda})$ 是梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子当且仅当函数 f_i , λ , φ 满足以下条件

$${}^B \text{Ric} + h \nabla^2 \varphi = \lambda g_B + \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{f_i} \nabla^2 f_i, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} & -2\lambda h d\varphi - 2\nabla^2 \varphi (\nabla h, \cdot) + (2-n) d\lambda + h^2 d(|\nabla \varphi|^2) \\ & = h d \left(\Delta \varphi + \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{f_i} \nabla \varphi (f_i) \right) - \left(\Delta \varphi + \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{f_i} \nabla \varphi (f_i) \right) dh, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\mu_i = \lambda f_i^2 - h f_i \nabla \varphi (f_i) + f_i \Delta f_i + (s_i - 1) |\nabla f_i|^2, \quad (1.5)$$

$${}^{F_i} \text{Ric} = \mu_i g_{F_i}.$$

方程组(1.3)~(1.5)是多重卷积成为梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子的等价约束。它将整体孤立子张量条件按流

形结构进行分解: (1.3)对应基流形方向, (1.5)对应各纤维方向的 Einstein 常数, 即每个纤维为 Einstein 流形, (1.4)给出基-纤维之间的交叉相容性条件。综上, 要使多重卷积流形成为梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子, 基流形、各纤维、势函数以及全部卷积函数必须同时满足上述互不独立的几何方程。

注 1.1 考虑多重卷积流形 (M^n, g) 是梯度 Ricci 孤立子或者梯度近 Ricci 孤立子时, 定理 1.1 包含了文献[12]中定理 3.8、文献[14]中定理 1 作为其特殊情形。

特别地, 若取 m 个卷积函数 f_i 都相同, 记为 f , 则可得如下推论。

推论 1.1 设 (M^n, g) 是以 (B^r, g_B) 为基流形, 以 $(F_i^{s_i}, g_{F_i}) (i=1, 2, \dots, m)$ 为纤维, 卷积函数均为 $f > 0$ 的多重卷积流形, 设 $s_i > 1$ 。则 $(M^n, g, \nabla \tilde{\varphi}, \tilde{h}, \tilde{\lambda})$ 是梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子当且仅当函数 f, λ, φ 满足以下条件

$${}^B \text{Ric} + h \nabla^2 \varphi = \lambda g_B + \frac{S}{f} \nabla^2 f, \quad (1.6)$$

$$-2\lambda h d\varphi - 2\nabla^2 \varphi(\nabla h, \cdot) + (2-n)d\lambda + h^2 d(|\nabla \varphi|^2) = h d \left(\Delta \varphi + \frac{S}{f} \nabla \varphi(f) \right) - \left(\Delta \varphi + \frac{S}{f} \nabla \varphi(f) \right) dh, \quad (1.7)$$

$$\mu = \lambda f^2 - h f \nabla \varphi(f) + f \Delta f + (s-1)|\nabla f|^2, \quad (1.8)$$

$${}^{F_i} \text{Ric} = \mu g_{F_i}.$$

注 1.2 取 $B^r = \mathbb{R}^r$, $r \geq 3$, 其上度量定义为 $g_{ij} = e^{2\xi} \delta_{ij}$, 其中 $\xi = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ 。

如下取 B^r 上的函数

$$\begin{aligned} f(\xi) &= e^\xi, \quad h(\xi) = e^{-\xi}, \\ \varphi(\xi) &= C_1 e^{2\xi} + (s+r-2)e^\xi + C_2, \quad \lambda(\xi) = 2C_1 e^\xi, \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2 为常数。容易验证在 B^r 上(1.6)式和(1.7)式成立。此外, 由(1.8)式给出的常数 μ 为 $4-2r$ 。那么, 对于任意完备的 Einstein 流形 $F_i^{s_i}$, $(M^n = B^r \times_f F_1^{s_1} \times_f F_2^{s_2} \times \dots \times_f F_m^{s_m}, g, \nabla \tilde{\varphi}, \tilde{h}, \tilde{\lambda})$ 是梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子。当 $r=2$ 时, $\mu=0$, 那么对于任意完备的 Ricci 平坦黎曼流形 $F_i^{s_i}$, $(M^n = B^r \times_f F_1^{s_1} \times_f F_2^{s_2} \times \dots \times_f F_m^{s_m}, g, \nabla \tilde{\varphi}, \tilde{h}, \tilde{\lambda})$ 是梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子。

另一个问题是探究具有多重卷积结构的梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子的不存在性, 换句话说, 在什么条件下这样的孤立子退化为黎曼直积。如 Dutta 等[15]研究了多重卷积流形上梯度 Ricci 孤立子的不存在性, Günsen 等[14]将其推广到梯度近 Ricci 孤立子的情形。本文的第二个主要目的是研究多重卷积流形上梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子的不存在性, 得到如下定理。

定理 1.2 设 $(M^n = B^r \times_{f_1} F_1^{s_1} \times_{f_2} F_2^{s_2} \times \dots \times_{f_m} F_m^{s_m}, g, \nabla \tilde{\varphi}, \tilde{h}, \tilde{\lambda})$ 是具有卷积结构的非平凡梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子, $f_i > 0$, 且每个卷积函数 f_i 均可在基流形 B^r 上取得最大值与最小值, λ 是 B^r 上的光滑函数, $s_i > 1$ 。若下列条件之一成立:

