

低维泊松流形上Casimir函数的符号计算与可积性分析

陈丹露

景德镇陶瓷大学信息工程学院, 江西 景德镇

收稿日期: 2026年7月27日; 录用日期: 2026年8月24日; 发布日期: 2026年9月8日

摘要

本文研究低维泊松流形上Casimir函数的符号计算及其在完全可积性分析中的应用。对给定的泊松双向量 $\pi = \frac{1}{2} \pi^{ij}(x) \partial_i \wedge \partial_j$, Casimir函数 C 满足线性偏微分方程组 $\pi^{ij} \partial_j C = 0$ 。利用计算机代数系统符号求解该方程组, 获得函数独立的Casimir函数, 从而确定泊松流形的辛叶结构。在此基础上, 给出低维情形 ($\dim M \leq 4$) 下基于Casimir函数的Liouville可积性判据: 若 $\text{rank } \pi = 2r$, 则最大独立对合首次积分为 $\dim M - r$ 。分别讨论二维、三维及四维泊松流形的典型例子, 展示符号计算推导过程与可积性分析细节。

关键词

泊松流形, Casimir函数, 符号计算, Liouville可积性, 辛叶分解

Symbolic Computation of Casimir Functions and Integrability Analysis on Low-Dimensional Poisson Manifolds

Danlu Chen

School of Information Engineering, Jingdezhen Ceramic University, Jingdezhen Jiangxi

Received: July 27, 2026; accepted: August 24, 2026; published: September 8, 2026

Abstract

This paper investigates the symbolic computation of Casimir functions on low-dimensional Poisson

manifolds and its application to complete integrability analysis. For a given Poisson bivector $\pi = \frac{1}{2} \pi^{ij}(x) \partial_i \wedge \partial_j$, the Casimir functions C are determined by the linear PDE system $\pi^{ij} \partial_j C = 0$. By symbolically solving this system using computer algebra, functionally independent Casimir functions are obtained, revealing the symplectic foliation of the manifold. A Liouville integrability criterion in low dimensions ($\dim M \leq 4$) is established based on the Casimir functions: if $\text{rank} \pi = 2r$, then the maximal number of independent involutive first integrals is $\dim M - r$. Typical examples in two, three, and four dimensions are discussed in great detail, with explicit symbolic computations and integrability analysis.

Keywords

Poisson Manifold, Casimir Function, Symbolic Computation, Liouville Integrability, Symplectic Foliation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

泊松流形为经典力学和可积系统理论提供了自然的几何框架[1]-[3]。设 M 为 m 维光滑流形，其上的泊松结构由双向量 $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ 定义，满足 Schouten-Nijenhuis 括号恒等式 $[\pi, \pi] = 0$ 。Casimir 函数是辛叶上的常值函数，其个数直接决定了泊松流形的秩和辛叶的余维数。通过求解线性偏微分方程组 $\pi^{ij} \partial_j C = 0$ 获得 Casimir 函数，是分析泊松流形结构的关键步骤。

近几十年来，符号计算被成功应用于李代数 Casimir 不变量及泊松结构的计算[4][5]，但这些工作多侧重于代数不变量的构造。本文旨在将符号计算与低维泊松流形的 Liouville 可积性分析直接结合：基于 Casimir 函数的符号求解，确定流形的辛叶分解，进而给出可积性判据，并提供一种从局部泊松矩阵到全局可积性分析的统一计算框架。

2. 预备知识：泊松流形与 Casimir 函数

设局部坐标 $(x^1, \dots, x^m)$ ，泊松括号定义为[1][3]

$$\{f, g\} = \pi^{ij}(x) \partial_i f \partial_j g, \pi^{ij} + \pi^{ji} = 0,$$

双向量 π 的系数矩阵 $\Pi(x) = (\pi^{ij}(x))$ 为反对称矩阵。Jacobi 恒等式等价于偏微分方程

$$\pi^{i\ell} \partial_\ell \pi^{jk} + \pi^{j\ell} \partial_\ell \pi^{ki} + \pi^{k\ell} \partial_\ell \pi^{ij} = 0, \forall i, j, k.$$

定义 2.1 (Casimir 函数) 光滑函数 $C \in C^\infty(M)$ 称为 Casimir 函数，若

$$\{C, f\} = 0, \forall f \in C^\infty(M),$$

等价于

$$\pi^{ij} \partial_j C = 0, i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

