Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(9), 25-34
Published Online September 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.169195

Hans汉斯

抛物型积分微分方程的无网格Galerkin法

张　涛

重庆科技大学数理科学学院，重庆

收稿日期：2026年8月2日；录用日期：2026年9月1日；发布日期：2026年9月8日

摘　要

本文针对抛物型积分微分方程，在空间方向上使用无单元Galerkin法离散，在时间方向上使用向后欧拉法离散，利用Nitsche法施加本质边界条件，数值算例验证了该数值格式的有效性和收敛性。

关键词

抛物型积分微分方程，无单元Galerkin法，向后欧拉法，Nitsche法

Meshless Galerkin Method for Parabolic Integro-Differential Equations

Tao Zhang

School of Mathematical and Physical Sciences, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing

Received: August 2, 2026; accepted: September 1, 2026; published: September 8, 2026

Abstract

This paper focuses on parabolic integro-differential equations, discretized by the element-free Galerkin method in space and the backward Euler method in time, with essential boundary conditions enforced via Nitsche's method. Numerical examples are provided to verify the effectiveness and convergence of the proposed numerical scheme.

Keywords

Parabolic Integro-Differential Equations, Element-Free Galerkin Method, Backward Euler Method, Nitsche's Method

文章引用: 张涛. 抛物型积分微分方程的无网格 Galerkin 法[J]. 理论数学, 2026, 16(9): 25-34.
DOI: 10.12677/pm.2026.169195

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

具有记忆项的抛物型积分微分方程因其能够刻画系统状态对历史演化的依赖性，在粘弹性力学及带记忆材料的热传导等问题的数学建模中具有核心地位[1]-[3]。这类方程通常包含一个对时间的卷积型积分项，用以描述物理过程中能量耗散或延迟效应的历史累积机制。与经典抛物型偏微分方程相比，记忆项的引入带来了更丰富的数学结构，同时也对数值方法的构造与分析提出了更高要求。

在数值方法的发展历程中，有限元法一直是求解偏微分方程和积分微分方程的主要工具。Sloan 与 Thomée 于 1986 年系统研究了向后欧拉格式和 Crank-Nicolson 格式对该类方程时间离散的稳定性与收敛性[1]，Thomée 和 Zhang 则进一步给出了半离散有限元方法的误差估计[2]。无网格方法在过去三十年间得到持续发展[4]-[6]。Belytschko 等学者于 1994 年提出的无单元 Galerkin 法(Element-Free Galerkin Method, EFG)是该领域最具代表性的方法之一[7]。该方法采用移动最小二乘(Moving Least Squares, MLS)近似构造形函数，仅需布置离散节点而无需建立单元间的拓扑连接关系。然而，MLS 形函数一般不具备 Kronecker delta 性质，即形函数在节点处的值不等于该节点自由度，因此本质边界条件无法像有限元中那样通过直接修改系统方程来施加。

针对无网格法中本质边界条件施加困难这一问题，目前已发展出多种处理策略。Fernández-Méndez 与 Huerta 在其综述中将各类方法归纳为修改弱形式、修改形函数以及采用混合变分原理等类别[8]，其中 Nitsche 法属于“修改弱形式”类的代表性方案。Nitsche 法最初由 Nitsche 于 1971 年为处理 Dirichlet 边界条件而提出[9]，其基本思想是在变分泛函中增加相容项和稳定项来弱施加边界约束。与罚函数法相比，Nitsche 法避免了因罚参数选取不当导致的矩阵病态问题，同时保持了系统的对称性。近年来，Nitsche 法被成功推广至等几何分析中的多片耦合问题以及无网格法中的各类边界处理。例如，Zhang 系统分析了数值积分对无网格 Galerkin 法中 Nitsche 法施加本质边界条件的影响，给出了带数值积分情形下的收敛性分析[10]。Belytschko 等学者亦对 Galerkin 型无网格法中的本质边界条件处理技术进行了系统总结[11]。

在时间依赖问题的无网格求解方面，近年来也涌现出若干高效的算法策略。Castillo-Rodríguez 等[12]发展了基于有限点集法的时空耦合无网格格式，用于求解含移动热源的瞬态热传导问题，无需时间离散方案即可直接求解控制方程，同时产生稀疏系统矩阵。Garmanjani 等[13]则提出了一种基于自适应残差细化的径向基函数无网格有限差分格式，通过动态识别解的快速变化区域进行局部节点自适应细化，高效求解二维时间依赖偏微分方程。这些工作展示了无网格方法在处理复杂时间依赖物理问题中的灵活性和潜力。