1) 存在点 $q_i \in B^r$, 使得每个卷积函数 f_i 在 q_i 处取得最大值, 且 $\lambda(q_i) \leq \frac{\mu_i}{f_i(q_i)^2}$ (或存在点 $p_i \in B^r$,

使得每个卷积函数 f_i 在 p_i 处取得最小值, 且 $\lambda(p_i) \geq \frac{\mu_i}{f_i(p_i)^2}$), 其中 μ_i 为第 i 个纤维 $F_i^{s_i}$ 的 Einstein 常数;

2) $\lambda \leq 0$, 且 $\lambda(q_i) \leq \lambda(p_i)$, 其中 q_i, p_i 分别为 f_i 的最大值点与最小值点。

则所有卷积函数 f_i 恒为常数, 即 M^n 为黎曼直积流形。

注 1.3 只要卷积函数 f_i 在某一点取得最大值或最小值, 根据强极值原理就可以得到卷积函数 f_i 均为常数。

注 1.4 特别地, 当定理 1.2 中卷积函数都相同, 对于多重卷积流形上的梯度扩张或稳定 Ricci 孤立子, 定理 1.2 正是文献[12]中定理 3.6 的结果。实际上, 对于多重卷积结构的梯度近 Ricci 孤立子, 定理 1.2 也将文献[14]中定理 2 作为其特殊情况包含在内。

定理 1.3 设 $(M^n = B^r \times_{f_1} F_1^{s_1} \times_{f_2} F_2^{s_2} \times \cdots \times_{f_m} F_m^{s_m}, g, \nabla \tilde{\varphi}, \tilde{h}, \tilde{\lambda})$ 是卷积型的非平凡梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子, 其中纤维流形 $F_i^{s_i}$ 是连通的。若基流形 B^r 上的向量场 $\nabla \varphi, \nabla f_i$ 是共形向量场, 即存在 $\alpha, \beta_i \in C^\infty(B^r)$, 使得

$$\nabla^2 \varphi = \alpha g_B, \quad \nabla^2 f_i = \beta_i g_B,$$

$$d\beta_i = \frac{1}{m s_i} f_i (d(h\alpha) - d\lambda).$$

则 M^n 是具有黎曼直积结构的 Einstein 流形。

注 1.5 当 $(M^n = B^r \times_f F^s, g, \nabla \tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ 是卷积型梯度 Ricci 孤立子时, 定理 1.3 正是文献[16]中定理 2。

另外, 对于多重卷积流形 (M^n, g) 上的梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子, 当给基流形上的向量场施加条件, 定理 1.3 可以看作是文献[17]中定理 1.3 的推广。

2. 预备知识及引理

设 $(M^n = B^r \times_{f_1} F_1^{s_1} \times_{f_2} F_2^{s_2} \times \cdots \times_{f_m} F_m^{s_m}, g)$ 是卷积型梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子 (即满足 (1.2) 式)。若 $f_i (1 \leq i \leq m)$ 为常数, 则称 $(M^n, g, \nabla \tilde{\varphi}, \tilde{h}, \tilde{\lambda})$ 为具有多重黎曼积结构的梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子。

记卷积流形 M^n 到基流形 B^r 的投射为 π , 函数 $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi: M^n \rightarrow (0, +\infty)$ 称为函数 $\varphi: B^r \rightarrow (0, +\infty)$ 的提升。 B^r 上向量场 $X \in \mathcal{X}(B)$ 的提升 $\tilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ 称为水平提升, 水平提升的全体记为 $\mathcal{L}(B)$ 。同理, 纤维流形 $F_i^{s_i}$ 上向量场 $V \in \mathcal{X}(F_i)$ 的提升 $\tilde{V} \in \mathcal{X}(M)$ 称为垂直提升, 垂直提升的全体记为 $\mathcal{L}(F_i)$ 。

给定光滑实值函数 $\lambda: B^r \rightarrow \mathbb{R}$, 定义 $\tilde{\lambda} = \lambda \circ \pi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$, 即 λ 到 M^n 的提升。根据文献[18], 提升函数 $\tilde{\lambda}$ 的梯度是 λ 的梯度到 M^n 的提升, 即 $\pi_*(\nabla \tilde{\lambda}) = \nabla \lambda$ 。对于 $X \in \mathcal{X}(B)$, 在不会引起混淆时, 将使用相同的记号表示其水平提升 $X \in \mathcal{L}(B)$, 类似地对于 $V \in \mathcal{X}(F_i)$ 的垂直提升也使用相同记号。在下文中, 将用 Ric 表示 M^n 的 Ricci 张量, ${}^B \text{Ric}$ 表示 B^r 的 Ricci 张量 (或其提升), ${}^{F_i} \text{Ric}$ 表示 $F_i^{s_i}$ 的 Ricci 张量 (或其提升)。此外, 用 $\tilde{\lambda}$ 简化表示 $\lambda \circ \pi$ 。因此 $\tilde{\lambda}$ 在 M^n 度量下计算的梯度、Hessian 和 Laplace 分别记为 $\nabla \tilde{\lambda}$ 、 $\nabla^2 \tilde{\lambda}$ 、 $\Delta \tilde{\lambda}$ 。根据文献[18]可知, 对于所有 $X, Y \in \mathcal{L}(B)$, 有 $\nabla^2 \tilde{\lambda}(X, Y) = \nabla^2 \lambda(X, Y)$ 。