记映射 $\pi^\# : T^*M \rightarrow TM$ ， $\pi^\#(\alpha) = \pi(\alpha, \cdot)$ ，其局部矩阵为 (π^{ij}) 。则 C 为 Casimir 函数当且仅当 $dC \in \ker \pi^\#$ 。设 $\text{rank} \pi(x) = 2r$ 在稠密开集上为常数，则函数独立的 Casimir 函数个数为

$$k = m - 2r. \quad (2)$$

3. Casimir 函数的符号计算

给定泊松矩阵 $\Pi(x) = (\pi^{ij}(x))_{m \times m}$ ，求解(1)的符号流程如下：

算法 3.1 (Casimir 函数符号计算) [5]

1. 输入反对称矩阵 $\Pi(x)$ 。
2. 计算秩 $r = \frac{1}{2} \text{rank } \Pi$ (选取一般点)。
3. 构造线性偏微分方程组：

$$\sum_{j=1}^m \pi^{ij} \partial_j C = 0, i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

4. 采用特征线法或 Gröbner 基消去法求独立首次积分。在 Maple 中可利用 PDEtools:-pdsolve 直接求解。
5. 输出 $k = m - 2r$ 个函数独立的解 $C_1, \dots, C_k$ ，即为 Casimir 函数。

4. 低维泊松流形的可积性分析

给定哈密顿函数 H ，运动方程为 $\dot{x}^i = \pi^{ij} \partial_j H$ 。记辛叶 Σ 为 Casimir 函数的公共水平集[3]， $\dim \Sigma = 2r$ 。

定义 4.1 (Liouville 可积性[6] [7])系统 (M, π, H) 称为 Liouville 可积，若存在函数 $F_1, \dots, F_N \in C^\infty(M)$ 满足：

$$\{F_i, F_j\} = 0, dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N \neq 0, N = m - r.$$

注 4.2 因 Casimir 函数提供了 $k = m - 2r$ 个对合独立首次积分，故只需在辛叶上再找 r 个与 Casimir 对合且彼此对合的独立函数(其一可取 H 自身)。

对低维情形分类如下表 1：

Table 1. Integrability conditions of low-dimensional Poisson manifolds

表 1. 低维泊松流形的可积性条件

$\dim M$	$\text{rank } \pi$	r	k	可积性条件
2	2	1	0	H 即为守恒量，平凡可积
3	2	1	1	任意 H 与 Casimir 对合， $N = 2$ ，可积
4	2	1	2	任意 H 与两个 Casimir 对合， $N = 3$ ，超可积

5. 实例的详细计算与分析

5.1. 二维辛流形($\dim M = 2, r = 1, k = 0$)

取 $M = \mathbb{R}^2$ ，坐标 (x, y) ，标准辛结构由双向量

$$\pi = \partial_x \wedge \partial_y$$

给出，泊松矩阵

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程组(1)化为

$$\begin{cases} \pi^{11}\partial_x C + \pi^{12}\partial_y C = 0 \cdot \partial_x C + 1 \cdot \partial_y C = 0, \\ \pi^{21}\partial_x C + \pi^{22}\partial_y C = (-1)\partial_x C + 0 \cdot \partial_y C = 0, \end{cases} \Rightarrow \partial_y C = 0, \partial_x C = 0.$$

积分得 $C(x, y) = \text{const}$ ，故无非平凡 Casimir 函数， $k = 0$ 。辛叶即为全空间 $\mathbb{R}^2$ 。

对任意哈密顿函数 $H(x, y)$ ，运动方程

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

显然 H 自身是首次积分： $\dot{H} = H_x \dot{x} + H_y \dot{y} = H_x H_y + H_y (-H_x) = 0$ 。因 $N = m - r = 1$ ，系统 Liouville 可积。

5.2. 三维 $\mathfrak{so}(3)^*$ 泊松结构 ($\dim M = 3, r = 1, k = 1$)

取 $M = \mathbb{R}^3(x, y, z)$ ，Lie-Poisson 结构对应李代数 $\mathfrak{so}(3)$ ，双向量

$$\pi = z \partial_x \wedge \partial_y + x \partial_y \wedge \partial_z + y \partial_z \wedge \partial_x,$$

