

# 半群 $E(X, \sigma)$ 的扩张元和 $F$ 、 $G$ 富足性

严庆富

赣南科技学院信息工程学院, 江西 赣州

收稿日期: 2026年8月11日; 录用日期: 2026年9月10日; 发布日期: 2026年9月17日

## 摘 要

设  $T(X)$  为非空集合  $X$  上的全变换半群,  $\sigma$  是  $X$  上的等价关系, 定义  $E(X, \sigma) = \{f \in T(X) | \sigma \subseteq \ker f\}$ , 则  $E(X, \sigma)$  是  $T(X)$  的子半群. 本文刻画了  $E(X, \sigma)$  的左、右扩张元; 描述了这类半群的  $F$ 、 $G$  关系, 并据此讨论了它的  $F$ 、 $G$  富足性.

## 关键词

变换半群, 等价关系, 扩张元,  $F(G)$  富足性

# Magnifying Elements and $F$ 、 $G$ Abundance on Semigroup $E(X, \sigma)$

Qingfu Yan

School of Information Engineering, Gannan University of Science and Technology, Ganzhou Jiangxi

Received: August 11, 2026; accepted: September 10, 2026; published: September 17, 2026

## Abstract

Let  $T(X)$  be the full transformation semigroup on a nonempty set  $X$ , and let  $\sigma$  be an equivalence relation on  $X$ . Define  $E(X, \sigma) = \{f \in T(X) | \sigma \subseteq \ker f\}$ . Then  $E(X, \sigma)$  is a subsemigroup of  $T(X)$ . In this paper, we characterize the left and right magnifying elements of  $E(X, \sigma)$ , describe the  $F$  and  $G$  relations on this semigroup, and based on this, discuss its  $F$  abundance and  $G$  abundance.

## Keywords

Transformation Semigroup, Equivalence Relation, Magnifying Elements,  $F(G)$  Abundance

文章引用: 严庆富. 半群  $E(X, \sigma)$  的扩张元和  $F$ 、 $G$  富足性[J]. 理论数学, 2026, 16(9): 77-82.

DOI: 10.12677/pm.2026.169200



## 1. 引言

设  $S$  是半群且  $a \in S$ 。1963 年, Ljapin [1] 介绍了半群  $S$  的左(右)扩张元, 若存在  $S$  的真子集  $M$ , 使得  $aM = S$  ( $Ma = S$ ), 则称  $a$  为左(右)扩张元。Catino 和 Migliorini [2] 给出了任意半群有左(右)扩张元的充要条件。Gutan [3] 证明了每个包含扩张元的半群都是可分解的。近年来, 许多研究者开始研究变换半群的扩张元, 许多变换半群的扩张元已得到刻画, 见文献[4]-[7]。

最近, Stokes 在文献[8]中引入了半群  $S$  上的新等价关系  $F$  和  $G$ :

$$F = \{(a, b) \in S \times S \mid \forall x \in S : xa = x \Leftrightarrow xb = x\}, G = \{(a, b) \in S \times S \mid \forall x \in S : ax = x \Leftrightarrow bx = x\}.$$

据文献[8], 称  $S$  中的元素  $a$  是  $F$  富足元( $G$  富足元), 若含  $a$  的  $F$  类( $G$  类)含有幂等元。此外, 若  $S$  中的每个元素都是  $F$  富足元( $G$  富足元), 则称  $S$  是  $F$  富足半群( $G$  富足半群)。文献[8]研究了全变换半群、部分变换半群的  $F$ 、 $G$  富足性。

