Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(9), 83-96
Published Online September 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.169201

Hans汉斯

半闭原理及其在不动点理论中的应用

贺　龙

太原师范学院数学与统计学院，山西　晋中

收稿日期：2026年8月18日；录用日期：2026年9月14日；发布日期：2026年9月22日

摘　要

半闭原理是非线性泛函分析中连接弱收敛与不动点性质的核心工具，广泛应用于各类迭代算法的收敛性分析。本文系统梳理了半闭原理的定义、基本性质及其在各种映射类与空间结构中的推广。首先在Hilbert空间中建立非扩张映射的Browder半闭原理，进而推广到满足Opial条件或一致凸性的Banach空间。然后讨论了该原理对严格伪压缩映射、伪压缩映射、渐近非扩张映射、集值非扩张映射以及满足边界条件的单调算子的适用性，每种情形均给出严格的数学表述与证明。最后探讨了半闭原理在不动点迭代算法收敛性分析和变分不等式与图像恢复中的应用。

关键词

半闭原理，不动点，Opial条件，非扩张映射，渐近非扩张映射，多值映射

The Demiclosedness Principle and Its Applications in Fixed Point Theory

Long He

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: August 18, 2026; accepted: September 14, 2026; published: September 22, 2026

Abstract

The demiclosedness principle is a core tool in nonlinear functional analysis that bridges weak convergence and fixed point properties, and it is widely applied in the convergence analysis of various iterative algorithms. This paper systematically reviews the definition and fundamental properties of the demiclosedness principle, as well as its generalizations to different classes of mappings and spatial structures. First, we present Browder's demiclosedness principle for nonexpansive mappings in Hilbert spaces, and then discuss its extension to Banach spaces satisfying Opial's condition or uniform convexity. The applicability of the principle is subsequently discussed for strictly pseudocontractive

文章引用: 贺龙. 半闭原理及其在不动点理论中的应用[J]. 理论数学, 2026, 16(9): 83-96.
DOI: 10.12677/pm.2026.169201

mappings, pseudocontractive mappings, asymptotically nonexpansive mappings, set-valued nonexpansive mappings, and monotone operators satisfying certain range conditions; rigorous mathematical formulations and proofs are provided in each case. Finally, the applications of the demiclosedness principle in the convergence analysis of fixed point iterative algorithms, variational inequalities, and image restoration are explored.

Keywords

Demiclosedness Principle, Fixed Point, Opial's Condition, Nonexpansive Mapping, Asymptotically Nonexpansive Mapping, Multivalued Mapping

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

在非线性算子不动点问题的数值求解中，我们通常构造迭代序列$\{x_n\}$并期望其收敛到某个不动点x^*。然而在实际分析中，往往只能证明序列的弱收敛性以及残差$\|x_n - Tx_n\| \to 0$。为了从这两条信息推出$x^* = Tx^*$。我们需要算子T (或$I-T$)具备某种“闭性”条件，即半闭性。

半闭原理最早由 Browder [1]在 Hilbert 空间中针对非扩张映射建立，故也被称为 Browder 半闭性原理，它是证明各类非扩张映射迭代序列收敛于不动点的关键工具。半闭原理为不动点迭代算法的收敛性分析提供了坚实的理论基础：在算法仅能保证序列弱收敛的情况下，半闭性保证了弱极限必为不动点。

Browder [1]利用单调算子理论给出了 Hilbert 空间中非扩张映射的半闭性证明。1967 年，Opial [2]提出了著名的 Opial 条件，并证明了 Hilbert 空间及一类 Banach 空间中非扩张映射的半闭性。半个多世纪以来，半闭原理已被众多学者推广至多种映射类与空间结构，并衍生出丰富的理论成果。从非扩张映射延伸到广义非扩张、严格伪压缩、渐近非扩张等映射算子类型的拓展和从线性空间走向 CAT(0)空间、双曲空间等非线性度量空间结构的推广，该原理已成为证明 Mann、Ishikawa、Halpern 等迭代方法收敛性的理论基础。例如 Zhou [3]-[5]研究了严格伪压缩与 Lipschitz 伪压缩映射的半闭性；Deimling [6]和 Lan-Wu [7]在增生算子与伪压缩映射方面做出贡献；Sahu、O'Regan 与 Agarwal [8]系统地总结了各类 Lipschitz 型映射的半闭性质，包括渐近非扩张映射及多值映射等。本文基于这些文献的经典结果，对半闭原理进行系统整理与深入阐述。