泊松矩阵为

$$\Pi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2.1. Casimir 函数的符号推导

方程组(1)具体写为

$$\begin{cases} zC_y - yC_z = 0, \\ -zC_x + xC_z = 0, \\ yC_x - xC_y = 0. \end{cases} \quad (4)$$

使用特征线法。从第一式得

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{-y} \Rightarrow y dy + z dz = 0 \Rightarrow d\left(\frac{y^2 + z^2}{2}\right) = 0,$$

故得首次积分 $\varphi_1 = y^2 + z^2$ 。从第二式得

$$\frac{dx}{-z} = \frac{dz}{x} \Rightarrow x dx + z dz = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x^2 + z^2}{2}\right) = 0,$$

给出 $\varphi_2 = x^2 + z^2$ 。第三式 $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$ 等价于 $x dx + y dy = 0$ ，得 $\varphi_3 = x^2 + y^2$ ，但与 φ_1, φ_2 函数相关：

$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 - 2z^2$ 非独立。由 φ_1, φ_2 消去 z^2 可得

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi_2 + \varphi_1 - z^2 + z^2 = \varphi_1 + \varphi_2$$

实际上 $\varphi_1 + \varphi_2 = x^2 + y^2 + 2z^2$ 。更直接地，由 $\varphi_1 = y^2 + z^2$ 和 $\varphi_2 = x^2 + z^2$ 求公共积分：定义 $C = \varphi_1 - z^2 + x^2$ 不如直接验证

$$d(x^2 + y^2 + z^2) = 2x dx + 2y dy + 2z dz.$$

将(4)视为求解 C 的线性偏微分方程， $\ker \Pi$ 由梯度向量 (x, y, z) 生成，因为

$$\Pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zy - yz \\ -zx + xz \\ yx - xy \end{pmatrix} = 0.$$

因而 dC 必须与 (x, y, z) 成比例, 故 $dC = \lambda(x, y, z)$, 积分因子 λ 可为任意函数, 但最简单者对应 $C = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ 。为验证: 由第一式 $z(2y) - y(2z) = 0$, 成立。故独立的 Casimir 函数为

$$C(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

通过 Maple 计算得到结果 $C = F(x^2 + y^2 + z^2)$, 取 F 为恒等即得上述 Casimir。秩在一般点处为 2, 故 $k = 3 - 2 = 1$ 。

5.2.2. 可积性分析

对任意哈密顿函数 $H \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, 由于 C 是 Casimir, 必有 $\{H, C\} = 0$ 。选定 $F_1 = H$, $F_2 = C$, 则 $\{F_1, F_2\} = 0$ 。独立性条件:

$$dH \wedge dC = 0 \Leftrightarrow H \text{ 是 } C \text{ 的函数.}$$

只要 H 不是 C 的函数(即 dH 不平行于 (x, y, z)), F_1, F_2 在稠开集上函数独立。此时 $N = m - r = 2$, 满足 Liouville 可积性条件。辛叶为球面 $C = \text{const}$, 维数 2。

实例: 自由刚体欧拉方程取

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{I_1} + \frac{y^2}{I_2} + \frac{z^2}{I_3} \right), I_1, I_2, I_3 > 0.$$

运动方程 $\dot{x}^i = \pi^{ij} \partial_j H$ 给出

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z \cdot \frac{y}{I_2} - y \cdot \frac{z}{I_3} = \left(\frac{1}{I_2} \frac{1}{I_3} \right) yz, \\ \dot{y} &= -z \cdot \frac{x}{I_1} + x \cdot \frac{z}{I_3} = \left(\frac{1}{I_3} \frac{1}{I_1} \right) xz, \\ \dot{z} &= y \cdot \frac{x}{I_1} - x \cdot \frac{y}{I_2} = \left(\frac{1}{I_1} \frac{1}{I_2} \right) xy. \end{aligned}$$

可直接验证 $\dot{H} = 0$ 且 $\dot{C} = 2(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = 0$ 。系统由两个对合独立积分 H, C 保证 Liouville 可积。

5.3. 四维广义 $\mathfrak{so}(3)^*$ 泊松结构($\dim M = 4, r = 1, k = 2$)

取 $M = \mathbb{R}^4(x, y, z, w)$, 将上例中的泊松结构通过直积方式平凡扩充一个方向 w :

$$\pi = z \partial_x \wedge \partial_y + x \partial_y \wedge \partial_z + y \partial_z \wedge \partial_x,$$