设  $T(X)$  为非空集合  $X$  上的全变换半群,  $\sigma$  是  $X$  上的等价关系。Mendes-Goncalves 和 Sullivan 在文献[9]中, 定义了  $T(X)$  的子半群  $E(X, \sigma) = \{f \in T(X) \mid \sigma \subseteq \ker f\}$ 。文献[9]主要研究了半群  $E(X, \sigma)$  的正则性、格林关系及理想, 半群  $E(X, \sigma)$  其它方面的研究可见文献[10]-[12]。一个自然的问题: 如何刻画半群  $E(X, \sigma)$  的左(右)扩张元及  $F$ 、 $G$  关系? 本文在相关文献工作的基础上, 围绕上述问题继续对半群  $E(X, \sigma)$  开展研究, 第一部分刻画了  $E(X, \sigma)$  的左(右)扩张元; 第二部分描述了  $E(X, \sigma)$  的  $F$ 、 $G$  关系, 并据此讨论了它的  $F$ 、 $G$  富足性。本文规定映射的合成是从右往左, 即

$$(\forall f, g \in E(X, \sigma))(\forall x \in X)(fg)(x) = f(g(x)).$$

记  $X$  的全体  $\sigma$  类构成的集合为  $X/\sigma$ ,  $x$  所在的  $\sigma$  类记为  $\bar{x}$ 。对任意  $U \subseteq X, f \in E(X, \sigma), y \in f(X)$ , 记

$$f(U) = \{f(x) \mid x \in U\}, X \setminus U = \{x \in X \mid x \notin U\}, \ker f = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\},$$

$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ ,  $|U|$  表示  $U$  中元素的个数。显然, 任意  $f \in T(X)$ ,  $f \in E(X, \sigma)$  当且仅当对任意  $A \in X/\sigma$ , 有  $|f(A)| = 1$ 。涉及未说明的符号及概念参阅文献[13]。

## 2. 主要结果

### 2.1. 左扩张元和右扩张元

当非空集合  $X$  有限时,  $E(X, \sigma)$  是有限半群, 此时没有左(右)扩张元, 下面讨论非空集合  $X$  无限的情况。若  $\sigma = \{(x, x) \mid x \in X\}$ , 则  $E(X, \sigma) = T(X)$ ,  $T(X)$  的左(右)扩张元已得到刻画。若  $\sigma = X \times X$ , 则任意  $f \in E(X, \sigma)$ ,  $f$  可表示为  $f = \begin{pmatrix} X \\ a \end{pmatrix}$ ,  $a \in X$ , 此时没有左(右)扩张元。下面讨论当  $\sigma \neq \{(x, x) \mid x \in X\}$ ,  $\sigma \neq X \times X$  时,  $E(X, \sigma)$  的左(右)扩张元。

定理 1 设  $f \in E(X, \sigma)$ ,  $f$  是左扩张元当且仅当  $f$  是满射。

证明: 设  $f$  是左扩张元。若  $f$  不是满射, 则存在  $y_0 \in X$ ,  $y_0 \notin f(X)$ 。定义  $g \in E(X, \sigma)$  为  $g = \begin{pmatrix} X \\ y_0 \end{pmatrix}$ 。

由于  $f$  是左扩张元, 于是存在  $E(X, \sigma)$  的真子集  $M$ , 使得  $fM = E(X, \sigma)$ , 从而存在  $h \in E(X, \sigma)$ , 使得  $fh = g$ , 即  $fh(X) = g(X)$ , 于是  $y_0 \in g(X) = fh(X) \subseteq f(X)$ , 这与  $y_0 \notin f(X)$  矛盾, 故  $f$  是满射。

设  $f$  是满射。由于  $\sigma \neq \{(x, x) | x \in X\}$ ,  $\sigma \neq X \times X$ , 于是  $|X/\sigma| \geq 2$ , 且存在一个  $\sigma$  类  $C$ ,  $|C| \geq 2$ 。取两个不同的元素  $c_1, c_2 \in C$ , 由  $f$  是满射, 且  $c_1 \neq c_2$ , 于是存在不同的  $\sigma$  类  $A$  和  $B$ , 使得  $f(A) = c_1$ ,  $f(B) = c_2$ , 而  $c_1, c_2$  在同一个  $\sigma$  类, 故存在两个不同的  $\sigma$  类  $A$  和  $B$ ,  $f(A)$  和  $f(B)$  在同一个  $\sigma$  类。令  $M = \{h \in E(X, \sigma) | h \text{ 不是满射}\}$ , 由  $f$  是满射知  $M$  是  $E(X, \sigma)$  的真子集, 下证  $fM = E(X, \sigma)$ 。任取  $g \in E(X, \sigma)$ 。由于  $f$  是满射, 于是对任意  $x \in X$ , 存在  $\overline{y_x} \in X/\sigma$ , 使得  $f(\overline{y_x}) = g(x) = g(\overline{x})$ , 定义  $h \in E(X, \sigma)$  如下: 任意  $x \in X$ , 固定  $y_x \in \overline{y_x}$ , 令  $h(x) = y_x$  (若  $g(x_1) = g(x_2)$ , 则选择  $\overline{y_{x_1}} = \overline{y_{x_2}}$ ), 下面说明  $h \in M$ 。由于存在两个不同的  $\sigma$  类  $A$  和  $B$ ,  $f(A)$  和  $f(B)$  在同一个  $\sigma$  类, 于是分两种情况:

情况一,  $f(A) = f(B)$ 。任取  $a_A \in A, b_B \in B$ , 我们断言  $a_A, b_B$  不可能都在  $h(X)$  中。事实上, 若  $a_A, b_B$  都在  $h(X)$  中, 则存在  $x_A, x_B \in X$ , 使得  $a_A = h(x_A) = h(\overline{x_A})$ ,  $b_B = h(x_B) = h(\overline{x_B})$ 。由  $h$  的定义知,  $g(x_A) = f(\overline{a_A}) = f(A)$ ,  $g(x_B) = f(\overline{b_B}) = f(B)$ , 于是  $g(x_A) = g(x_B)$ , 再由  $h$  的定义知  $A = B$ , 这与  $A \neq B$  矛盾, 这表明  $A \cup B$  中, 必有元素不在  $h(X)$  里。因此, 当  $f(A) = f(B)$  时,  $h \in M$ 。

情况二,  $f(A) \neq f(B)$ 。令  $y_A = f(A), y_B = f(B)$ , 则  $y_A \neq y_B$ 。由于  $y_A, y_B$  在同一个  $\sigma$  类, 于是  $f(y_A) = f(\overline{y_A}) = f(\overline{y_B}) = f(y_B)$ 。我们断言  $y_A, y_B$  不可能都在  $h(X)$  中。事实上, 若  $y_A, y_B$  都在  $h(X)$  中, 则存在  $x_A, x_B \in X$ , 使得  $y_A = h(x_A) = h(\overline{x_A})$ ,  $y_B = h(x_B) = h(\overline{x_B})$ , 由  $h$  的定义知,  $g(x_A) = f(\overline{y_A})$ ,  $g(x_B) = f(\overline{y_B})$ , 于是  $g(x_A) = g(x_B)$ , 再由  $h$  的定义知,  $y_A = y_B$ , 这与  $y_A \neq y_B$  矛盾, 故  $y_A, y_B$  都在  $h(X)$  中是不可能的。因此, 当  $f(A) \neq f(B)$  时,  $h \in M$ 。

最后, 对任意  $x \in X$ , 由  $h$  的定义知,  $fh(x) = f(y_x) = f(\overline{y_x}) = g(x)$ , 即  $fh = g$ , 于是  $fM = E(X, \sigma)$ , 故  $f$  是左扩张元。

推论 1 若  $X/\sigma$  有限, 则  $E(X, \sigma)$  没有左扩张元。

证明: 若  $X/\sigma$  有限, 则令  $X/\sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ 。由于  $\sigma \neq \{(x, x) | x \in X\}$ , 于是存在  $A_i \in X/\sigma$ ,  $|A_i| \geq 2$ , 又  $f \in E(X, \sigma)$  当且仅当对任意  $A \in X/\sigma$ , 有  $|f(A)| = 1$ 。从而任意  $f \in E(X, \sigma)$ ,  $f$  都不是满射, 由定理 1 知,  $f$  不是左扩张元, 故  $E(X, \sigma)$  没有左扩张元。

引理 1 设  $f \in E(X, \sigma)$ , 若  $f$  是右扩张元, 则对任意两个不同的  $\sigma$  类  $A$  和  $B$ ,  $f(A)$  和  $f(B)$  不在同一个  $\sigma$  类。