在时间方向离散方面，向后欧拉法因其良好的稳定性及易于实现的特点，被广泛用于抛物型及积分微分方程的时间推进。Bakaev、Larsson 与 Thomée 在 Banach 空间框架下分析了向后欧拉型时间离散格式的稳定性与误差估计[14]，Xu 则针对含弱奇异核的情形研究了向后 Euler 离散与卷积求积相结合的处理方法[15]。近年来，关于积分微分系统时间离散的理论研究仍在持续深入[16]。

基于上述研究背景，本文针对抛物型积分微分方程，提出一种结合无单元 Galerkin 法进行空间离散、向后欧拉法进行时间推进以及 Nitsche 法施加本质边界条件的全离散数值格式。该格式旨在综合发挥无网格方法在空间离散上的灵活性、向后欧拉法在时间推进上的鲁棒性以及 Nitsche 法在边界处理上的可靠

性。数值算例将验证该数值格式的有效性和收敛性，以期为抛物型积分微分方程的高效数值求解提供一条可行的技术途径。

2. 移动最小二乘(MLS)近似

设非空有界 Lipschitz 区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$，其中 $d=1,2$ 或者 3，$\partial\Omega=\Gamma$ 为其边界。一般地，$\mathbb{R}^d$ 中的点可表示为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_d)^{\mathrm{T}}$ 或 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_d)^{\mathrm{T}}$。设 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 为 $\bar{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$ 中的节点集，节点总数为 N。节点间距 h 定义为

$$h=\max_{1\le i\le N}\min_{1\le j\le N,j\ne i}\left|x_i-x_j\right|$$

此外，点 $x\in\bar{\Omega}$ 的半径为 $r(x)$ 的支持域为 $\Re(x)=\{y\in\mathbb{R}^d:|y-x|\le r(x)\}$。

对于给定函数 $u(x)$，其 MLS 近似为

$$u(x)\approx\mathcal{M}u(x)=\sum_{i\in\wedge(x)}\Phi_i(x)u_i=\sum_{i=1}^{N}\Phi_i(x)u_i \tag{2.1}$$

其中 $\mathcal{M}$ 为 MLS 近似算子，u_i 为节点值，$\wedge(x)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n_x}\}$ 为支持域覆盖点 x 的节点的全局编号，MLS 形函数 $\Phi_i(x)$ 定义为[6] [10]

$$\Phi_i(x)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}p_j(x)\left[A^{-1}(x)B(x)\right]_{jl}, & i=\lambda_l\in\wedge(x)\\ 0, & i\notin\wedge(x)\end{cases},i=1,2,\cdots,N, \tag{2.2}$$

其中 $p_j(x)\ (j=1,2,\cdots,m)$ 是多项式函数空间 $\mathbb{P}_{\hat{m}}^d$ 的单项式基函数经平移和缩放后形成的单项式基函数，$\hat{m}$ 为基函数的最高次数。此外，$A(x)=P^{\mathrm{T}}W(x)P$，$B(x)=P^{\mathrm{T}}W(x)$，其中 $P=\left[p\left(x_{\lambda_1}\right),p\left(x_{\lambda_2}\right),\cdots,p\left(x_{\lambda_{n_x}}\right)\right]^{\mathrm{T}}$，$p(x_i)=\left[p_1(x_i),p_2(x_i),\cdots,p_m(x_i)\right]^{\mathrm{T}}$，且 $W(x)=\mathrm{diag}\left(w_{\lambda_1}(x),w_{\lambda_2}(x),\cdots,w_{\lambda_{n_x}}(x)\right)$。

若 $w_i(x)$ 为 $\Re(x_i)$ 中有紧支集的 γ 次连续可微权函数，即 $w_i(x)\in C_0^{\gamma}(\Re(x_i))$，则 MLS 近似具有如下误差估计。

引理 2.1. [6]若 $u\in H^{\bar{m}+1}(\Omega)$，则

$$\left\|u-\mathcal{M}u\right\|_{H^k(\Omega)}\le Ch^{\bar{m}+1-k}\left\|u\right\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)},0\le k\le\min\{\bar{m}+1,\gamma\}. \tag{2.3}$$

3. 问题模型

考虑如下抛物型积分微分方程，求函数 $u:J\times\Omega\to\mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases}u_t(t,x)+A(t)u(t,x)+\int_0^t B(t,\tau)u(\tau,x)\mathrm{d}\tau=f(t,x), & (t,x)\in J\times\Omega,\\ u(t,x)=g_D(t,x), & (t,x)\in J\times\Gamma_D,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n_A}(t,x)+\alpha(t,x)u(t,x)=g_R(t,x), & (t,x)\in J\times\Gamma_R,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\Omega.\end{cases} \tag{3.1}$$

