

区域定型 + 降维积分：两类概率密度计算的统一方法及推广

张 宁, 郭淑妹, 刘 楠, 张 莹

信息工程大学, 河南 郑州

收稿日期: 2026年8月17日; 录用日期: 2026年9月17日; 发布日期: 2026年9月28日

摘 要

边缘概率密度与随机变量和的概率密度是概率论与数理统计的重难点知识, 本文以这两类概率密度计算为研究对象, 以“区域定型 + 降维积分”为统一思想方法, 提炼并系统化一种有效的教学与解题框架, 并推广至积、商等一般二维随机变量函数的概率密度求解场景, 帮助学生突破计算难点, 助力实现举一反三。

关键词

边缘概率密度, 随机变量和的概率密度, 区域定型

Region Determination and Dimension-Reduced Integration: A Unified Method for Two Kinds of Probability Density Calculation and Its Generalization

Ning Zhang, Shumei Guo, Nan Liu, Ying Zhang

Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: August 17, 2026; accepted: September 17, 2026; published: September 28, 2026

Abstract

Marginal probability density and the probability density of the sum of random variables are key and difficult contents in Probability Theory and Mathematical Statistics. Taking the calculation of these two types of probability densities as the research object, this paper adopts the unified methodological idea of Region Determination and Dimension-Reduced Integration, systematizes an effective teaching and problem-solving framework, and extends it to the solution of probability densities for general bivariate

文章引用: 张宁, 郭淑妹, 刘楠, 张莹. 区域定型 + 降维积分: 两类概率密度计算的统一方法及推广[J]. 理论数学, 2026, 16(9): 114-123. DOI: 10.12677/pm.2026.169204

random variable functions such as product and quotient functions. This framework helps students overcome computational difficulties and achieve flexible and transferable problem-solving abilities.

Keywords

Marginal Probability Density, Probability Density of the Sum of Random Variables, Region Determination

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

概率论与数理统计是工科本科阶段的基础性数学学科。该学科理论体系实现了由确定性分析思维向随机性分析思维的范式转变,为各类工程与科研领域的随机现象分析、处理提供核心方法支撑。在多元概率分布的理论体系中,二维连续型随机变量分布是概率论理论推导与体系构建的关键衔接内容。在其核心研究范畴内,边缘概率密度与随机变量和的概率密度求解问题,始终是概率分析中兼具基础性与复杂性的典型计算问题。

现有教材理论体系[1]与传统分析框架大多将两类概率密度求解问题割裂研究,单独推导各自计算公式与求解规则[2]-[4],忽视了二者在积分降维求解机理上的内在逻辑统一性。这种碎片化的分析模式,造成公式形式与数学本质的脱节,研究者仅能掌握表层计算公式,难以吃透积分降维的核心原理,无法精准把握积分变量选取、有效积分区间判定的底层逻辑。针对分段型联合概率密度、非规则有界积分区域等复杂求解场景,传统方法因缺乏统一的求解逻辑框架,极易出现区间判定失误、分段划分混乱等问题。这一缺陷导致传统求解方法通用性较差,难以适配多类复杂随机分布问题,制约了二维随机变量相关概率密度求解方法的体系化、通用化拓展。

针对传统求解体系存在的碎片化、通用性弱、逻辑体系不完善等问题,本文挖掘边缘概率密度与随机变量和的概率密度求解的底层数学机理,提炼“区域定型 + 降维积分”的统一求解思想,系统化构建适配二维概率密度求解的教学方法论与标准化解题框架。该方法有效打通两类概率密度求解问题的方法壁垒,统一其积分运算与区域判定的核心逻辑,从根源上解决复杂场景下分段积分定限混乱、区域划分偏差、变量选取失准等求解难题。在此基础上,本文将该统一求解框架进一步拓展应用于二维随机变量积、商等一般函数的概率密度求解场景,完善了多元随机变量概率密度的通用求解体系,实现同类随机分布求解问题的系统化、可迁移求解,可为概率论随机分布题型教学优化、解题方法规范化提供可行的研究思路与实践参考。