即双向量对 ∂_w 无贡献。泊松矩阵为

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & z & -y & 0 \\ -z & 0 & x & 0 \\ y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3.1. Casimir 函数计算

方程组(1)写为

$$\begin{cases} zC_y - yC_z = 0, \\ -zC_x + xC_z = 0, \\ yC_x - xC_y = 0, \\ 0 \cdot C_x + 0 \cdot C_y + 0 \cdot C_z + 0 \cdot C_w = 0. \end{cases}$$

前三个方程与(4)完全相同, 不受 w 影响, 故解得 C 必为 $x^2 + y^2 + z^2$ 和 w 的函数。由第四个方程(恒等式)无额外约束, 因此一般解为 $C = F(x^2 + y^2 + z^2, w)$ 。选取两个函数独立的 Casimir 函数:

$$C_1 = x^2 + y^2 + z^2, C_2 = w.$$

秩的计算: 在一般点(如 $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$ 或 $z \neq 0$), 矩阵非零行构成的秩为 2 (前三个行张成二维空间), 加上全零第四行, 故 $\text{rank } \Pi = 2$, 即 $r = 1$ 。从而 $k = 4 - 2 = 2$, 与所得相符。例外集为直线 $x = y = z = 0$, 其上秩降至 0。

5.3.2. 可积性分析与超可积

辛叶 $\Sigma_{a,b} = \{C_1 = a, C_2 = b\}$ ($a > 0$, $b \in \mathbb{R}$) 由两个方程定义, 为 $\mathbb{R}^4$ 中的二维曲面。对任意哈密顿 $H(x, y, z, w)$, 因 C_1, C_2 为 Casimir, 有

$$\{H, C_1\} = 0, \{H, C_2\} = 0.$$

因此 $F_1 = C_1, F_2 = C_2, F_3 = H$ 两两对合。独立性条件为

$$dC_1 \wedge dC_2 \wedge dH \neq 0.$$

在满足 dH 不位于 $\text{span}\{dC_1, dC_2\}$ 的区域成立。此时独立首次积分数 $N = 3$, 而 $m - r = 4 - 1 = 3$, 系统 Liouville 可积。进一步, 因为独立积分数目 $3 > \frac{m}{2} = 2$, 系统是超可积的。

实例: 取

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + w.$$

运动方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= zy - y \cdot 0 = zy, \\ \dot{y} &= -zx + x \cdot 0 = -xz, \\ \dot{z} &= yx - xy = 0, \\ \dot{w} &= 0 \cdot \partial_x H + 0 \cdot \partial_y H + 0 \cdot \partial_z H + 0 \cdot \partial_w H = 0. \end{aligned}$$

直接积分得 $z = z_0$ (常数), $w = w_0$, 而 x, y 满足 $\dot{x} = z_0 y, \dot{y} = -z_0 x$, 即简谐振子, 显式可解。独立积分 C_1, C_2, H 保证超可积性。

5.4. 四维标准辛结构(Darboux 坐标, $\dim M = 4, r = 2, k = 0$)

取 $M = \mathbb{R}^4(q^1, p^1, q^2, p^2)$, 标准非退化泊松结构(辛结构)

$$\pi = \partial_{q^1} \wedge \partial_{p^1} + \partial_{q^2} \wedge \partial_{p^2},$$

泊松矩阵为常值反对称矩阵

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{rank } \Pi = 4, r = 2, k = 0.$$

5.4.1. Casimir 函数平凡性

方程组 $\Pi^j \partial_j C = 0$ 给出

$$\partial_{p^1} C = 0, -\partial_{q^1} C = 0, \partial_{p^2} C = 0, -\partial_{q^2} C = 0.$$

故 C 与所有坐标无关, 即 $C = \text{const}$ 。无非常数 Casimir 函数, 与 $k = 0$ 一致。

5.4.2. 可积系统的构造

需寻找 $N = m - r = 2$ 个对合独立首次积分。取哈密顿量为两独立谐振子的和:

$$H = \frac{1}{2} \left[(p^1)^2 + (q^1)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[(p^2)^2 + (q^2)^2 \right].$$