证明: 设  $f \in E(X, \sigma)$  是右扩张元。对任意两个不同的  $\sigma$  类  $A$  和  $B$ , 取  $a \in A, b \in B$ , 定义  $g \in E(X, \sigma)$  为  $g = \begin{pmatrix} A & X \setminus A \\ a & b \end{pmatrix}$ 。由于  $f$  是右扩张元, 于是存在  $E(X, \sigma)$  的真子集  $M$ , 使得  $Mf = E(X, \sigma)$ , 即存在  $h \in E(X, \sigma)$ , 使得  $hf = g$ , 从而  $hf(A) = g(A) = a$ ,  $hf(B) = g(B) = b$ , 又  $a \neq b$ , 故  $f(A)$  和  $f(B)$  不在同一个  $\sigma$  类。

引理 2 设  $f \in E(X, \sigma)$ , 若  $f$  是右扩张元, 则存在不同的  $g_1, g_2 \in E(X, \sigma)$ , 使得  $g_1 f = g_2 f$ 。

证明: 假设对任意不同的  $g_1, g_2 \in E(X, \sigma)$ ,  $g_1 f \neq g_2 f$ 。由于  $f$  是右扩张元, 于是存在  $E(X, \sigma)$  的真子集  $M$ , 使得  $Mf = E(X, \sigma)$ 。取  $h \in E(X, \sigma) \setminus M$ , 则  $hf \notin Mf = E(X, \sigma)$ , 否则存在  $g \in M$ , 使得  $hf = gf$ ,

这与假设  $hf \neq gf$  矛盾。然而,  $E(X, \sigma)$  是半群,  $hf \in E(X, \sigma) = Mf$ 。因此, 假设错误, 即存在不同的  $g_1, g_2 \in E(X, \sigma)$ , 使得  $g_1f = g_2f$ 。

定理 2 设  $f \in E(X, \sigma)$ ,  $f$  是右扩张元当且仅当下列两条成立:

- 1) 对任意两个不同的  $\sigma$  类  $A$  和  $B$ ,  $f(A)$  和  $f(B)$  不在同一个  $\sigma$  类;
- 2) 存在  $A_0 \in X/\sigma$ , 使得  $f(X) \cap A_0 = \emptyset$ 。

证明: 设  $f$  是右扩张元。由引理 1 知(1)成立。由引理 2 知, 存在不同的  $g_1, g_2 \in E(X, \sigma)$ , 使得  $g_1f = g_2f$ 。由于  $g_1 \neq g_2$ , 于是存在  $A_0 \in X/\sigma$ , 使得  $g_1(A_0) \neq g_2(A_0)$ 。若  $f(X) \cap A_0 \neq \emptyset$ , 取  $y_{A_0} \in f(X) \cap A_0$ , 则  $g_1(y_{A_0}) = g_2(y_{A_0})$ , 又  $g_1(A_0) = g_1(y_{A_0})$ ,  $g_2(A_0) = g_2(y_{A_0})$ , 于是  $g_1(A_0) = g_2(A_0)$ , 这与  $g_1(A_0) \neq g_2(A_0)$  矛盾, 故存在  $A_0 \in X/\sigma$ , 使得  $f(X) \cap A_0 = \emptyset$ 。

设  $f \in E(X, \sigma)$  满足条件(1)、(2)。由(1)知, 对任意  $y \in f(X)$ ,  $f^{-1}(y)$  是一个  $\sigma$  类, 于是对任意不同的  $y_1, y_2 \in f(X)$ , 有  $\overline{y_1} \neq \overline{y_2}$ , 从而对任意  $A \in X/\sigma$ ,  $|A \cap f(X)| \leq 1$ 。由(2)知, 存在  $A_0 \in X/\sigma$ , 使得  $f(X) \cap A_0 = \emptyset$ , 于是存在  $x \in X$ ,  $x \notin f(X)$ 。取定  $y_0 \in X$ ,  $y_0 \notin f(X)$ , 令

$$M = \{h \in E(X, \sigma) | y_0 \in h(X)\}$$

则  $M$  是  $E(X, \sigma)$  的真子集。下证  $Mf = E(X, \sigma)$ 。任取  $g \in E(X, \sigma)$ , 定义  $h \in E(X, \sigma)$  为

$$h(x) = \begin{cases} g(A_x), & \text{若 } \overline{x} \cap f(X) \neq \emptyset; \\ y_0, & \text{若 } \overline{x} \cap f(X) = \emptyset, \end{cases}$$