引理 2.1 ([19]) 设 (M^n, g) 是多重卷积流形。若 $X, Y \in \mathcal{L}(B)$, $V_i \in \mathcal{L}(F_i)$, $W_j \in \mathcal{L}(F_j)$ 。则

$$\text{i) } \text{Ric}(X, Y) = {}^B \text{Ric}(X, Y) - \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{f_i} \nabla^2 f_i(X, Y).$$

$$\text{ii) } \text{Ric}(X, V_i) = 0.$$

$$\text{iii) 当 } i \neq j \text{ 时, } \text{Ric}(V_i, W_j) = 0.$$

$$\text{iv) 当 } i = j \text{ 时,}$$

$$\text{Ric}(V_i, W_i) = {}^{F_i} \text{Ric}(V_i, W_i) - \left[\frac{\Delta f_i}{f_i} + (s_i - 1) \frac{|\nabla f_i|^2}{f_i^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m s_k \frac{g_B(\nabla f_i, \nabla f_k)}{f_i f_k} \right] g(V_i, W_i).$$

引理 2.2 ([20]) 设 Ric 和 S 分别是黎曼流形 M 的 Ricci 张量和数量曲率。则第二收缩 Bianchi 恒等式成立, 即有

$$dS = 2 \operatorname{div}(\text{Ric}). \quad (2.1)$$

类似文献[20]关于卷积的讨论, 下面引理的结论是在多重卷积流形上的自然推广。为阅读方便我们只给出简要证明思路, 具体细节可参照文献[19]和[20]。

引理 2.3 设 (M^n, g) 是多重卷积流形, 若 $V_i, Z_i \in \mathcal{L}(F_i)$, 且 $\tilde{\varphi} \in C^\infty(M)$, $\varphi, f_i \in C^\infty(B)$, $\nabla \varphi \in \mathcal{L}(B)$ 。则

- i) $\operatorname{div}(\nabla^2 \tilde{\varphi}) = \text{Ric}(\nabla \tilde{\varphi}, \cdot) + d(\Delta \tilde{\varphi})$.
- ii) $\frac{1}{2} d(|\nabla \tilde{\varphi}|^2) = \nabla^2 \tilde{\varphi}(\nabla \tilde{\varphi}, \cdot)$.
- iii) $\Delta \tilde{\varphi} = \Delta \varphi + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} \nabla \varphi(f_i)$, 其中 $\nabla \varphi(f_i) = g_B(\nabla f_i, \nabla \varphi)$.
- iv) $\nabla^2 \tilde{\varphi}(V_i, Z_i) = g\left(\frac{\nabla \tilde{\varphi}(f_i)}{f_i} V_i, Z_i\right) = f_i \nabla \varphi(f_i) g_{F_i}(V_i, Z_i)$.
- v) $d(\nabla \varphi(f_i)) = (\nabla^2 \varphi)(\nabla f_i, \cdot) + (\nabla^2 f_i)(\nabla \varphi, \cdot)$.

证明 由文献[20]知, 对于多重卷积流形, i)和 ii)式也是成立的。iii)式正是文献[19]中的命题 2.3。再由 $g(V_i, Z_i) = f_i^2 g_{F_i}$, iv)式得证。至于 v)式, 结合黎曼联络与度量的相容性以及 Hessian 算子的定义, 直接计算即可得到验证。

引理 2.4 ([21]) 设 (M^n, g) 是 n 维黎曼流形 ($n \geq 3$), $\varepsilon(\cdot) = \alpha \Delta(\cdot) + \beta \nabla u(\cdot) + \gamma$ 是 M^n 上的二阶椭圆算子。如果存在光滑函数 $f \in C^\infty(M)$, 使得在某一点 $p \in M^n$, $f(p) = \sup_M f := \tilde{M}$, 且 $\varepsilon(f) \leq 0$ (或者, 使得在某一点 $q \in M^n$, $f(q) = \inf_M f := \tilde{m}$, 且 $\varepsilon(f) \geq 0$), 则 $f = \tilde{M}$ (或者 $f = \tilde{m}$) 为常值函数, 其中 $\tilde{M}, \tilde{m}$ 分别表示 f 在 M^n 上的 p, q 点取得的极大值和极小值, $\alpha, \beta, \gamma, u \in C^\infty(M)$ 。

引理 2.5 设 $(M^n = B^r \times_{f_1} F_1^{S_1} \times_{f_2} F_2^{S_2} \times \cdots \times_{f_m} F_m^{S_m}, g)$ 是多重卷积流形。若 (B^r, g_B) 上光滑函数 f_i , λ , φ 满足(1.3)式和(1.4)式。则

$$\lambda f_i^2 + f_i \Delta f_i - h f_i \nabla \varphi(f_i) + (S_i - 1) |\nabla f_i|^2 = \text{常数}.$$

证明 记 S_B 为 B^r 的数量曲率, 由(2.1)式可得

$$\operatorname{div}({}^B \text{Ric}) = \frac{1}{2} dS_B. \quad (2.2)$$

为计算 dS_B , 对(1.3)式取迹得 $S_B = r\lambda + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} \Delta f_i - h \Delta \varphi$, 因此。

$$dS_B = rd\lambda - \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i^2} \Delta f_i df_i + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} d(\Delta f_i) - \Delta \varphi dh - hd(\Delta \varphi). \quad (2.3)$$