2. 预备知识

2.1. 半闭原理的定义

贯穿全文，$\langle \bullet,\bullet \rangle$和$\|\bullet\|$分别表示内积和范数，$\rightharpoonup$和$\to$分别表示弱收敛和强收敛。$F(T)$表示算子$T$的不动点集。

定义 1 设C是 Banach 空间E的非空子集，$T: C \to E$是一个映射。若对C中任意序列$\{x_n\}$，下述蕴含关系成立：

$$x_n \rightharpoonup x_0 \text{ 且 } Tx_n \to y \Rightarrow x_0 \in C \text{ 且 } Tx_0 = y,$$

则称算子T在点$y \in E$处半闭。在不动点理论中，我们更关心算子$I-T$在零点处的半闭性，即

$$x_n \rightharpoonup x_0 \text{ 且 } (I-T)x_n \to 0 \Rightarrow (I-T)x_0 = 0.$$

也就是说极限点 x_0 是算子 T 的不动点。

半闭原理比通常的连续性要求要弱，连续性要求强收敛的序列映射后为强收敛，而半闭性只要弱收敛也能推出强收敛。

2.2. Opial 条件

Opial 条件在序列的收敛性以及非线性映射的半闭原理研究中起着重要作用，是保证弱收敛必要性的空间几何条件。在 Hilbert 空间 H 或 Banach 空间 E 中，下述引理刻画了弱收敛序列的弱极限的性质。

引理 1 称 Banach 空间 E 满足 Opial 条件，如果对 E 中的任意序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 $x_0 \in E$ 时，都有

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| < \liminf_{n\to\infty}\|x_n - x\|, \forall x \in E, x \neq x_0. \tag{1}$$

在(1)式中用 limsup 代替 liminf 所得的类似条件也是成立的。所有 Hilbert 空间以及 $l^p\ (1<p<\infty)$ 空间均满足 Opial 条件，但 $L^p[0,1]\ (p \neq 2)$ 空间不满足。

2.3. 常见映射类

定义 2 C 是 E 的非空闭凸子集，称算子 $T: C \to C$ 为：

1) 非扩张映射：$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in C$。

2) 广义非扩张映射：$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| + \kappa\|(I-T)x - (I-T)y\|, \forall x, y \in C, 0 \leq \kappa < 1$。

3) κ-严格伪压缩映射：$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \kappa\|(I-T)x - (I-T)y\|^2, \forall x, y \in C, 0 \leq \kappa < 1$。

4) 伪压缩映射：$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|(I-T)x - (I-T)y\|^2, \forall x, y \in C$ 等价于 $I - T$ 是单调算子。

5) 渐近非扩张映射：存在序列 $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ 使得 $\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|, \forall x, y \in C, k_n \in [1, \infty)$。

6) 集值非扩张映射 $T: C \to K(E)$，满足 $H(Tx, Ty) \leq \|x - y\|, \forall x, y \in C$，其中 H 为 Hausdorff 度量。

7) 单调算子：$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq 0, \forall x, y \in C$。

3. 半闭原理相关定理

半闭原理是连接算法构造与识别不动点解的核心工具，半闭原理的四个主要研究方向：算子类型的拓展、空间结构的推广、与迭代算法的结合以及原理的理论深化。在算子方面，从经典的非扩张映射推广至广义非扩张、严格伪压缩、渐近非扩张等更广泛的非线性映射类；在空间方面，从 Hilbert 与 Banach 空间延伸至 CAT(0)空间、双曲空间等非线性度量空间；在算法方面，半闭原理成为证明 Ishikawa、Krasnosel'skii，Mann 等迭代格式收敛性的关键环节；在理论方面，出现了正交子空间拓展、τ 弱半闭性等新概念。本文系统综述这四个方向中的算子拓展和空间推广的主要进展与代表性成果。