其中  $A_x \in X/\sigma$ ,  $f(A_x) = y_x$ ,  $y_x \in \overline{x} \cap f(X)$ 。易知  $h \in M$ , 且  $hf(x) = g(\overline{x}) = g(x)$ , 即  $hf = g$ , 于是  $Mf = E(X, \sigma)$ , 故  $f$  是右扩张元。

推论 2 若  $X/\sigma$  有限, 则  $E(X, \sigma)$  没有右扩张元。

证明: 设  $f \in E(X, \sigma)$  是右扩张元。若  $X/\sigma$  有限, 则令  $X/\sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ , 由定理 2 的(1)知, 对任意  $A \in X/\sigma$ ,  $f(X) \cap A \neq \emptyset$ , 这与定理 2 的(2)矛盾, 故  $E(X, \sigma)$  没有右扩张元。

例子: 设  $X = N^+$ ,  $\sigma = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times A_i)$ , 其中  $A_1 = \{1\}$ ,  $A_2 = \{2, 3\}$ ,  $\dots$ ,  $A_i = \{2(i-1), 2i-1\}$  ( $i \geq 2$ ), 则  $X/\sigma = \{A_j\}$  ( $j \in N^+$ )。定义  $f \in E(X, \sigma)$  为  $f(A_j) = j$  ( $j \in N^+$ ), 则  $f$  是满射, 由定理 1 知  $f$  是左扩张元, 定义  $g \in E(X, \sigma)$  为  $g(A_j) = 2j$  ( $j \in N^+$ ), 则对任意两个不同的  $\sigma$  类  $A$  和  $B$ ,  $g(A)$  和  $g(B)$  不在同一个  $\sigma$  类, 且  $A_1 \cap g(X) = \emptyset$ , 由定理 2 知  $g$  是右扩张元。

## 2.2. $F$ 、 $G$ 关系

设  $f \in E(X, \sigma)$ , 令  $E_f = \{x \in X | f(x) = x\}$ ,  $\tau_f$  为  $X$  上由  $\{(x, f(x)) | x \in X\}$  生成的等价关系, 下面描述  $E(X, \sigma)$  的  $F$ 、 $G$  关系, 并据此讨论它的  $F$ 、 $G$  富足性。

定理 3 设  $f, g \in E(X, \sigma)$ ,  $(f, g) \in F$  当且仅当  $\tau_f = \tau_g$ 。

证明: 设  $(f, g) \in F$ 。对任意  $x \in X$ , 记  $x$  所在的  $\tau_f$  类为  $A_x$ , 固定元素  $a_x \in A_x$ , 定义  $e \in E(X, \sigma)$  为  $e(A_x) = a_x$ , 则  $\ker e = \tau_f$ ,  $ef = e$ 。由于  $(f, g) \in F$ , 于是  $eg = e$ , 即  $(x, g(x)) \in \ker e = \tau_f$ , 故  $\tau_g \subseteq \tau_f$ 。同理可证  $\tau_f \subseteq \tau_g$ 。因此,  $\tau_f = \tau_g$ 。设  $\tau_f = \tau_g$ 。若存在  $h \in E(X, \sigma)$ , 使得  $hf = h$ , 则对任意  $x \in X$ , 有  $(x, f(x)) \in \ker h$ , 即  $\tau_f \subseteq \ker h$ 。由于  $\tau_f = \tau_g$ , 于是  $\tau_g \subseteq \ker h$ , 从而  $h(x) = hg(x)$ , 即  $hg = h$ 。同理, 若存在  $h \in E(X, \sigma)$ , 使得  $hg = h$ , 则  $hf = h$ , 故  $(f, g) \in F$ 。