再来计算 $\operatorname{div}({}^B \text{Ric})$ 。由(1.3)式和引理 2.3 i)可得

$$\begin{aligned} \operatorname{div}({}^B \text{Ric}) &= d\lambda + \sum_{i=1}^m S_i \operatorname{div}\left(\frac{1}{f_i} \nabla^2 f_i\right) - \operatorname{div}(h \nabla^2 \varphi) \nabla^2 \tilde{\varphi}(V_i, Z_i) = g\left(\frac{\nabla \tilde{\varphi}(f_i)}{f_i} V_i, Z_i\right) \\ &= d\lambda + \sum_{i=1}^m S_i \left[\frac{1}{f_i} \operatorname{div}(\nabla^2 f_i) - \frac{1}{f_i^2} (\nabla^2 f_i)(\nabla f_i, \cdot) \right] - h \operatorname{div}(\nabla^2 \varphi) - (\nabla^2 \varphi)(\nabla h, \cdot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d\lambda + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} ({}^B \text{Ric})(\nabla f_i, \cdot) + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} d(\Delta f_i) - \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{2f_i^2} d(|\nabla f_i|^2) \\
&\quad - h({}^B \text{Ric})(\nabla \varphi, \cdot) - hd(\Delta \varphi) - (\nabla^2 \varphi)(\nabla h, \cdot).
\end{aligned}$$

由(1.3)式和引理 2.3 ii)可得

$$\begin{aligned}
({}^B \text{Ric})(\nabla f_i, \cdot) &= \lambda df_i + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{2f_i} d(|\nabla f_i|^2) - h(\nabla^2 \varphi)(\nabla f_i, \cdot), \\
({}^B \text{Ric})(\nabla \varphi, \cdot) &= \lambda d\varphi + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} (\nabla^2 f_i)(\nabla \varphi, \cdot) - \frac{1}{2} hd(|\nabla \varphi|^2).
\end{aligned}$$

另外, 由引理 2.3 v)可知

$$d(\nabla \varphi(f_i)) = (\nabla^2 \varphi)(\nabla f_i, \cdot) + (\nabla^2 f_i)(\nabla \varphi, \cdot).$$

以上三式代入前式得

$$\begin{aligned}
\text{div}({}^B \text{Ric}) &= d\lambda + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} \lambda df_i + \sum_{i=1}^m \frac{S_i(S_i-1)}{2f_i^2} d(|\nabla f_i|^2) + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} d(\Delta f_i) \\
&\quad - h \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} d(\nabla \varphi(f_i)) - h \left(\lambda d\varphi - \frac{1}{2} hd(|\nabla \varphi|^2) \right) - hd(\Delta \varphi) - (\nabla^2 \varphi)(\nabla h, \cdot).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

将(2.3)式和(2.4)式代入(2.2)式, 得到

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{2-r}{2} d\lambda + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{2f_i^2} \Delta f_i df_i + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{2f_i} d(\Delta f_i) + \frac{1}{2} \Delta \varphi dh - \frac{1}{2} hd(\Delta \varphi) \\
&\quad - (\nabla^2 \varphi)(\nabla h, \cdot) + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} \left(\lambda df_i + \frac{S_i-1}{2f_i} d(|\nabla f_i|^2) - hd(\nabla \varphi(f_i)) \right) \\
&\quad - h \left(\lambda d\varphi - \frac{1}{2} hd(|\nabla \varphi|^2) \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

给(2.5)式两边同乘以 $\sum_{i=1}^m \frac{2f_i^2}{S_i}$, 直接验证有

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^m \frac{2-r}{S_i} f_i^2 d\lambda + \sum_{i=1}^m \Delta f_i df_i + \sum_{i=1}^m f_i d(\Delta f_i) + \sum_{i=1}^m \frac{f_i^2}{S_i} \Delta \varphi dh - \sum_{i=1}^m \frac{f_i^2}{S_i} hd(\Delta \varphi) \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \frac{2}{S_i} f_i^2 (\nabla^2 \varphi)(\nabla h, \cdot) + \sum_{i=1}^m 2f_i \left(\lambda df_i + \frac{S_i-1}{2f_i} d(|\nabla f_i|^2) - hd(\nabla \varphi(f_i)) \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \frac{2}{S_i} f_i^2 h \left(\lambda d\varphi - \frac{1}{2} hd(|\nabla \varphi|^2) \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{2-r}{S_i} f_i^2 d\lambda + \sum_{i=1}^m d(f_i \Delta f_i) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{S_i} f_i^2 (\Delta \varphi dh - hd(\Delta \varphi)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \frac{2}{S_i} f_i^2 ((\nabla^2 \varphi)(\nabla h, \cdot) + h\lambda d\varphi) + \sum_{i=1}^m 2f_i \left(\lambda df_i + \frac{S_i-1}{2f_i} d(|\nabla f_i|^2) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^m \frac{2f_i^2}{S_i} hd(\nabla \varphi(f_i)) \right) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{S_i} f_i^2 h^2 d(|\nabla \varphi|^2).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

将(2.6)式中的 $(\nabla^2 \varphi)(\nabla h, \cdot) + h\lambda d\varphi$ 用(1.4)式替换, 进一步得到

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^m f_i^2 d\lambda + \sum_{i=1}^m d(f_i \Delta f_i) - \sum_{i=1}^m h \nabla \varphi(f_i) df_i - \sum_{i=1}^m f_i d(h \nabla \varphi(f_i)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m 2f_i \left(\lambda df_i + \frac{s_i - 1}{2f_i} d(|\nabla f_i|^2) \right) \\
&= \sum_{i=1}^m d \left(\lambda f_i^2 + f_i \Delta f_i - h f_i \nabla \varphi(f_i) + (s_i - 1) |\nabla f_i|^2 \right).
\end{aligned}$$