2. 二维连续型随机变量边缘概率密度的计算

2.1. 计算公式

设二元函数 $f(x, y)$ 为二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度,则随机变量 X 和 Y 各自的概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ 分别称为二维连续型随机变量 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度[1]。

(X, Y) 关于 X 的边缘概率密度为: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$;

(X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ 。

2.2. 解题逻辑

边缘密度本质是固定目标变量, 对另一积分变量积分, 实现二元到一元的降维。以 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 为例, 其核心求解逻辑可归纳为两点。

1) 目标一元性: $f_X(x)$ 是关于 x 的一元函数, 函数表达式与其它变量无关; 若 $f_X(x)$ 为分段函数, 分段区间仅由目标变量 x 界定, 此时 x 的取值范围为具体的范围, 也与其它任何变量无关。

2) 区域定型化: 区域定型本质是概率论中确定积分限的标准化数学操作, 即对联合概率密度非零定义域进行规范化区域划分, 统一区域表征形式, 为精准确定积分上下限、分段积分提供依据。

当 $f(x, y)$ 为分区域形式时, 按公式 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ 计算, 要根据被积函数表达式的不同进行讨论, 此时的 $f(x, y)$ 往往在某些区域上有非零的表达式, 在其它区域取值均为零, 我们只需要讨论 $f(x, y)$ 非零的情形, 计算出 $f_X(x)$ 非零的部分[3]。 $f(x, y)$ 非零的区域由 x, y 两个变量综合确定, 可以写成 X 型区域或 Y 型区域, X 型区域(Y 型区域)指变量 $x(y)$ 的上下限都是常数, 而另一个变量 $y(x)$ 上下限是关于 $x(y)$ 的函数。而根据以上的分析, 在讨论时, 需要将 $f(x, y)$ 非零的区域写成 X 型区域, 其中 x 的范围(上下限都是常数)用于对 $f_X(x)$ 分段, 并且综合 y 的范围(与 x 有关)确定 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ 中的 $f(x, y)$, 同时 y 的范围用于确定公式中积分的上下限。

同理可知, 若求 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$, 需将 $f(x, y)$ 非零的区域写成 Y 型区域, 然后进行分段讨论和积分计算。

2.3. 算例分析

例 1 设随机变量 X, Y 具有联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ 。

【分析】 $f(x, y)$ 非零区域如图 1, 首先写出 $f(x, y)$ 非零区域的两种形式:

$G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ —— X 型区域;

$G = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt{y}\}$ —— Y 型区域。

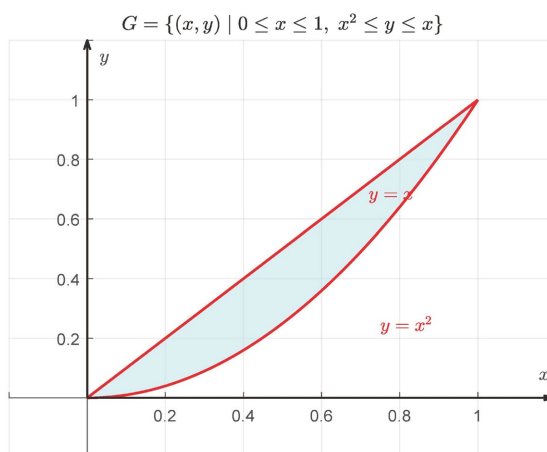


Figure 1. Example 1 non-zero region diagram of probability density
图 1. 例 1 概率密度非零区域图

以求 $f_X(x)$ 为例分析。因为当 $0 \leq x \leq 1$ 且 $x^2 \leq y \leq x$ 时, $f(x, y) = 6$, 此时可表述为:

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2)$;

若 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f(x, y) = 0$, 所以此时 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 0$,

于是可得

$$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

具体求解如下:

解: $f(x, y)$ 非零区域为

$G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ —— X 型区域;

$G = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt{y}\}$ —— Y 型区域。

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x 6 dy, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases};$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