定理 4  $E(X, \sigma)$  是  $F$  富足半群。

证明: 任取  $f \in E(X, \sigma)$ 。对任意  $x \in X$ , 记  $x$  所在的  $\tau_f$  类为  $A_x$ , 固定元素  $a_x \in A_x$ , 定义  $e \in E(X, \sigma)$  为  $e(A_x) = a_x$ , 则  $\ker e = \tau_f$ ,  $e^2 = e$ , 下证  $\tau_f = \tau_e$ 。任取  $(x, y) \in \tau_f = \ker e$ , 则  $e(x) = e(y)$ 。由于  $(x, e(x)) \in \tau_e$ ,  $(y, e(y)) \in \tau_e$ , 于是  $(x, y) \in \tau_e$ , 故  $\tau_f \subseteq \tau_e$ 。由于  $e^2 = e$ , 于是  $(x, e(x)) \in \ker e = \tau_f$ , 从而  $\tau_e \subseteq \tau_f$ 。因此,  $\tau_f = \tau_e$ 。由定理 3 知,  $(f, e) \in F$ , 又因为  $e^2 = e$ , 于是  $f$  是  $F$  富足元, 故  $E(X, \sigma)$  是  $F$  富足半群。

引理 3 设  $f \in E(X, \sigma)$ , 对任意  $A \in X/\sigma$ , 有  $|E_f \cap A| \leq 1$ 。

证明: 若存在  $A_0 \in X/\sigma$ , 使得  $|E_f \cap A_0| \geq 2$ 。取不同的  $a, b \in E_f \cap A_0$ , 则  $a = f(a) = f(b) = b$ , 这与  $a \neq b$  矛盾, 故对任意  $A \in X/\sigma$ , 有  $|E_f \cap A| \leq 1$ 。

引理 4 设  $f \in E(X, \sigma)$ , 存在  $h \in E(X, \sigma)$ , 使得  $fh = h$  当且仅当  $E_f \neq \emptyset$ 。

证明: 若存在  $h \in E(X, \sigma)$ , 使得  $fh = h$ , 则对任意  $A \in X/\sigma$ , 有  $fh(A) = h(A)$ , 于是  $h(A) \in E_f$ , 即  $E_f \neq \emptyset$ 。若  $E_f \neq \emptyset$ , 取  $a \in E_f$ , 定义  $h \in E(X, \sigma)$  为  $h = \begin{pmatrix} X \\ a \end{pmatrix}$ , 则  $fh = h$ 。

定理 5 设  $f, g \in E(X, \sigma)$ ,  $(f, g) \in \mathcal{G}$  当且仅当  $E_f = E_g$ 。

证明: 设  $(f, g) \in \mathcal{G}$ 。若  $E_f = \emptyset$ , 则由引理 4 知, 对任意  $h \in E(X, \sigma)$ ,  $fh \neq h$ , 又  $(f, g) \in \mathcal{G}$ , 于是  $gh \neq h$ , 再由引理 4 知,  $E_g = \emptyset$ 。若  $E_f \neq \emptyset$ , 则由引理 4 知, 存在  $h \in E(X, \sigma)$ , 使得  $fh = h$ , 又  $(f, g) \in \mathcal{G}$ , 于是  $gh = h$ , 再由引理 4 知,  $E_g \neq \emptyset$ 。对任意  $x \in E_f$ , 有  $f(x) = x$ 。定义  $h \in E(X, \sigma)$  为  $h = \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix}$ , 则  $fh = h$ , 又  $(f, g) \in \mathcal{G}$ , 于是  $gh = h$ , 即  $g(x) = x$ , 从而  $E_f \subseteq E_g$ 。同理可证  $E_g \subseteq E_f$ , 故  $E_f = E_g$ 。若  $E_f = E_g = \emptyset$ , 则由引理 4 知, 对任意  $h \in E(X, \sigma)$ ,  $fh \neq h, gh \neq h$ , 这表明  $(f, g) \in \mathcal{G}$ 。若  $E_f = E_g \neq \emptyset$ , 则设  $h \in E(X, \sigma)$ , 且  $fh = h$ , 于是对任意  $x \in X$ , 有  $fh(x) = h(x)$ , 从而  $h(x) \in E_f = E_g$ , 即  $gh(x) = h(x)$ , 故  $gh = h$ 。同理  $gh = h$  也蕴含  $fh = h$ 。因此,  $(f, g) \in \mathcal{G}$ 。