这就完成了引理 2.5 的证明。 $\square$

3. 主要定理的证明

定理 1.1 的证明 先证必要性。对任意 $X, Y \in \mathcal{L}(B)$ 有

$$\nabla^2 \tilde{\varphi}(X, Y) = \nabla^2 \varphi(X, Y).$$

由引理 2.1 i) 和 (1.2) 式得

$$\begin{aligned}
{}^B \text{Ric}(X, Y) - \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} \nabla^2 f_i(X, Y) &= \text{Ric}(X, Y) \\
&= \tilde{\lambda} g(X, Y) - \tilde{h} \nabla^2 \tilde{\varphi}(X, Y) \\
&= \lambda g_B(X, Y) - h \nabla^2 \varphi(X, Y).
\end{aligned}$$

(1.3) 式得证。

对 (1.2) 式取迹, 有 $S = n\tilde{\lambda} - \tilde{h}\Delta\tilde{\varphi}$ 。再对 (1.2) 式求散度, 结合引理 2.3 和 (2.1) 式有

$$\begin{aligned}
0 &= \text{div Ric} + \text{div}(\tilde{h} \nabla^2 \tilde{\varphi}) - \text{div}(\tilde{\lambda} g) \\
&= \frac{1}{2} d(n\tilde{\lambda} - \tilde{h}\Delta\tilde{\varphi}) + \tilde{h} \text{div}(\nabla^2 \tilde{\varphi}) + \nabla^2 \tilde{\varphi}(\nabla \tilde{h}, \cdot) - d\tilde{\lambda} \\
&= \frac{n-2}{2} d\tilde{\lambda} - \frac{1}{2} d(\tilde{h}\Delta\tilde{\varphi}) + \tilde{h}(\text{Ric}(\nabla \tilde{\varphi}, \cdot) + d(\Delta\tilde{\varphi})) + \nabla^2 \tilde{\varphi}(\nabla \tilde{h}, \cdot) \\
&= \frac{n-2}{2} d\tilde{\lambda} - \frac{1}{2} d(\tilde{h}\Delta\tilde{\varphi}) + \tilde{h} \left(\tilde{\lambda} d\tilde{\varphi} - \frac{1}{2} \tilde{h} d(|\nabla \tilde{\varphi}|^2) + d(\Delta\tilde{\varphi}) \right) + \nabla^2 \tilde{\varphi}(\nabla \tilde{h}, \cdot) \\
&= (2-n) d\tilde{\lambda} + d(\tilde{h}\Delta\tilde{\varphi}) - 2\tilde{h} d(\Delta\tilde{\varphi}) + \tilde{h}^2 d(|\nabla \tilde{\varphi}|^2) - 2\tilde{h}\tilde{\lambda} d\tilde{\varphi} - 2\nabla^2 \tilde{\varphi}(\nabla \tilde{h}, \cdot).
\end{aligned}$$

此外, 由引理 2.3 iii) 有

$$\Delta \tilde{\varphi} = \Delta \varphi + \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} \nabla \varphi(f_i), \quad \nabla \tilde{\varphi} = \widetilde{\nabla \varphi}.$$

代入前式简化即证得 (1.4) 式。

最后证明 (1.5) 式。由引理 2.3 iv)、引理 2.1 iv) 及 (1.2) 式, 有

$$\begin{aligned}
{}^{F_i} \text{Ric}(V_i, W_i) &- \left[\frac{\Delta f_i}{f_i} + (s_i - 1) \frac{|\nabla f_i|^2}{f_i^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{S_k g_B(\nabla f_i, \nabla f_k)}{f_i f_k} \right] g(V_i, W_i) \\
&= \text{Ric}(V_i, W_i) \\
&= \tilde{\lambda} g(V_i, W_i) - \tilde{h} \nabla^2 \tilde{\varphi}(V_i, W_i) \\
&= (\lambda f_i^2 - h f_i \nabla \varphi(f_i)) g_{F_i}(V_i, W_i).
\end{aligned}$$

对任意 $V_i, W_i \in \mathcal{L}(F_i)$, $\nabla \varphi \in \mathcal{L}(B)$

$$\nabla^2 \tilde{\varphi}(V_i, W_i) = f_i \nabla \varphi(f_i) g_{F_i}(V_i, W_i),$$

$$g(V_i, W_i) = f_i^2 g_{F_i}(V_i, W_i).$$

结合假设条件 $\nabla f_i \perp \nabla f_k$ (当 $i \neq k$ 时), 因此

$${}^{F_i} \text{Ric}(V_i, W_i) = \mu_i g_{F_i}(V_i, W_i).$$

其中, 由引理 2.5 可知 $\mu_i = \lambda f_i^2 - h f_i \nabla \varphi(f_i) + f_i \Delta f_i + (s_i - 1) |\nabla f_i|^2$ 为常数. (1.5) 式得证. 从而必要性得证.