2.4. 规范化求解流程总结

结合边缘概率密度的求解机理与算例推导, 可将二维连续型随机变量边缘概率密度的通用求解流程规范化为四步求解框架。

- 1) 定区域: 划定联合概率密度非零定义域, 区分 X 型、 Y 型区域;
- 2) 分区间: 以目标边缘变量为依据划分分段区间;
- 3) 定上下限: 结合积分变量的范围确定积分上下限;
- 4) 积分整合: 分段计算积分, 整合结果写出完整分段边缘概率密度。

3. 随机变量和的概率密度的计算

3.1. 计算公式

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 其概率密度函数为 $f(x, y)$, 则 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx \text{ 或 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

若 X 、 Y 相互独立, 则 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \text{ 或 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

3.2. 解题逻辑

对比边缘概率密度与随机变量和的概率密度的求解机理, 二者具备高度数学同构性, 核心求解逻辑统一适配“区域定型 + 降维积分”思想, 具体同构特征如下。

- 1) 公式结构同构: $f_Z(z)$ 与 $f_X(x)$ 计算公式的结构是相同的, 均为固定目标变量, 针对另一积分变量积分:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

- 2) 变量属性同构: $f_z(z)$ 与边缘概率密度一致, 是关于目标变量 z 的一元函数, 分段区间仅由 z 界定。
- 3) 区域求解同构: 在公式 $f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$ 中, 被积函数是关于 x 和 z 的二元函数, 在进行区域分析时, 需将 xOy 平面上 $f(x, y)$ 非零的区域通过 $y = z - x$ 变量替换转化到 xOz 平面上, 并且写成 Z 型区域(z 为常数区间, x 为 z 的函数区间), 沿用边缘密度的区域定型、分段积分逻辑, 见表 1。

Table 1. Unified comparison of marginal and sum probability densities
表 1. 边缘概率密度与和的概率密度的统一对比

对比维度	边缘概率密度	和的概率密度
计算公式	$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$	$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$
目标变量	x	z
积分变量	y	x
区域类型	X 型区域(x 为常数区间)	Z 型区域(z 为常数区间)
核心思想	区域定型 + 降维积分	区域定型 + 降维积分

3.3. 算例分析

例 2 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2-x-y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

解 $G = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\} = \{(x, z) | 0 < x < 1, 0 < z - x < 1\}$ (如图 2)

$= \{(x, z) | 0 < z < 1, 0 < x < z\} \cup \{(x, z) | 1 \leq z < 2, z - 1 < x < 1\}$

于是 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \begin{cases} \int_0^z (2-z) dx, & 0 < z < 1 \\ \int_{z-1}^1 (2-z) dx, & 1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} z(2-z), & 0 < z < 1 \\ (2-z)^2, & 1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。