定理 6 设  $f \in E(X, \sigma)$ ,  $f$  是  $\mathcal{G}$  富足元当且仅当  $E_f \neq \emptyset$ 。

证明: 设  $f$  是  $\mathcal{G}$  富足元。由  $f$  是  $\mathcal{G}$  富足元知, 存在  $e \in E(X, \sigma)$ ,  $e^2 = e$ , 且  $(e, f) \in \mathcal{G}$ 。由定理 5 知  $E_f = E_e \neq \emptyset$ 。设  $E_f \neq \emptyset$ 。取定  $a_0 \in E_f$ 。由引理 3 知, 对任意  $x \in X$ ,  $|E_f \cap \bar{x}| \leq 1$ , 于是定义  $e \in E(X, \sigma)$  为

$$e(x) = \begin{cases} a_0, & \bar{x} \cap E_f = \emptyset \\ a_x, & \bar{x} \cap E_f \neq \emptyset \end{cases}, \text{ 其中 } a_x \in E_f \cap \bar{x}.$$

对任意  $x \in X$ , 若  $\bar{x} \cap E_f = \emptyset$ , 则  $e^2(x) = e(e(x)) = e(a_0) = a_0 = e(x)$ 。若  $\bar{x} \cap E_f \neq \emptyset$ , 则  $e^2(x) = e(e(x)) = e(a_x) = a_x = e(x)$ , 即  $e^2 = e$ 。显然,  $E_e \neq \emptyset$ , 下证  $E_f = E_e$ 。任取  $x \in E_f$ , 由  $e$  的定义知  $e(x) = x$ , 即  $E_f \subseteq E_e$ 。反之, 任取  $y \in E_e$ , 则  $e(y) = y$ 。另一方面, 由  $e$  的定义知,  $e(y) = a_0 \in E_f$  或  $e(y) = a_y \in \bar{y} \cap E_f$ , 于是  $y = e(y) \in E_f$ , 即  $E_e \subseteq E_f$ , 故  $E_f = E_e$ 。由定理 5 知  $(f, e) \in \mathcal{G}$ , 又因为  $e^2 = e$ , 故  $f$  是  $\mathcal{G}$  富足元。

定理 7  $E(X, \sigma)$  是  $\mathcal{G}$  富足半群当且仅当  $\sigma = X \times X$ 。

证明: 若  $\sigma = X \times X$ , 显然  $E(X, \sigma)$  是  $\mathcal{G}$  富足半群。设  $E(X, \sigma)$  是  $\mathcal{G}$  富足半群。若  $\sigma \neq X \times X$ , 则  $|X/\sigma| \geq 2$ 。取不同的  $A, B \in X/\sigma$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ , 定义  $f \in E(X, \sigma)$  为  $f = \begin{pmatrix} A & X \setminus A \\ b & a \end{pmatrix}$ , 则  $E_f = \emptyset$ , 由

定理 6 知,  $f$  不是  $G$  富足元, 这与  $E(X, \sigma)$  是  $G$  富足半群矛盾, 故  $\sigma = X \times X$ 。