下证充分性. 因由 (1.5) 式给出的 μ_i 都是常数, 取完备 Einstein 流形 $(F_i^{s_i}, g_{F_i})$, 其 Ricci 张量为

${}^{F_i} \text{Ric} = \mu_i g_{F_i}$. 考虑卷积流形 $B^r \times F_1^{s_1} \times F_2^{s_2} \times \cdots \times F_m^{s_m}$, 其度量张量为

$$g = \pi^* g_B + \sum_{i=1}^m (f_i \circ \pi)^2 \sigma_i^* g_{F_i}$$

若 $X, Y \in \mathcal{L}(B)$, 则 $\nabla^2 \tilde{\varphi}(X, Y) = \nabla^2 \varphi(X, Y)$, 且 $g(X, Y) = g_B(X, Y)$. 结合引理 2.1 i) 和 (1.3) 式, 得到

$$\text{Ric}(X, Y) + \tilde{h} \nabla^2 \tilde{\varphi}(X, Y) = \tilde{\lambda} g(X, Y).$$

这意味着任意 $X, Y \in \mathcal{L}(B)$ 满足梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子方程。

若 $X \in \mathcal{L}(B)$ 和 $V_i \in \mathcal{L}(F_i)$, 则 $\nabla^2 \tilde{\varphi}(X, V_i) = 0$, $g(X, V_i) = 0$. 并且由引理 2.1 ii) 和 (1.3) 式, 有 $\text{Ric}(X, V_i) = 0$. 所以, 对任意 $X \in \mathcal{L}(B)$ 和 $V_i \in \mathcal{L}(F_i)$, 梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子方程也满足。

若 $V_i, Z_i \in \mathcal{L}(F_i)$, 则 $g(V_i, Z_i) = f_i^2 g_{F_i}(V_i, Z_i)$, 并且由 (1.5) 式和引理 2.1 iv), 有

$$\begin{aligned} \text{Ric}(V_i, Z_i) &= {}^{F_i} \text{Ric}(V_i, Z_i) - \left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + (s_i - 1) \frac{|\nabla f_i|^2}{f_i^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{s_k g_B(\nabla f_i, \nabla f_k)}{f_i f_k} \right) g(V_i, Z_i) \\ &= \mu_i g_{F_i}(V_i, Z_i) - \left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + (s_i - 1) \frac{|\nabla f_i|^2}{f_i^2} f_i^2 \right) g_{F_i}(V_i, Z_i) \\ &= \left(\lambda f_i^2 + f_i \Delta f_i - h f_i \nabla \varphi(f_i) + (s_i - 1) |\nabla f_i|^2 \right) g_{F_i}(V_i, Z_i) - \left(f_i \Delta f_i + (s_i - 1) |\nabla f_i|^2 \right) g_{F_i}(V_i, Z_i) \\ &= \left(\lambda f_i^2 - h f_i \nabla \varphi(f_i) \right) g_{F_i}(V_i, Z_i). \end{aligned} \quad (3.1)$$

另一方面,

$$\nabla^2 \tilde{\varphi}(V_i, Z_i) = f_i \nabla \varphi(f_i) g_{F_i}(V_i, Z_i). \quad (3.2)$$

结合 (3.1) 式和 (3.2) 式, 有

$$\text{Ric}(V_i, Z_i) + \tilde{h} \nabla^2 \tilde{\varphi}(V_i, Z_i) = \tilde{\lambda} g(V_i, Z_i).$$

于是, 对任意 $V_i, Z_i \in \mathcal{L}(F_i)$, 梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子方程也满足。

综合上述三种情形即完成了充分性的证明. 定理 1.1 证毕. $\square$

定理 1.2 的证明 首先需要证明 f_i 是常数. 考虑如下椭圆算子

$$\varepsilon_i(\cdot) := \Delta(\cdot) - h \nabla \varphi(\cdot) + \frac{s_i - 1}{f_i} \nabla f_i(\cdot).$$

由于多重卷积流形 $(M = B^r \times_{f_1} F_1^{s_1} \times_{f_2} F_2^{s_2} \times \cdots \times_{f_m} F_m^{s_m}, g, \nabla \tilde{\varphi}, \tilde{h}, \tilde{\lambda})$ 是梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子, 根据定理 1.1, (1.5) 式可以等价地写为

$$\varepsilon_i(f_i) = \Delta f_i - h \nabla \varphi(f_i) + \frac{s_i - 1}{f_i} |\nabla f_i|^2 = \frac{\mu_i - \lambda f_i^2}{f_i}. \quad (3.3)$$

1) 若 f_i 在 q_i 处取得最大值且 $\lambda(q_i) \leq \frac{\mu_i}{f_i(q_i)^2}$, 则 $\varepsilon_i(f_i(q_i)) = \frac{\mu_i - \lambda f_i(q_i)^2}{f_i(q_i)} \geq 0$ 。若 f_i 在 p_i 处取得最小值且 $\lambda(p_i) \geq \frac{\mu_i}{f_i(p_i)^2}$, 则 $\varepsilon_i(f_i(p_i)) = \frac{\mu_i - \lambda f_i(p_i)^2}{f_i(p_i)} \leq 0$ 。由引理 2.4 可知 f_i 是常数。

2) 设 $q_i, p_i \in B^r$ 分别是 f_i 的公共最大值点和最小值点, 则

$$\nabla f_i(q_i) = 0 = \nabla f_i(p_i), \quad \Delta f_i(q_i) \leq 0 \leq \Delta f_i(p_i).$$

由于 $f_i > 0$ 且 $\lambda(q_i) \leq \lambda(p_i)$, 有

$$-\lambda(q_i) f_i^2(q_i) \geq -\lambda(p_i) f_i^2(p_i).$$

由(3.3)式, 在 q_i 和 p_i 点分别有

$$f_i(q_i) \Delta f_i(q_i) = \mu_i - \lambda(q_i) f_i^2(q_i), \quad f_i(p_i) \Delta f_i(p_i) = \mu_i - \lambda(p_i) f_i^2(p_i).$$