其中 Ω 为有界 Lipschitz 区域，边界 $\partial\Omega=\Gamma=\Gamma_D\cup\Gamma_R$，$\Gamma_D\cap\Gamma_R=\varnothing$，$\mathrm{meas}(\Gamma_D)>0$。时间区间 $J=[0,T]$。这里 u_t 表示 u 对时间 t 的偏导数，f 是已知源项，g_D 是 Γ_D 上的已知 Dirichlet 边界数据，g_R 是 Γ_R 上的已知 Robin 边界数据，α 是 Γ_R 上的已知非负函数，u_0 是初始条件。二阶偏微分算子 $A(t)$ 和 $B(t,\tau)$ 如下

$$A(t)u=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+a_0(t,x)u,$$

$$B(t,\tau)u=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(t,\tau,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+b_0(t,\tau,x)u.$$

其中 $a_0(t,x)$ 满足 $a_0(t,x)\geq a_0^*>0$，$b=(b_1,\cdots,b_n)$，$a_{ij}(x)$ 满足对称性 $a_{ij}=a_{ji}$ 和一致椭圆性条件，存在常数 $c_0>0$ 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq c_0|\xi|^2,\forall x\in\Omega,\forall\xi\in\mathbb{R}^d. \tag{3.2}$$

同时

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial n_A}=\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}n_j(x),$$

其中 $n=(n_1,\cdots,n_d)$ 是 Γ 上的单位外法向量。存在常数 C_b 使得

$$|a_{ij}|,|a_0|,|a_{0t}|,|b_i|,|b_{it}|,|b_0|,|b_{0t}|,|\alpha|,|\alpha_t|\leq C_b \tag{3.3}$$

几乎处处成立。

由于 MLS 近似的形函数 $\Phi_i(x)$ (2.2)不具有插值性质，因此采用 Nitsche 方法来强制施 Dirichlet 边界条件[6] [8] [10]。将方程(3.1)乘以测试函数 $v\in H_h(\Omega)$ 并在 Ω 上积分

$$\int_\Omega(Au)v\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)v+a_0uv\right)\mathrm{d}x.$$

对二阶导数项应用分部积分公式

$$-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)v\mathrm{d}x=\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}va_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}n_j\mathrm{d}S.$$

将边界积分分解为 Γ_D 和 Γ_R 两部分

$$\int_{\partial\Omega}va_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}n_j\mathrm{d}S=\int_{\Gamma_D}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S+\int_{\Gamma_R}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

在 Γ_R 上，利用 Robin 条件 $\frac{\partial u}{\partial n}=g_R-\alpha u$，得

$$\int_{\Gamma_R}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\int_{\Gamma_R}vg_R\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_R}\alpha uv\mathrm{d}S.$$

因此，

$$-\int_{\Gamma_R}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=-\int_{\Gamma_R}vg_R\mathrm{d}S+\int_{\Gamma_R}\alpha uv\mathrm{d}S.$$

于是，A 部分的分部积分结果为

$$\int_\Omega(Au)v\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+a_0uv\right)\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R}\alpha uv\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_R}vg_R\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_D}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

在 Γ_D 上，弱施加 Dirichlet 条件 $u=g_D$。Nitsche 方法在左端添加对称化项和稳定项

$$-\int_{\Gamma_D}\frac{\partial v}{\partial n}u\mathrm{d}S+\beta\int_{\Gamma_D}h^{-1}uv\mathrm{d}S.$$

同时，右端添加对应的项(将 u 替换为 g_D)

$$-\int_{\Gamma_D}\frac{\partial v}{\partial n}g_D\mathrm{d}S+\beta\int_{\Gamma_D}h^{-1}g_Dv\mathrm{d}S.$$

其中 β 为 Nitsche 参数。因此，得到双线性形式 $a(t;u,v)$，

$$a(t;u,v)=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+a_0uv\right)\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R}\alpha uv\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_D}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_D}\frac{\partial v}{\partial n}u\mathrm{d}S+\beta\int_{\Gamma_D}h^{-1}uv\mathrm{d}S. \tag{3.4}$$

对 B 的分部积分与 A 完全相同

$$\int_\Omega(Bu)v\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v+b_0uv\right)\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

分解边界积分

$$\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\int_{\Gamma_D}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S+\int_{\Gamma_R}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