3.1. 非扩张映射的半闭原理

压缩映射是结构最简单的非线性映射，但是它的不动点理论已经非常成熟了。相比之下，非扩张映射是结构相对简单的非线性 Lipschitz 映射，其不动点理论也很成熟。在 Hilbert 空间中，Browder 利用单调算子理论证明了半闭性，但该证明依赖于内积结构。随后，人们希望将结果推广至更一般的 Banach 空间，但缺乏内积导致无法使用投影或单调性技巧。Opial 条件的引入提供了一种纯序列极限的方法，而一致凸空间的几何性质(如 Goebel-Kirk 引理)则提供了另一种不依赖 Opial 条件的途径。本小节依次展示这三种证明框架，为后续推广奠定基础。

定理 1 [1]在 Hilbert 空间 H 中，若序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x_0，则对任意 $x \neq x_0$，有

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| < \liminf_{n\to\infty}\|x_n - x\|. \tag{2}$$

证明 因为任意弱收敛序列必然有界，故(2)中的两个极限都是有限的。从而，为证明该不等式，只需注意到在等式

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= \|x_n - x_0 + x_0 - x\|^2 \\ &= \|x_n - x_0\|^2 + \|x_0 - x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x_n - x_0, x_0 - x\rangle\end{aligned}$$

中，最后一项当 $n \to \infty$ 时趋于零。

这一简单的定理能使我们证明 Hilbert 空间中非扩张映射的下述有用性质，该性质在[1]中曾借助单调映射理论得到证明。

定理 2 [1] (Browder 半闭原理) Hilbert 空间 H 中，设 C 是 H 的非空闭凸子集。则对任意非扩张映射 $T: C \to H$，映射 $I - T$ 是半闭的。

证明 1 设序列 $\{x_n\} \subset \mathrm{C}$ 弱收敛到 $x_0 \in C$，且序列 $x_n - Tx_n$ 收敛到 H 中的元素 y_0。则有

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| \geq \liminf_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx_0\| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y_0 - Tx_0\|.$$

因此，由定理 1 可得 $x_0 - Tx_0 = y_0$。

证明 2 T 为非扩张当且仅当补映射 $I - T$ 是 $\frac{1}{2}$ 逆强单调的，于是有

$$\langle (I-T)x_n - (I-T)x_0, x_n - x_0\rangle \geq \frac{1}{2}\|(I-T)x_n - (I-T)x_0\|^2$$

令 $n \to \infty$，我们得到

$$0 \geq \frac{1}{2}\|y_0 - (I-T)x_0\|^2 \Rightarrow (I-T)x_0 = y_0.$$

定理 3 [8]设 E 是满足 Opial 条件的 Banach 空间，C 是 E 的非空弱紧子集。则对任意非扩张映射 $T: C \to E$，映射 $I - T$ 是半闭的。

证明设 $\{x_n\}$ 是 C 中序列，满足 $x_n \rightharpoonup x_0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\|(I-T)x_n - y\| = 0$ 对任意 $y \in E$ 成立。我们要证明 $(I-T)x_0 = y$。注意到

$$\|x_n - Tx_0 - y\| \leq \|x_n - Tx_n - y\| + \|Tx_n - Tx_0\|.$$

这意味着

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| \geq \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y - Tx_0\|.$$

由 Opial 条件，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y - Tx_0\|.$$

存在矛盾。因此 $(I-T)x_0 = y$。

定理 4 [8]设 E 是自反且满足 Opial 条件的 Banach 空间，C 是 E 的非空闭凸子集。则对任意非扩张映射 $T: C \to E$，映射 $I - T$ 是半闭的。

引理 2 [8] (Goebel-Kirk 引理)设 C 是一致凸 Banach 空间 E 的非空凸有界子集，$T: C \to E$ 是非扩张映射。则对任意 $\varepsilon > 0$，存在正数 $\varsigma(\varepsilon) > 0$，使得对任意 $x \in co(\{x_0, x_1\})$ 满足 $\|x - Tx\| < \varepsilon$，其中 $x_0, x_1 \in C$ 满足 $\|x_0 - Tx_0\| < \varsigma(\varepsilon)$ 和 $\|x_1 - Tx_1\| < \varsigma(\varepsilon)$。

该引理描述的是一致凸 Banach 空间中对非扩张映射的一致估计。

定理 5 [8]设 C 是一致凸 Banach 空间 E 的非空闭凸有界子集，$T: C \to E$ 是非扩张映射，则映射 $I - T$

是半闭的。

证明 设$\{x_n\}$是C中序列，满足$x_n \rightharpoonup x_0$且$\lim_{n\to\infty}\|(I-T)x_n - y\| = 0$。对任意$y \in E$成立。