因此,

$$0 \geq f_i(q_i) \Delta f_i(q_i) = \mu_i - \lambda(q_i) f_i^2(q_i) \geq \mu_i - \lambda(p_i) f_i^2(p_i) = f_i(p_i) \Delta f_i(p_i) \geq 0.$$

从而,

$$\mu_i - \lambda(q_i) f_i^2(q_i) = \mu_i - \lambda(p_i) f_i^2(p_i) = 0. \quad (3.4)$$

(i) 当 $\lambda(q_i) \neq 0$ 时, (3.4)式暗含 $\lambda(p_i) \neq 0$, 即

$$\lambda(q_i) f_i^2(q_i) = \lambda(p_i) f_i^2(p_i).$$

由于 $\lambda(q_i) \leq \lambda(p_i) < 0$, 得到

$$f_i^2(q_i) = \frac{\lambda(p_i)}{\lambda(q_i)} f_i^2(p_i) \leq f_i^2(p_i).$$

所以 $f_i(q_i) = f_i(p_i)$, 即 f_i 是常数。

(ii) 当 $\lambda(q_i) = 0$ 时, 由(3.4)式得 $\lambda(p_i) = 0$, 且 $\mu_i = 0$. 于是(3.3)式变为

$$\varepsilon_i(f_i) = \Delta f_i - h \nabla \varphi(f_i) + \frac{s_i - 1}{f_i} |\nabla f_i|^2 = -\lambda f_i \geq 0.$$

由引理 2.4 可知 f_i 是常数。定理 1.2 证毕。□

几何机制: 卷积函数极值点处纤维形变的一阶效应消失, 孤立子方程对曲率与孤立子函数 λ 施加的代数约束无法与非常数卷积函数共存, 迫使每个卷积函数在基流形上为常数, 多重卷积结构退化为黎曼直积。

定理 1.3 的证明 首先证明 f_i 为常数。由引理 2.1(i), (1.2)式和 $\nabla^2 \varphi = \alpha g_B$ 得

$$\begin{aligned} {}^B \text{Ric}(X, Y) - \sum_{i=1}^m \frac{S_i}{f_i} \nabla^2 f_i(X, Y) &= \text{Ric}(X, Y) \\ &= \tilde{\lambda} g(X, Y) - \tilde{h} \nabla^2 \tilde{\varphi}(X, Y) \\ &= \lambda g_B(X, Y) - h \nabla^2 \varphi(X, Y) \\ &= \lambda g_B(X, Y) - h \alpha g_B(X, Y) \\ &= (\lambda - h \alpha) g_B(X, Y). \end{aligned} \quad (3.5)$$

再者, 对任意 $X, Y \in \mathcal{L}(B)$, 成立有 $\nabla^2 \tilde{\varphi}(X, Y) = \nabla^2 \varphi(X, Y)$ 。因此, 由(3.5)式和 $\nabla^2 f_i = \beta_i g_B$ 可得

$${}^B \text{Ric} = \left(\lambda - h\alpha + \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{f_i} \beta_i \right) g_B. \quad (3.6)$$

对(3.6)式取迹, 得

$$S_B = r \left(\lambda - h\alpha + \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{f_i} \beta_i \right). \quad (3.7)$$

此外, 由 $d\beta_i = \frac{1}{m} \frac{f_i}{s_i} (d(h\alpha) - d\lambda)$, $\text{div}({}^B \text{Ric}) - \frac{1}{2} dS_B = 0$, 结合(3.6)式与(3.7)式知

$$df_i = \frac{1}{m} \frac{f_i}{\beta_i} \left(md\beta_i - \frac{f_i}{s_i} (d(h\alpha) - d\lambda) \right) = 0.$$

因此, B' 是 Ricci 平坦的且 f_i 是常数。

由引理 2.1 iv), (1.2)式和(1.5)式, 有

$${}^{F_i} \text{Ric}(V_i, Z_i) = \left(\lambda f_i^2 - hf_i \nabla \varphi(f_i) + f_i \Delta f_i + (s_i - 1) |\nabla f_i|^2 \right) g_{F_i}(V_i, Z_i).$$

对任意的 $V_i, Z_i \in \mathcal{L}(F_i)$, 有 $\nabla^2 \tilde{\varphi}(V_i, Z_i) = f_i \nabla \varphi(f_i) g_{F_i}(V_i, Z_i)$ 。由于 f_i 是常数, 可得 ${}^{F_i} \text{Ric} = \lambda f_i^2 g_{F_i}$ 。另一方面, 由定理 1.1 可知 $F_i^{s_i}$ 是 Einstein 流形, 因此 λ 也是常数。从而, M^n 是具有黎曼乘积结构的 Einstein 流形。定理 1.3 得证。□

几何机制: 基流形上的共形条件将孤立子方程化为代数曲率关系, 该关系与 Bianchi 恒等式构成的约束系统, 仅在卷积函数恒为常数时可解, 故多重卷积退化为黎曼直积。同时势函数的共形使基流形为 Einstein, 纤维流形亦满足 Einstein 条件, 全空间呈现 Einstein 直积结构。