在 Γ_R 上再次利用 Robin 条件

$$\int_{\Gamma_R}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\int_{\Gamma_R}vg_R\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_R}\alpha uv\mathrm{d}S.$$

因此，

$$-\int_{\Gamma_R}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=-\int_{\Gamma_R}vg_R\mathrm{d}S+\int_{\Gamma_R}\alpha uv\mathrm{d}S.$$

于是，

$$\int_\Omega(Bu)v\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v+b_0uv\right)\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_D}\alpha uv\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_D}vg_R\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_D}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

与 A 类似，在 Γ_D 上添加对称化项和稳定项

$$-\int_{\Gamma_D}\frac{\partial v}{\partial n}u\mathrm{d}S+\beta\int_{\Gamma_D}h^{-1}uv\mathrm{d}S.$$

右端添加对应的项

$$-\int_{\Gamma_D}\frac{\partial v}{\partial n}g_D\mathrm{d}S+\beta\int_{\Gamma_D}h^{-1}g_Dv\mathrm{d}S.$$

因此，得到双线性形式 $b(t,\tau;u,v)$

$$b(t,\tau;u,v)=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v+b_0uv\right)\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R}\alpha uv\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_D}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_D}\frac{\partial v}{\partial n}u\mathrm{d}S+\beta\int_{\Gamma_D}h^{-1}uv\mathrm{d}S. \tag{3.5}$$

最后，将所有不含 u 的项移到右端，得到

$$\begin{aligned}\langle F(t),v\rangle&=\int_\Omega fv\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R}g_Rv\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_D}\frac{\partial v}{\partial n}g_D\mathrm{d}S+\beta\int_{\Gamma_D}h^{-1}g_Dv\mathrm{d}S\\&\quad+\int_0^t\left(\int_{\Gamma_R}g_Rv\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_D}\frac{\partial v}{\partial n}g_D\mathrm{d}S+\beta\int_{\Gamma_D}h^{-1}g_Dv\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{3.6}$$

因此，方程(3.1)的变分形式：求 $u\in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)\cap L^{2}\left(0,T;H^{1}\left(\Omega\right)\right)$，满足

$$\left(u_{t}\left(t\right),v\right)+a\left(t;u\left(t\right),v\right)+\int_{0}^{t}b\left(t,\tau;u\left(\tau\right),v\right)\mathrm{d}\tau=\left\langle F\left(t\right),v\right\rangle, \tag{3.7}$$

对几乎处处 $t\in\left(0,T\right)$ 及所有 $v\in H^{1}\left(\Omega\right)$ 成立，且 $u\left(0\right)=u_{0}$。

4. 数值格式

首先在空间上对方程(3.7)进行离散化。对于任意固定的 t，解 u 由有限维无单元 Galerkin 空间 S_{h} 中的函数 u_{h} 逼近。通常，u_{h} 被称为空间离散解或半离散解。设

$$S_{h}=\operatorname{span}\left\{\Phi_{i},1\le i\le N\right\},$$

其中 Φ_{i} 是由式(2.2)给出的 MLS 形函数。

据此，定义问题(3.1)的半离散近似，求 $u_{h}\left(t\right):J\to S_{h}$ 满足

$$\left(u_{h,t},v\right)+a\left(t;u_{h},v\right)+\int_{0}^{t}b\left(t,\tau;u_{h}\left(\tau\right),v\right)\mathrm{d}\tau=\left\langle F,v\right\rangle, \tag{4.1}$$

$$u_{h}\left(0\right)\in S_{h},v\in S_{h},t\in J. \tag{4.2}$$

这里，$u_{h,t}=\dfrac{\partial u_{h}}{\partial t}$。根据 S_{h} 空间的定义，将 $u_{h}\left(t\right)$ 表示为

$$u_{h}\left(t\right)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_{i}\left(t\right)\Phi_{i},$$

那么方程(4.1)可改写为

$$M\frac{\mathrm{d}\alpha\left(t\right)}{\mathrm{d}t}+M_{a}\left(t\right)\alpha\left(t\right)+\int_{0}^{t}M_{b}\left(t,\tau\right)\alpha\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau=\overline{f}\left(t\right), \tag{4.3}$$

其中

$$M=\left(\Phi_{i},\Phi_{j}\right)_{N\times N},M_{a}\left(t\right)=\left(a\left(t;\Phi_{i},\Phi_{j}\right)\right)_{N\times N},$$

$$M_{b}\left(t,\tau\right)=\left(B\left(t,\tau;\Phi_{i},\Phi_{j}\right)\right)_{N\times N},\overline{f}\left(t\right)=\left(\left(f,\Phi_{1}\right),\cdots,\left(f,\Phi_{N}\right)\right)^{\mathrm{T}}.$$