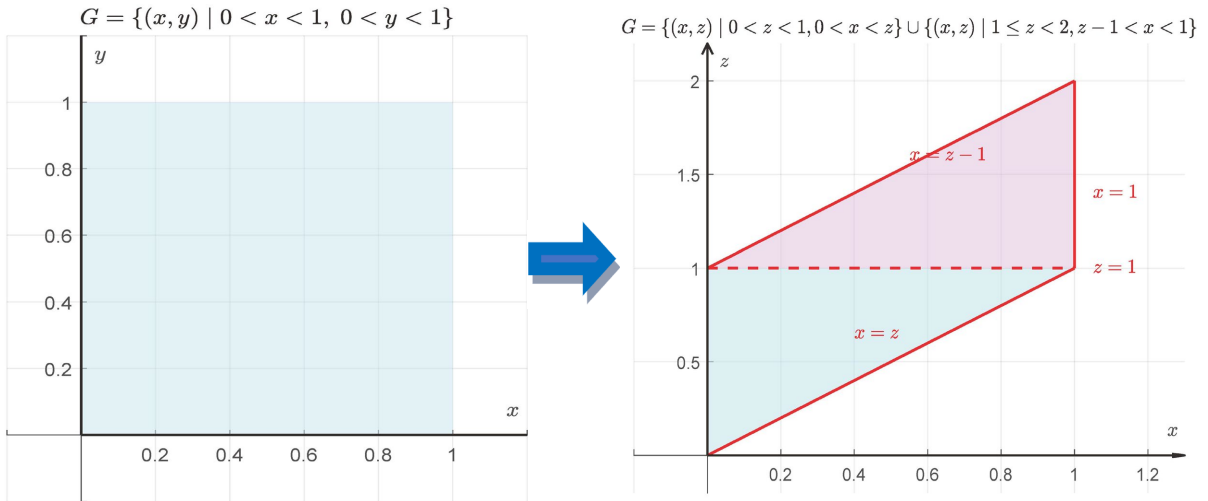


Figure 2. Example 2 non-zero region conversion diagram of probability density
图 2. 例 2 概率密度非零区域转换图

3.4. 规范化求解流程总结

基于和分布概率密度的求解机理与同构性特征, 结合区域定型与降维积分核心思想, 构建标准化、可通用的五步求解框架。

- 1) 变量代换: 利用和的概率密度计算公式完成变量代换;
- 2) 定区域: 划定联合概率密度非零定义域, 转化到 xOz 平面或 yOz 平面, 通过画图或代数分析的方法表示为 Z 型区域;
- 3) 分区间: 以变量 z 为依据划分分段区间;
- 4) 定上下限: 结合 Z 型区域确定积分上下限;
- 5) 积分整合: 分段计算积分, 整合结果, 写出 Z 的完整概率密度。

4. 标准化求解框架的拓展推广

对两类概率密度计算的同构性分析, 进一步思考可以发现, “区域定型 + 降维积分”并非特定问题的专属运算规则, 而是二维随机变量相关概率密度计算的通用性底层方法论, 我们可尝试将标准化的求解框架推广到任意二维随机变量一般函数 $Z = g(X, Y)$ 的概率密度求解问题中, 是一套可落地、可迁移的概率论解题与教学策略, 为构建统一的多维随机分布求解理论体系提供核心支撑。

4.1. 基于已知公式的推广

对于概率密度计算公式已知的常见函数分布, 如商分布、积分布、线性组合分布等[5], 可直接复用统一标准化解题流程, 仅调整变量代换与区域定型形式即可完成求解。

例 3 设随机变量 X, Y 具有联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

求 $Z = \frac{X}{Y}$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 。

解 1) 变量代换: $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(zy, y)|y|dy$, 套用商分布的公式, 实现变量替换。

2) 定区域: 确定联合概率密度非零区域, 写成 Z 型区域(如图 3)。

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\} = \{(z, y) | 0 < zy < 1, 0 < y < 1\} \\ &= \{(z, y) | 0 < z < 1, 0 < y < 1\} \cup \{(z, y) | z \geq 1, 0 < y < \frac{1}{z}\} \end{aligned}$$

3) 分区间: 对 z 分段讨论: 概率密度非零的 z 的取值分为两段 $0 < z < 1, z \geq 1$ 。

4) 定上下限: 确定 y 的积分上下限, $0 < z < 1, z \geq 1$ 时, y 的积分上下限分别为 $0 < y < 1, 0 < y < \frac{1}{z}$ 。

$$5) \text{ 积分整合: } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(zy, y)|y|dy = \begin{cases} \int_0^1 4 \cdot zy \cdot y \cdot y dy, & 0 < z < 1 \\ \int_0^{1/z} 4 \cdot zy \cdot y \cdot y dy, & z \geq 1 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} z, & 0 < z < 1 \\ \frac{1}{z^3}, & z \geq 1 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}.$$

例 3 的求解方法, 完全复刻边缘概率密度、和的概率密度的标准化求解流程, 只要区域定型能够适配对应所求随机变量函数形式即可求解, 充分印证“区域定型 + 降维积分”核心思想具备极强统一性与普适性, 可作为通用教学方法与解题策略, 理论上可通用于所有二维随机变量函数分布计算。