我们证明$(I-T)x_0 = y$。令$T_y x = Tx + y, x \in C$，则$(I-T_y)x_n = (I-T)x_n - y \to 0, x \in C$。若$(I-T_y)x_0 = 0$，有$(I-T)x_0 = y$。因此，不妨设$y = 0$, 令$\varepsilon_n := \|x_n - Tx_n\|$，因$\varepsilon_n \to 0 (n \to \infty)$，我们可以用下述方法筛选子列使其收敛更快：得对任意n有

$$\varepsilon_n \le \varsigma(\varepsilon_{n-1}) < \varepsilon_{n-1}$$

其中对任意$\varepsilon > 0$，$\varsigma(\varepsilon)$是引理2结论中所述的常数。于是对任意点$z \in \overline{co}(\{x_k, k \ge n\})$，我们有$\|z - Tz\| \le \varepsilon_{n-1}$。因为$\overline{co}(\{x_k, k \ge n\})$是弱紧的(从而弱闭的)且包含序列$\{x_n\}$的弱极限$x_0$，故$\|x_0 - Tx_0\| \le \varepsilon_{n-1} \to 0 (n \to \infty)$，因此$x_0 = Tx_0$。

定理5的证明不依赖Opial条件，而是利用一致凸空间的几何结构。利用Goebel-Kirk引理的一致估计，结合弱紧性和凸组合逼近，可证明弱极限点必为不动点。

引理3 [8]设C是一致凸Banach空间E的非空闭凸有界子集，$T: C \to E$是非扩张映射。则$(I-T)(C)$是闭集。

证明 设$y \in \overline{(I-T)(C)}$。则存在$C$中序列$\{x_n\}$使得$x_n \rightharpoonup x_0$且$\lim_{n\to\infty}\|(I-T)x_n - y\| = 0$。因$C$是自反Banach空间中的弱闭有界集，故其为弱紧集。由定理5的结论，我们有$(I-T)x_0 = y$，即$(I-T)(C)$是闭集。

定理6 设C是一致凸Banach空间E的非空闭凸有界子集，$T: C \to E$是非扩张映射。则映射$I-T$在点$y \in E$处半闭。

证明 一致凸Banach空间必自反，由引理3知$(I-T)(C)$是闭集，根据定理4可证明。

定理1~6是非扩张映射在不同空间上的半闭原理证明。从Hilbert空间到Banach空间上的一系列详细证明，为各类不动点迭代算法的收敛性分析提供了坚实的理论基础。经典非扩张映射要求Lipschitz常数恒为1。广义非扩张映射则允许Lipschitz常数在某些点处大于1，但整体满足某种平均条件，这使得它可以覆盖更广泛的非线性算子。2024年Shukla与Panicker [9]在一致凸Banach空间中建立了广义非扩张映射的半闭原理，并由此推导出新的不动点定理。

定理7 设E是一致凸Banach空间，$C \subset E$非空有界闭凸集，$T: C \to C$是广义非扩张映射，则映射$I-T$是半闭的。

数学家们将非扩张映射推广到了更广泛的映射类别和空间结构中，除了最基本的非扩张映射，该原理也被证明适用于平均非扩张映射、渐近平均非扩张映射、稳定非扩张映射以及余强制映射。

3.2. 伪压缩映射的半闭原理

伪压缩映射是比非扩张更广的一类，其补映射为单调算子。伪压缩映射允许映射后像的两点距离变大，只是对内积有上界限制；而非扩张映射严格禁止像的距离变大。在Hilbert空间中，严格伪压缩映射的补映射具有强单调性(逆强单调)，因此半闭性可直接从单调算子的性质推出。但对于一般伪压缩映射，补映射仅为单调，此时需借助额外条件(如连续性、弱内向性)来保证半闭性。本小节展示从严格到一般伪压缩的推广过程，并指出在Banach空间中Opial条件对连续伪压缩映射仍然有效。

Browder与Petryshyn (1967)最早引入了严格伪压缩映射的概念，并证明了$I-T$在Hilbert空间中的半闭性。对于严格伪压缩映射，$I-T$是$\frac{1-\kappa}{2}$-逆强单调的，因此半闭性可由单调算子理论直接推出。下面给出严格伪压缩映射的半闭原理。