这是一个关于向量函数 $\alpha\left(t\right)=\left(\alpha_{1}\left(t\right),\cdots,\alpha_{N}\left(t\right)\right)^{\mathrm{T}}$ 的常微分－积分方程组。对给定初值 $\alpha\left(0\right)$（由 $u_{h}\left(0\right)\in S_{h}$ 确定），它的解 $\alpha\left(t\right)$ 是唯一存在的[15] [16]，因而问题(4.1)~(4.3)是适定的。接下来对(4.1)在时间方向进行离散。

将时间区间 $\left[0,T\right]$ 均匀剖分：设 M 为正整数，时间步长 $\Delta t=T/M$，节点 $t_{n}=n\Delta t$，$n=0,1,\cdots,M$。对时间导数项采用向后欧拉近似

$$u_{h,t}\left(t_{n}\right)\approx\frac{u_{h}\left(t_{n}\right)-u_{h}\left(t_{n-1}\right)}{\Delta t}=\overline{\partial}_{t}u_{h}^{n}.$$

记忆项和右端项均采用左矩形公式

$$\int_{0}^{t_{n}}b\left(t_{n},\tau;u\left(\tau\right),v\right)\mathrm{d}\tau\approx\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}b\left(t_{n},t_{j};u^{j},v\right).$$

$$\left\langle F^{n},v\right\rangle=\left\langle F\left(t_{n}\right),v\right\rangle$$

$$=\int_{\Omega}f^{n}v\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_{R}}g_{R}^{n}v\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_{D}}\frac{\partial v}{\partial n}g_{D}^{n}\mathrm{d}S+\beta\int_{\Gamma_{D}}h^{-1}g_{D}^{n}v\mathrm{d}S+\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_{\Gamma_{R}}g_{R}^{j}v\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_{D}}\frac{\partial v}{\partial n}g_{D}^{j}\mathrm{d}S+\beta\int_{\Gamma_{D}}h^{-1}g_{D}^{j}v\mathrm{d}S\right).$$

记$U^n \approx u_h(t_n)$为全离散近似解，则得到如下全离散格式，求$U^n \in S_h$满足

$$\left(\bar{\partial}_t U^n, v\right) + a\left(t_n; U^n, v\right) + \Delta t \sum_{j=0}^{n-1} b\left(t_n, t_j; U^j, v\right) = \left\langle F^n, v\right\rangle, \forall v \in S_h, \tag{4.4}$$

$$U^0 = u_h(0) \in S_h, n = 1, 2, \cdots, M.$$

由S_h的定义，将U^n表示为

$$U^n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^n \Phi_i.$$

代入(4.4)并取$v = \Phi_i$ ($i = 1, \cdots, N$)，得到线性代数方程组

$$M_0 \frac{\alpha^n - \alpha^{n-1}}{\Delta t} + M_a^n \alpha^n + \Delta t \sum_{j=0}^{n-1} M_b^{n,j} \alpha^j = \bar{F}^n, n = 1, 2, \cdots, M, \tag{4.5}$$

其中

$$M_0 = \left(m_{ij}\right)_{N\times N}, m_{ij} = \left(\Phi_j, \Phi_i\right),$$

$$M_a^n = \left(a_{ij}^n\right)_{N\times N}, a_{ij}^n = a\left(t_n; \Phi_j, \Phi_i\right),$$

$$M_b^{n,j} = \left(b_{ij}^{n,j}\right)_{N\times N}, b_{ij}^{n,j} = b\left(t_n, t_j; \Phi_j, \Phi_i\right),$$

$$\alpha^n = \left(\alpha_1^n, \cdots, \alpha_N^n\right)^{\mathrm{T}}, \bar{F}^n = \left(\left\langle F^n, \Phi_1\right\rangle, \cdots, \left\langle F^n, \Phi_N\right\rangle\right)^{\mathrm{T}}.$$

整理(4.5)得

$$\left(M_0 + \Delta t M_a^n\right)\alpha^n = M_0 \alpha^{n-1} - \Delta t^2 \sum_{j=0}^{n-1} M_b^{n,j} \alpha^j + \Delta t \bar{F}^n. \tag{4.6}$$