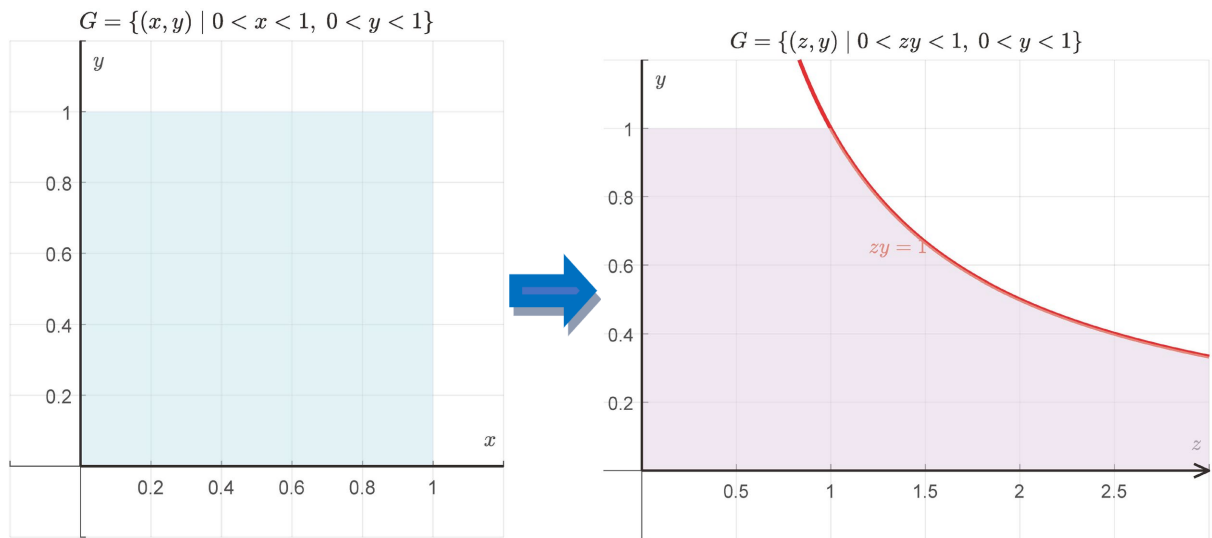


Figure 3. Example 3 non-zero region conversion diagram of probability density

图 3. 例 3 概率密度非零区域转换图

4.2. 基于变量变换定理的通用推广

若二维随机变量函数不是我们熟知的商、积等，其概率密度计算公式未知，理论上需先求得公式。而实际上，对于函数 $Z = g(X, Y)$ 概率密度 $f_Z(z)$ 的计算问题，也可转化为先求出 (X, Z) 或 (Y, Z) 的概率密度，再求其关于 Z 的边缘概率密度问题[6] [7]。可依托变量变换定理，结合“区域定型 + 降维积分”思想完成求解，实现求解框架的全域覆盖。

定理[8] 设 X, Y 的联合概率密度函数为 $f_{X,Y}(x, y)$ ，若对于函数 $\begin{cases} u = g(x, y) \\ v = h(x, y) \end{cases}$ ，满足下述条件：

1) 存在唯一反函数 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ ；

2) 有一切连续的一阶偏导数。记 $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ ，

则 $U = g(X, Y), V = h(X, Y)$ 的联合概率密度为 $f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J|$ 。

可令 $\begin{cases} z = g(x, y) \\ x = x \end{cases}$ 或 $\begin{cases} z = g(x, y) \\ y = y \end{cases}$ ，利用定理即可计算出 (X, Z) 或 (Y, Z) 的概率密度，进而利用“区域定型 + 降维积分”的思想方法求出边缘概率密度 $f_Z(z)$ 。

例 4 设随机变量 (X, Y) 服从单位圆盘上的均匀分布，具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 。

解 令 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = x \end{cases}$ ，反解出原变量 $\begin{cases} x = x \\ y = \pm \sqrt{z - x^2} \end{cases}$ ，有约束条件 $0 \leq z \leq 1, -\sqrt{z} \leq x \leq \sqrt{z}$ 。

$$\text{雅可比行列式绝对值 } |J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, z)} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2\sqrt{z-x^2}}, \quad y \text{ 存在正负两支, 叠加合并}$$

$$f_{X,Z}(x, z) = \left[f(x, \sqrt{z-x^2}) + f(x, -\sqrt{z-x^2}) \right] \cdot |J|$$