定理 8 [3]在 Hilbert 空间 H 中，设 C 是 H 的非空闭凸集。则对任意 κ-严格伪压缩映射 $T:C\to H$，映射 $I-T$ 在任意点 $y_0\in H$ 处半闭。

证明 设 $x_n \rightharpoonup x_0$ 且 $x_n - Tx_n \to y \in H\ (n\to\infty)$，因 T 是 κ-严格伪压缩映射，则有

$$\langle Tx_n - Tx_0, x_n - x_0\rangle \le \|x_n - x_0\|^2 - \frac{1-\kappa}{2}\|(I-T)x_n - (I-T)x_0\|^2$$

即

$$\langle (I-T)x_n - (I-T)x_0, x_n - x_0\rangle \ge \frac{1-\kappa}{2}\|(I-T)x_n - (I-T)x_0\|^2$$

令 $n\to\infty$，得到

$$0 \ge \frac{1-\kappa}{2}\|y_0 - (I-T)x_0\|^2 \Rightarrow (I-T)x_0 = y_0.$$

定理 9 [4]设 C 是实 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集，$T:C\to C$ 是从 C 到自身的半连续伪压缩自映射。则 $F(T)$ 是 C 的闭凸子集，且 $I-T$ 在零点半闭。

证明 首先，我们证明 $C\subset(2I-T)(C)$。对任意 $y\in C$，定义 $G:C\to C$ 为 $G(x)=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}Tx$，则只需证明存在 $x\in C$ 使得 $x=Gx$。事实上，因 $G:C\to C$ 是半连续弱内向强伪压缩映射，利用 Lan 和 Wu ([7], Theorem2.2)，可知 G 有唯一不动点 $x\in C$，这意味着 $C\subset(2I-T)(C)$。

定义 $g:C\to C$ 为 $g(x)\subset(2I-T)^{-1}x$，则 $g:C\to C$ 是非扩张的，满足 $F(g)=F(T)$ 且对所有的 $x\in C$ 有 $\|x-g(x)\|<\|x-Tx\|$。因为 $F(g)$ 是 C 的闭凸子集，故 $F(T)$ 亦然。

现在设 $x_n \rightharpoonup x$ 且 $x_n - Tx_n \to 0\ (n\to\infty)$。则有 $x_n - g(x_n)\to 0\ (n\to\infty)$。对 $I-g$ 应用 Browder 半闭原理，即得 $x=g(x)$，从而 $x=Tx$ 这就证明了定理。

定理 10 [5]设 E 是满足 Opial 条件的实 Banach 空间，C 是 E 的非空弱闭凸子集，$T:C\to C$ 是连续伪压缩映射。则 $I-T$ 在零点半闭。

证明 首先注意，因 C 是弱闭凸集，故为闭凸集。对任意 $y\in C$，定义 $G:C\to C$ 为

$$G(x)=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}Tx,$$

则 $G:C\to C$ 是连续强伪压缩映射。利用 Deimling [6]的结果，G 在 C 中有唯一不动点，即存在唯一的 $x\in C$ 满足

$$x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}Tx,$$

这意味着 $y=(2I-T)x\in(2I-T)(C)$，因此 $C\subset(2I-T)(C)$。于是可定义映射 $g:C\to C$ 为 $g(x)=(2I-T)^{-1}x, x\in C$。显然，$g:C\to C$ 是非扩张自映射，满足 $F(g)=F(T)$ 且对所有的 $x\in C$ 有 $\|x-g(x)\|<\|x-Tx\|$。

现在设 $x_n \rightharpoonup x$ 且 $x_n - Tx_n \to 0\ (n\to\infty)$。则因集合 C 弱序列闭的，有 $x\in C$，且 $x_n - g(x_n)\to 0\ (n\to\infty)$。我们断言 $x=g(x)$。若假设情况并非如此；利用 Opial 条件，我们有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| &\le \limsup_{n\to\infty}\|x_n - g(x)\|\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\|x - g(x_n)\|\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\|x - x_n\|\end{aligned}$$