由于质量矩阵M_0，刚度矩阵M_a^n，系数矩阵$M_0 + \Delta t M_a^n$都是对称正定，因此(4.6)可逐时间步求解。

1、初始化：给定$U^0 = v_h \in S_h$，计算α^0。

2、时间循环：对$n = 1, 2, \cdots, M$：

- 组装矩阵M_0、M_a^n、$M_b^{n,j}$ ($j = 0, \cdots, n-1$)
- 计算右端向量$R^n = M_0 \alpha^{n-1} - \Delta t^2 \sum_{j=0}^{n-1} M_b^{n,j} \alpha^j + \Delta t \bar{F}^n$
- 求解线性方程组$\left(M_0 + \Delta t M_a^n\right)\alpha^n = R^n$
- 得到$U^n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^n \varphi_i$

在时间推进方向，本文采用的欧拉格式为隐格式，因此其具备良好的稳定性，无需额外苛刻的 CFL 条件[3]。该全离散格式的稳定性和误差估计，计划在后续工作中进一步深入探讨。

5. 数值实验

考虑在$\Omega = (0,1)^2 \times (0,T)$上的抛物型积分微分问题，其参数设置为$a_{ij}(x) = 1$，$a_0 = 1$，$b_i = 0$，$b_0 = 1$，$T = 1$以及$\Gamma = \Gamma_1$ ($\Gamma_2 = \varnothing$)，精确解为

$$u = \exp(-t)\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2).$$

为考察时间离散与空间离散的匹配关系，数值试验中统一采用线性基函数($\bar{m} = 1$)，支持域半径为$h_i = 1.5h$，背景积分网格选为单元网格，采用指数权函数，其表达式为[7]

$$w_i(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{-(|x-x_i|/h)^2}-\mathrm{e}^{-(h_i/h)^2}}{1-\mathrm{e}^{-(h_i/h)^2}}, & |x-x_i|\le h_i,\\ 0, & |x-x_i|>h_i.\end{cases}$$

在 $\Delta t=h$ 的等步长设置下，本文首先验证了 Nitsche 参数对格式稳健性的影响。图 1 的结果显示，在 $\beta=5,50,100,500,1000$ 时，L^2 范数和 H^1 范数下的误差随 h 的衰减速率几乎不受影响，这说明该参数的选取不构成收敛性的制约因素。与此同时，图 2 给出了 $\beta=50$、节点数为 21×21 时的精确解 u、数值解 u_h 及误差分布 $|u-u_h|$。表 1 给出了在 L^2 范数以及 H^1 范数下收敛阶的定量评估均约 1.00，与理论分析的线性收敛结论形成互证。当时间步长缩减为 $\Delta t=4h^2$ 时，表 2 说明，L^2 误差收敛阶提升至约 2.00，而 H^1 误差收敛阶依然约 1.00，前者收敛阶的提高和后者收敛阶不变与理论分析中时间收敛阶与空间收敛阶的支配关系相符。