当 $0 \leq z \leq 1, -\sqrt{z} \leq x \leq \sqrt{z}$ 时, $f(x, \sqrt{z-x^2}) = f(x, -\sqrt{z-x^2}) = \frac{1}{\pi}$, 所以有

$$f_{X,Z}(x, z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{z-x^2}}, & 0 \leq z \leq 1, -\sqrt{z} \leq x \leq \sqrt{z} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

区域 $G = \{(x, z) | 0 \leq z \leq 1, -\sqrt{z} \leq x \leq \sqrt{z}\}$ 为 Z 型区域, 则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Z}(x, z) dx = \begin{cases} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{1}{\pi\sqrt{z-x^2}} dx, & 0 \leq z \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

4.3. 复杂区域算例验证

前述常规算例的概率密度非零区域多为矩形、三角形等规则凸区域, 积分区间划分简单、定限难度较低, 难以充分体现本文所提求解思想的优越性。下面引入较复杂非凸复杂边界积分区域的算例, 破解传统分段积分易混乱、区域判定易出错的难点。

例 5 设随机变量 X, Y 具有联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{15}, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases},$$

其中区域 G 为正方形 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ 挖去小正方形 $1 < x < 1.5, 1 < y < 1.5$, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 。

$$G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\} \setminus \{(x, y) | 1 < x < 1.5, 1 < y < 1.5\}$$

解 $= \{(x, z) | 0 \leq z < 2, 0 \leq x \leq z\} \cup \{(x, z) | 2 \leq z < 2.5, z-2 \leq x \leq 1 \text{ 或 } z-1 \leq x \leq 2\}$ (如图 4)

$$\cup \{(x, z) | 2.5 \leq z < 3, z-2 \leq x \leq z-1.5 \text{ 或 } 1.5 \leq x \leq 2\} \cup \{(x, z) | 3 \leq z \leq 4, z-2 \leq x \leq 2\}$$

$$\text{于是 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \begin{cases} \int_0^z \frac{4}{15} dx, & 0 \leq z < 2 & \frac{4}{15} z, & 0 \leq z < 2 \\ \int_{z-2}^1 \frac{4}{15} dx + \int_{z-1}^2 \frac{4}{15} dx, & 2 \leq z < 2.5 & \frac{24-8z}{15}, & 2 \leq z < 2.5 \\ \int_{z-2}^{z-1.5} \frac{4}{15} dx + \int_{1.5}^2 \frac{4}{15} dx, & 2.5 \leq z < 3 & \frac{4}{15}, & 2.5 \leq z < 3 \\ \int_{z-2}^2 \frac{4}{15} dx, & 3 \leq z \leq 4 & \frac{16-4z}{15}, & 3 \leq z \leq 4 \\ 0, & \text{其它} & 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