4. 结论与展望

本文主要研究多重卷积流形上非平凡梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子的不存在性结果。首先推导出多重卷积成为梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子的等价方程组, 得到定理 1.1 的充要条件; 接着, 定理 1.2 利用卷积函数的最值点, 结合强极值原理得到不存在性结果; 最后, 定理 1.3 在共形向量场条件下, 得到另一组不存在性结论, 证明满足条件的非平凡多重卷积孤立子必然退化为黎曼直积 Einstein 流形。

本文结果将文献[17]的不存在性结论推广到多重卷积流形上的梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子, 部分已有文献结果可作为本文定理的特例。本研究仍存在值得进一步探究的问题:

1、在更一般的前提下讨论多重卷积梯度 $\tilde{h}$ -近 Ricci 孤立子的不存在性结果;

2、在不引入共形向量场的假设下, 进一步分析方程组(1.3)~(1.5)的解空间, 寻找非平凡多重卷积例子或者证明对应的非存在性。

基金项目

国家自然科学基金项目(12161078), 甘肃省基础研究创新群体项目(24JRRA778)。

参考文献

- [1] Hamilton, R.S. (1982) Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature. *Journal of Differential Geometry*, **17**, 255-306. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214436922>
- [2] Pigola, S., Rigoli, M., Rimoldi, M. and Setti, A. (2011) Ricci Almost Solitons. *Annali Scuola Normale Superiore—Classe Di Scienze*, **10**, 757-799. <https://doi.org/10.2422/2036-2145.2011.4.01>

- [3] Gomes, J.N., Wang, Q. and Xia, C. (2017) On the H-Almost Ricci Soliton. *Journal of Geometry and Physics*, **114**, 216-222. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.12.010>
- [4] Ünal, B. (2000) Multiply Warped Products. *Journal of Geometry and Physics*, **34**, 287-301. [https://doi.org/10.1016/S0393-0440\(99\)00072-8](https://doi.org/10.1016/S0393-0440(99)00072-8)
- [5] Akés, L.A., Flores, J.L. and Herrera, J. (2018) Causality and C-Completion of Multiwarped Spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, **35**, Article 035014. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa9ad0>
- [6] Kim, D.S. and Kim, Y.H. (2003) Compact Einstein Warped Product Spaces with Nonpositive Scalar Curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **131**, 2573-2576. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-03-06878-3>
- [7] Ehrlich, P.E., Kim, S. and Yoon-Tae, J. (1996) Constant Scalar Curvatures on Warped Product Manifolds. *Tsukuba Journal of Mathematics*, **20**, 239-256. <https://doi.org/10.21099/tkbjm/1496162996>
- [8] Alías, L.J., Romero, A. and Sánchez, M. (1997) Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature and Calabi-Bernstein Type Problems. *Tohoku Mathematical Journal*, **49**, 337-345. <https://doi.org/10.2748/tmj/1178225107>
- [9] Chow, B., Chu, S.C., Glickenstein, D., *et al.* (2007) The Ricci Flow: Techniques and Applications. Part I. American Mathematical Society.
- [10] De Sousa, M.L. and Pina, R. (2017) Gradient Ricci Solitons with Structure of Warped Product. *Results in Mathematics*, **71**, 825-840. <https://doi.org/10.1007/s00025-016-0583-2>
- [11] Feitosa, F.E.S., Filho, A.A.F., Gomes, J.N.V. and Pina, R.S. (2019) Gradient Ricci Almost Soliton Warped Product. *Journal of Geometry and Physics*, **143**, 22-32. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2019.05.003>
- [12] Karaca, F. and Özgür, C. (2018) Gradient Ricci Solitons on Multiply Warped Product Manifolds. *Filomat*, **32**, 4221-4228. <https://doi.org/10.2298/fil1812221k>
- [13] Shen, D. (2022) Gradient Ricci Almost Solitons on Multiply Warped Product Manifolds. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, **60**, 261-268.
- [14] Günsen, S. and Onat, L. (2011) Gradient Almost Ricci Solitons on Multiply Warped Product Manifolds. *Carpathian Mathematical Publications*, **13**, 386-394. <https://doi.org/10.15330/cmp.13.2.386-394>
- [15] Dutta, T., Pahan, S., Chen, X. and Bhattacharyya, A. (2023) On Multiply Warped Product Gradient Ricci Soliton. *Zurnal matematicheskoy fiziki, analiza, geometrii*, **19**, 603-615. <https://doi.org/10.15407/mag19.03.603>
- [16] Günsen, S., Onat, L. and Kaya, D.A. (2019) The Warped Product Manifold as a Gradient Ricci Soliton and Relation to Its Components. *Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences*, **72**, 1015-1023.
- [17] Shen, D. and Liu, J. (2025) Gradient $\tilde{h}$ -Almost Ricci Solitons on Warped Product Manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 207, Article 105325.
- [18] O'Neill, B. (1983) Semi-Riemannian Geometry. Academic Press.
- [19] Dobarro, F. and Ünal, B. (2005) Curvature of Multiply Warped Products. *Journal of Geometry and Physics*, **55**, 75-106. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2004.12.001>
- [20] Feitosa, F.E.S., Freitas Filho, A.A. and Gomes, J.N.V. (2017) On the Construction of Gradient Ricci Soliton Warped Product. *Nonlinear Analysis*, **161**, 30-43. <https://doi.org/10.1016/j.na.2017.05.013>
- [21] Pucci, P. and Serrin, J. (2004) The Strong Maximum Principle Revisited. *Journal of Differential Equations*, **196**, 1-66. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.05.001>