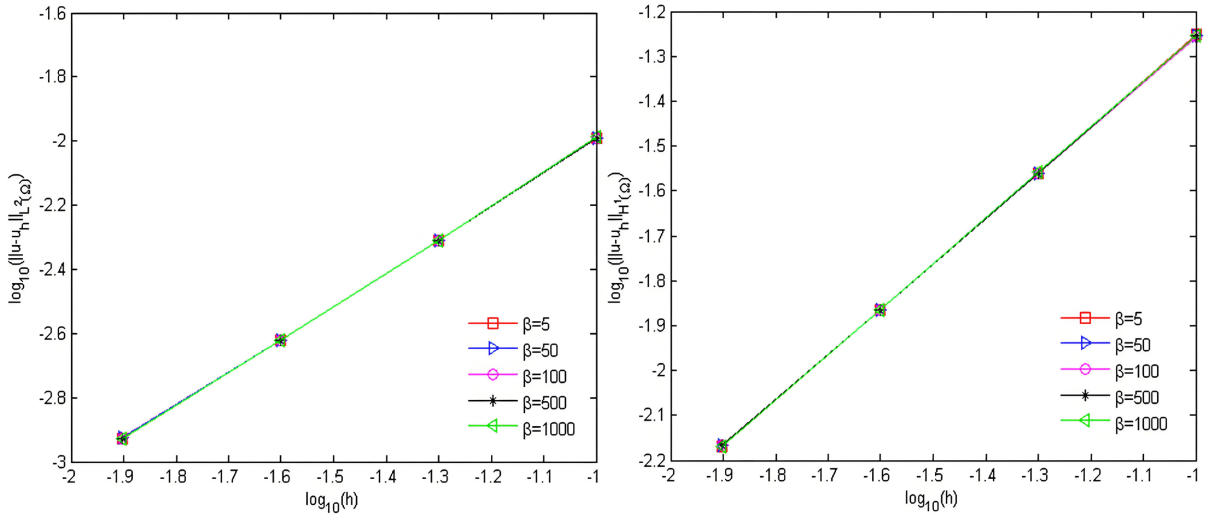
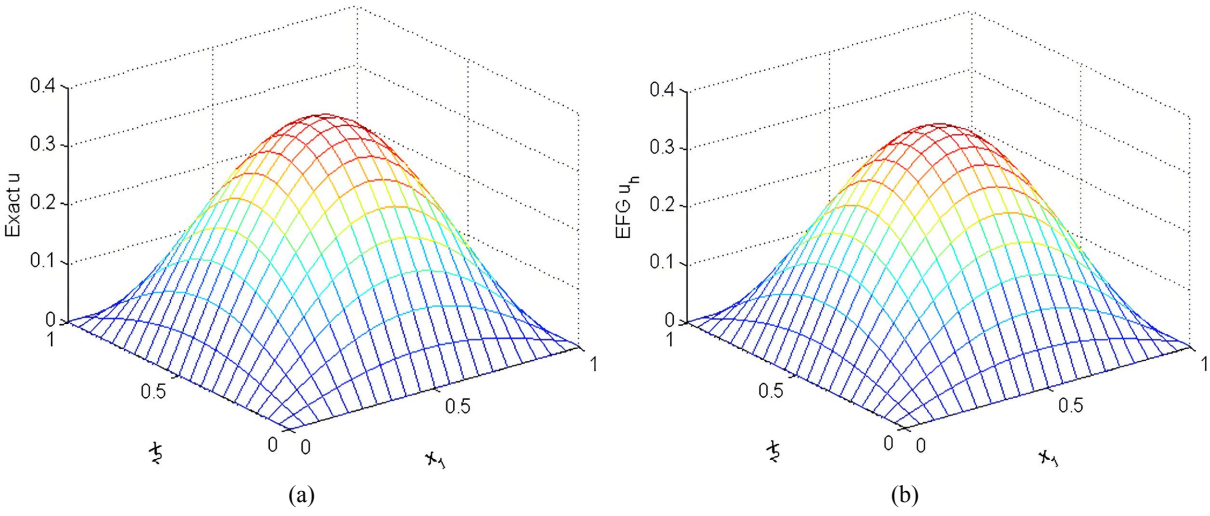
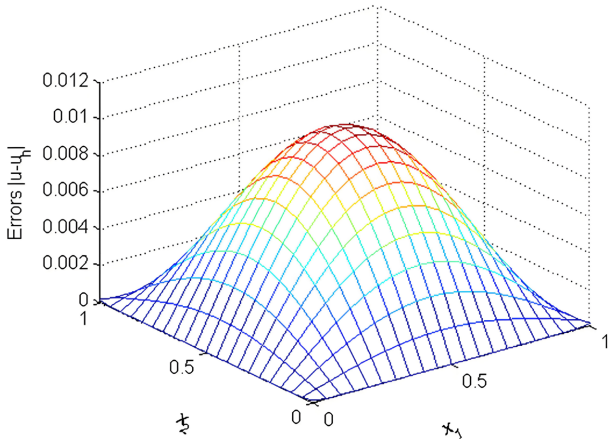


Figure 1. Example 1 errors with different Nitsche parameters: left $\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$, right $\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$

图 1. 算例 1 在不同 Nitsche 参数下的误差：左边 $\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$，右边 $\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$



(a) (b)



(c)

Figure 2. Example 1 at $T=1$: (a) exact solutions u , (b) numerical solutions u_h , (c) errors $|u-u_h|$

图 2. 算例 1 在 $T=1$ 时，(a) 精确解 u ，(b) 数值解 u_h ，(c) 误差 $|u-u_h|$

Table 1. Numerical errors of example 1 with Nitsche parameter $\beta=50$ and $\Delta t=h$

表 1. 算例 1 在 Nitsche 参数 $\beta=50$ 和 $\Delta t=h$ 的数值误差

h	$\Delta t=h$	$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$	收敛阶
1/10	1/10	1.0184E−2		5.5867E−2	
1/20	1/20	4.8962E−3	1.06	2.7541E−2	1.02
1/40	1/40	2.3996E−3	1.03	1.3672E−2	1.01
1/80	1/80	1.1859E−3	1.02	6.7902E−3	1.01