其运动方程

$$\dot{q}^1 = p^1, \dot{p}^1 = -q^1, \dot{q}^2 = p^2, \dot{p}^2 = -q^2,$$

完全可解。第二个积分选为角动量

$$F = p^1 q^2 - p^2 q^1.$$

计算泊松括号验证对合性:

$$\begin{aligned} \{F, H\} &= \frac{\partial F}{\partial q^1} \frac{\partial H}{\partial p^1} - \frac{\partial F}{\partial p^1} \frac{\partial H}{\partial q^1} + \frac{\partial F}{\partial q^2} \frac{\partial H}{\partial p^2} - \frac{\partial F}{\partial p^2} \frac{\partial H}{\partial q^2} \\ &= (-p^2)(p^1) - (q^2)(q^1) + (p^1)(p^2) - (-q^1)(q^2) \\ &= -p^2 p^1 - q^2 q^1 + p^1 p^2 + q^1 q^2 = 0. \end{aligned}$$

独立性: 雅可比行列式在一般点不为零, 例如在 $q^1 = 1, p^1 = 0, q^2 = 0, p^2 = 1$ 处,

$$dH = (q^1, q^2, p^1, p^2) = (1, 0, 0, 1), dF = (-p^2, p^1, q^2, -q^1) = (-1, 0, 0, -1),$$

两者线性无关。故 H, F 为所需对合独立积分, 系统 Liouville 可积。

6. 方法的适用范围与局限性

本文提出的符号计算流程适用于具有显式解析表达式的有限维泊松流形。其优势在于可快速获得精确的 Casimir 函数, 并与辛叶分解相结合, 为可积性判定提供系统化手段。然而, 该方法存在若干局限性:

1. 维数限制: 随着流形维数增加, 偏微分方程组的规模扩大, 符号求解的复杂度急剧上升, 往往导致计算超时或内存溢出。目前有效的处理范围大致为 $\dim M \leq 6$ 且泊松张量具有相对简单的结构。
2. 非线性程度: 当 π^j 为高次多项式或超越函数时, 偏微分方程的特征积分可能不存在初等闭式解, 符号计算将无法给出显式 Casimir。即使存在, 也可能因中间表达式膨胀而难以处理。
3. 奇异性处理: 算法假定在稠开集上秩为常数。在秩变化的奇异点附近, Casimir 函数可能失去光滑性或产生分支, 符号算法无法自动处理这类全局行为。
4. 参数依赖: 若泊松张量含有未定参数, 方程组可能变得不可解, 或 Casimir 函数的独立性与参数取值相关, 需要分情形讨论, 符号方法对此缺乏自动推理能力。
5. 坐标依赖: 算法所得到的 Casimir 表达式依赖于所选坐标系, 尽管几何本质不变, 但有时需进行非平凡坐标变换才能简化。此外, 所得符号解须验证在局部坐标下是否全局良定义。

综上, 该符号计算方法特别适用于低维、具有多项式或简单超越泊松张量的系统, 能够为理论研究提供快速验证; 但对于高维、强非线性或含参数的普遍情形, 仍需结合几何理论与数值方法。

7. 结语

本文建立了基于符号计算求解低维泊松流形 Casimir 函数的系统方法，并由 Casimir 函数与泊松叶的维数直接导出 Liouville 可积性判据。二维、三维及四维实例的计算详细展示了偏微分方程组的符号求解流程和可积性分析。该方法可进一步推广至含参数族或非线性泊松张量的情形，为可积系统的构造与分类提供计算工具。

参考文献

- [1] 聂灵沼, 丁石孙. 代数学引论[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [2] Vaisman, I. (1994) Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds. Birkhäuser.
- [3] Laurent-Gengoux, C., Pichereau, A. and Vanhaecke, P. (2013) Poisson Structures. Springer.
- [4] Abellanas, M. and Galindo, A. (1988) Symbolic Computation of Casimir Invariants. *Computer Physics Communications*, **49**, 139-147.
- [5] Hernández-Bermejo, B. and Fairén, V. (1998) Simple Evaluation of Casimir Invariants in Finite-Dimensional Poisson Systems. *Physics Letters A*, **241**, 148-154. [https://doi.org/10.1016/s0375-9601\(98\)00125-x](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(98)00125-x)
- [6] Weinstein, A. (1983) The Local Structure of Poisson Manifolds. *Journal of Differential Geometry*, **18**, 523-557. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214437787>
- [7] Błaszak, M. (1998) Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems. Springer.