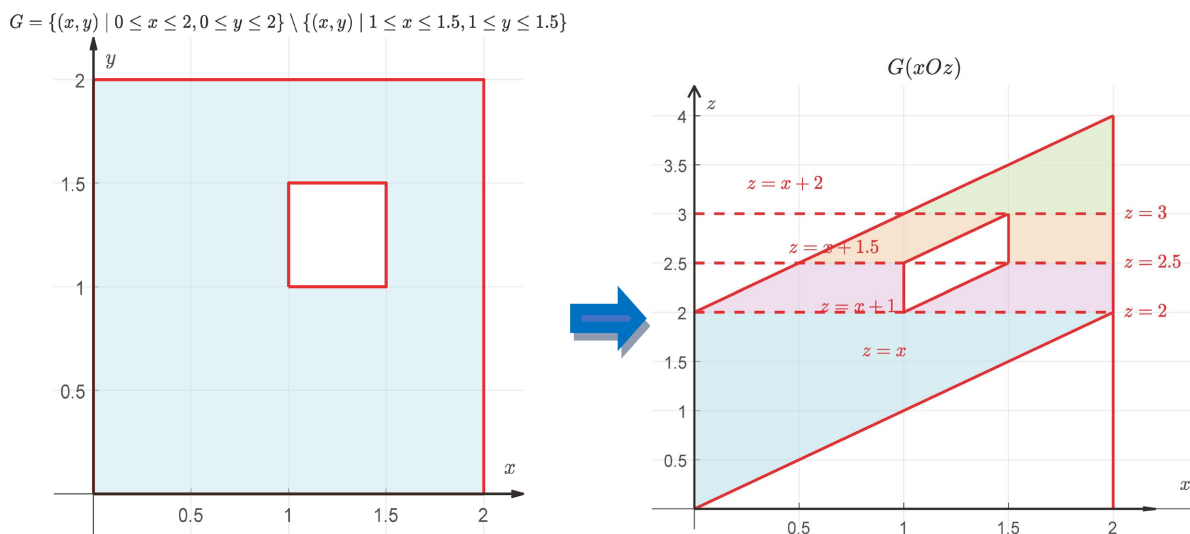


Figure 4. Example 5 non-zero region conversion diagram of probability density

图 4. 例 5 概率密度非零区域转换图

4.4. 方法延伸与变形探讨

1) 高维随机变量场景延伸。对于三维及以上连续型随机变量的函数分布问题，可对本文核心思想进行维度拓展，将二维的“双变量区域定型”升级为高维截面区域定型，通过逐层固定目标变量、对积分变量逐次降维积分的方式，实现高维概率密度的求解。其核心机理与二维场景完全一致，仅需根据高维区域特征调整区域划分形式，可有效解决三维随机变量和、积、线性组合等复杂分布求解问题，为高维随机分布求解提供通用思路。

2) 离散随机变量场景变形。针对离散型二维随机变量概率分布求解问题，可将连续场景的“降维积分”变形为降维求和，保留“区域定型”的核心逻辑：通过划定离散变量的有效取值区域，依据目标变量划分离散取值集合，对积分变量替换为枚举求和，即可适配离散场景下边缘分布、变量和分布的求解，实现连续 - 离散题型的方法贯通，进一步拓宽该教学与解题框架的适用边界。

5. 结语

针对传统二维连续型随机变量概率密度求解体系碎片化、逻辑不统一、通用性薄弱的理论缺陷，本文通过剖析边缘概率密度与随机变量和概率密度的数理同构性，挖掘两类问题积分降维、区域变换的统一底层机理，提炼并系统化形成一套适配二维随机变量概率密度求解的教学方法论与标准化解题策略，有效消解了不同分布模型求解方法的壁垒。本文将该统一机理从基础分布场景推广至积、商及复杂非线性函数分布，结合变量变换定理实现了二维随机变量函数概率密度求解方法的全域适配，完善了多元随机分布求解的理论体系。该研究厘清了随机分布降维转化的核心数理逻辑，为各类二维随机变量分布的规范化解析求解提供了统一理论支撑，也为高维随机分布理论的延伸研究提供了可行参考，具备一定的理论价值与应用意义。

参考文献

- [1] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版, 2008.
- [2] 鞠桂玲, 单彩虹, 陈平等. 求边缘概率密度函数的一个有效方法[J]. 信息系统工程, 2018(5): 135.
- [3] 李佳, 邓有莲. 巧用区域类型求边缘概率和条件概率[J]. 成都师范学院学报, 2016, 32(9): 117-120.

-
- [4] 刘平兵. 二维连续型随机变量函数的密度公式及计算[J]. 数学理论与应用, 2005(4): 94-96.
 - [5] 薛震, 田红霞, 雷英杰. 二维随机变量和、积、商公式的推广[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2015, 36(3): 81-83.
 - [6] 邹洁. 二维随机变量函数密度的两种求法[J]. 高等数学研究, 2011, 14(4): 95-97.
 - [7] 王建平, 姬利娜. 二维连续型随机变量函数的概率密度公式的推广[J]. 河南教育学院学报(自然科学版), 2019, 28(1): 1-5.
 - [8] 邓集贤, 等. 概率论及数理统计: 上册[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版, 2009.