### 3. 总结

本文首先讨论了半群  $E(X, \sigma)$  的左(右)扩张元。当非空集合  $X$  有限时,  $E(X, \sigma)$  没有左(右)扩张元。当非空集合  $X$  无限,  $\sigma = \{(x, x) | x \in X\}$  时,  $E(X, \sigma) = T(X)$ ,  $f \in E(X, \sigma)$ , 由文献[4],  $f$  是左扩张元当且仅当  $f$  是满射但不是单射,  $f$  是右扩张元当且仅当  $f$  是单射但不是满射。当非空集合  $X$  无限,  $\sigma = X \times X$  时,  $E(X, \sigma)$  没有左(右)扩张元。当非空集合  $X$  无限,  $\sigma \neq \{(x, x) | x \in X\}$ ,  $\sigma \neq X \times X$ , 且  $X/\sigma$  有限,  $E(X, \sigma)$  没有左扩张元, 也没有右扩张元。当非空集合  $X$  无限,  $\sigma \neq \{(x, x) | x \in X\}$ ,  $\sigma \neq X \times X$ , 且  $X/\sigma$  无限,  $f \in E(X, \sigma)$ ,  $f$  是左扩张元当且仅当  $f$  是满射,  $f$  是右扩张元当且仅当对任意两个不同的  $\sigma$  类  $A$  和  $B$ ,  $f(A)$  和  $f(B)$  不在同一个  $\sigma$  类, 且存在  $A_0 \in X/\sigma$ , 使得  $f(X) \cap A_0 = \emptyset$ 。注意到, 当  $\sigma \neq \{(x, x) | x \in X\}$  时, 任意  $f \in E(X, \sigma)$ ,  $f$  都不可能是单射。其次描述了  $E(X, \sigma)$  的  $F$ 、 $G$  关系, 并据此证明了  $E(X, \sigma)$  是  $F$  富足半群, 但未必是  $G$  富足半群, 这与文献[8]证明了  $T(X)$  是  $F$  富足半群, 但未必是  $G$  富足半群的结果一致。

### 基金项目

江西省教育厅科学技术研究项目资助(GJJ213510)。

### 参考文献

- [1] Ljapin, E.S. (1963) Semigroups. Translation of Mathematics Monographs, Vol. 3. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/mmono/003>
- [2] Catino, F. and Migliorini, F. (1992) Magnifying Elements in Semigroups. *Semigroup Forum*, **44**, 314-319. <https://doi.org/10.1007/bf02574350>
- [3] Gutan, M. (1997) Semigroups Which Contain Magnifying Elements Are Factorizable. *Communications in Algebra*, **25**, 3953-3963. <https://doi.org/10.1080/00927879708826098>
- [4] Kaewnoi, T., Petapirak, M. and Chinram, R. (2019) Magnifying Elements in Semigroup of Transformations Preserving Equivalence Relation. *Korean J. Math*, **27**, 269-277.
- [5] Chinram, R. and Baupradist, S. (2018) Magnifying Elements in a Semigroup of Transformations with Restricted Range. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, **30**, 54-58. <https://doi.org/10.35834/mjms/1534384954>
- [6] Chinram, R., Baupradist, S., Yaqoob, N. and Petchkaew, P. (2021) Left and Right Magnifying Elements in Some Generalized Partial Transformation Semigroups. *Communications in Algebra*, **49**, 3176-3191. <https://doi.org/10.1080/00927872.2021.1890104>
- [7] Chen, H., Liu, X. and Wang, S.F. (2023) On Semigroups of Transformations That Preserve a Double Direction Equivalence. *Open Mathematics*, **21**, 1-20. <https://doi.org/10.1515/math-2022-0606>
- [8] Stokes, T. (2022) (F, G)-Abundant Semigroups. *Semigroup Forum*, **104**, 180-194. <https://doi.org/10.1007/s00233-021-10246-2>
- [9] Mendes-Gonçalves, S. and Sullivan, R.P. (2010) Semigroups of Transformations Restricted by an Equivalence. *Open Mathematics*, **8**, 1120-1131. <https://doi.org/10.2478/s11533-010-0066-8>
- [10] Sun, L. and Wang, L. (2016) Abundance of Semigroups of Transformations Restricted by an Equivalence. *Communications in Algebra*, **44**, 1829-1835. <https://doi.org/10.1080/00927872.2015.1029336>
- [11] Han, X. and Sun, L. (2018) A Natural Partial Order on Certain Semigroups of Transformations Restricted by an Equivalence. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **44**, 1571-1579. <https://doi.org/10.1007/s41980-018-0108-8>
- [12] Yan, Q.F. and Wang, S.F. (2021) Some Results on Semigroups of Transformations Restricted by an Equivalence. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **47**, 1289-1300. <https://doi.org/10.1007/s41980-020-00441-2>
- [13] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press.