Table 2. Numerical errors of example 1 with Nitsche parameter $\beta=50$ and $\Delta t=4h^2$

表 2. 算例 1 在 Nitsche 参数 $\beta=50$ 和 $\Delta t=4h^2$ 的数值误差

h	$\Delta t=4h^2$	$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$	收敛阶
1/10	1/25	3.3145E−3		3.7056E−2	
1/20	1/100	8.1182E−4	2.03	1.7146E−2	1.11
1/40	1/400	1.9986E−4	2.02	8.1078E−3	1.08
1/80	1/1600	4.9638E−5	2.01	3.9077E−3	1.05

6. 结论

针对抛物型积分微分问题，本文提出了一种无网格数值求解策略，其空间离散采用无单元 Galerkin (Element-Free Galerkin, EFG)方法，时间推进则基于向后欧拉格式。EFG 法具有无需显式构建网格的优势，然而其在本质边界条件施加方面存在固有困难。为此，本文引入 Nitsche 方法以实现 Dirichlet 边界条件的弱形式嵌入，从而避免了传统拉格朗日乘子法所引致的系统自由度增加及矩阵条件数恶化等问题。在时间离散层面，采用向后欧拉格式构造全离散逼近方案，该格式具备良好的稳定性特征。最后，通过数值算例，对所提方法的有效性和收敛阶进行了验证。计算结果充分表明，EFG-向后欧拉组合格式结合 Nitsche 边界处理技术，能够稳定、有效地求解抛物型积分微分方程，具备良好的计算可靠性与工程应用潜力。

基金项目

重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJQN202301521)资助。

参考文献

[1] Sloan, I.H. and Thomée, V. (1986) Time Discretization of an Integro-Differential Equation of Parabolic Type. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **23**, 1052-1061. https://doi.org/10.1137/0723073

[2] Thomée, V. and Zhang, N.Y. (1989) Error Estimates for Semidiscrete Finite Element Methods for Parabolic Integro-Differential Equations. *Mathematics of Computation*, **53**, 121-139. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1989-0969493-9

[3] 张铁. 偏微分-积分方程的有限元方法[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[4] Liu, G.R. (2009) Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. 2nd Edition, CRC Press.

[5] 程玉民. 无网格方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[6] 李小林. 无网格微分方程数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2025.

[7] Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. (1994) Element-Free Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 229-256. https://doi.org/10.1002/nme.1620370205

[8] Fernández-Méndez, S. and Huerta, A. (2004) Imposing Essential Boundary Conditions in Mesh-Free Methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 1257-1275. https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.12.019

[9] Nitsche, J. (1971) Über ein variationsprinzip zur lösung von dirichlet-problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **36**, 9-15. https://doi.org/10.1007/bf02995904

[10] Zhang, Q. (2013) Quadrature for Meshless Nitsche's Method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **30**, 265-288. https://doi.org/10.1002/num.21808

[11] Belytschko, T., Chen, J.S. and Hillman, M. (2024) Meshfree and Particle Methods. Wiley. https://doi.org/10.1002/9781119811145

[12] Castillo-Rodríguez, C., Saucedo-Zendejo, F.R., García-Lara, A.M., Bouchot-Arias, J.M. and Castruita-Avila, L.G. (2025) Space-Time Meshfree Finite Pointset Method for Thermal Problems with Moving Heat Sources. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **180**, Article 106458. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2025.106458

[13] Garmanjani, G., Esmaeilbeigi, M. and Cavoretto, R. (2024) Adaptive Residual Refinement in an RBF Finite Difference Scheme for 2D Time-Dependent Problems. *Computational and Applied Mathematics*, **43**, Article No. 39. https://doi.org/10.1007/s40314-023-02541-1

[14] Bakaev, N.Y., Larsson, S. and Thomée, V. (1998) Backward Euler Type Methods for Parabolic Integro-Differential Equations in Banach Space. *ESAIM*: *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **32**, 85-99. https://doi.org/10.1051/m2an/1998320100851

[15] Xu, D. (2016) The Time Discretization in Classes of Integro-Differential Equations with Completely Monotonic Kernels: Weighted Asymptotic Convergence. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **32**, 896-935. https://doi.org/10.1002/num.22035

[16] Hu, S., Qiu, W. and Chen, H. (2020) A Backward Euler Difference Scheme for the Integro-Differential Equations with the Multi-Term Kernels. *International Journal of Computer Mathematics*, **97**, 1254-1267. https://doi.org/10.1080/00207160.2019.1613529