若 $x \neq g(x)$，则第一个不等式应为严格不等号(由 Opial 条件)，产生矛盾。故 $x = g(x)$，从而 $x = Tx$。证明完成。

定理 8~10 是伪压缩算子在 Hilbert 空间到 Banach 空间上的一系列详细证明。

3.3. 弱内向条件与单调算子的半闭原理

在不动点的理论中，我们需要映射是自映射，但许多实际问题的算子并非自映射，例如约束优化中的投影算子。但是在 Browder 半闭原理中它是非自映射，所以我们需要给出一个自映射约束条件。在一致凸 Banach 空间中，对非自映射证明不动点定理，这需要将 Nagumo 边界条件与半闭原理紧密糅合。因为不是自映射，单纯的非扩张序列可能在集合外面，这时需要 Nagumo 边界条件来强制映射的方向指向集合内部，再借助半闭原理将近似不动点转化为真正的不动点。接下来我们讨论在 Nagumo 边界条件下映射的半闭原理。

定理 11 设 H 是实 Hilbert 空间，C 是 H 的非空闭凸子集，$T: C \to H$ 是半连续单调映射且满足 Nagumo 边界条件 $\lim_{h \to 0^+} h^{-1} d\left(\left(I - hT\right)x, C\right) = 0, \forall x \in C$。则 T 在零点半闭。

证明 设任意 $\{x_n\} \subset C$，$x_n \rightharpoonup x \in H$ 且 $Tx_n \to 0 \left(n \to \infty\right)$。我们要证明 $x \in C$ 且 $Tx = 0$。因 C 是闭凸集，故 $x \in C$。接下来证 $Tx = 0$。记 $y_h = x - hTx, \forall h > 0$。由条件 $\lim_{h \to 0^+} h^{-1} d\left(\left(I - hT\right)x, C\right) = 0, \forall x \in C$ 可知：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < h < \delta$，有

$$\begin{aligned} & d\left(y_h x, C\right) = d\left(\left(I - hT\right)x, C\right) < h\varepsilon \\ & \Rightarrow \exists u_h \in C, \text{s.t.} \left\| y_h - u_h \right\| < h\varepsilon \\ & \Rightarrow \left\| Tx + \frac{u_h - x}{h} \right\| < h\varepsilon \\ & \Rightarrow \frac{u_h - x}{h} \to Tx\left(h \to 0^+\right) \end{aligned} \tag{3}$$

另一方面，由算子 T 的单调性，有

$$\left\langle Tu - Tx_n, u - x_n \right\rangle \geq 0, \forall u \in C, n \in N$$

令 $n \to \infty$，得到

$$\left\langle Tu, u - x \right\rangle \geq 0, \forall u \in C,$$

利用 Minty 定理，得到

$$\left\langle Tx, u - x \right\rangle \geq 0, \forall u \in C,$$

在上式中取 $u = u_h$，得

$$\left\langle Tx, u_h - x \right\rangle \geq 0, \forall h > 0,$$

除以 $h > 0$，得

$$\left\langle Tx, \frac{u_h - x}{h} \right\rangle \geq 0, \forall h > 0,$$

令 $h \to 0^+$，结合(3)式可得

$$-\left\| Tx \right\|^2 \geq 0 \Rightarrow Tx = 0.$$

证明完成。

引理 4 设 H 是实 Hilbert 空间，C 是 H 的非空闭凸子集。则 $T:C\to H$ 满足弱内向条件当且仅当 $A=I-T$ 满足 Nagumo 边界条件 $\lim\limits_{h\to 0^+}h^{-1}d\left(\left(I-hA\right)x,C\right)=0,\forall x\in C$。

证明 ($\Rightarrow$)设 $x\in C$，$Tx\in\overline{I_C\left(x\right)}$，则 $\forall\varepsilon>0,\exists y\in I_C\left(x\right)$ 使得 $\left\|y-Tx\right\|<\varepsilon$。由 $y\in I_C\left(x\right)$ 知，存在 $\exists u\in C,\lambda_0\geq 1$，满足 $y=x+h^{-1}\left(u-x\right),h\in\left(0,\lambda_0\right]$。于是

$$\Rightarrow x+h\left(y-x\right)=u\in C,h\in\left(0,\lambda_0\right].$$

$$\Rightarrow h^{-1}d\left(\left(I-hA\right)x,C\right)\leq h^{-1}\left\|\left(I-h\right)x+hTx-\left[x+h\left(y-x\right)\right]\right\|=\left\|y-Tx\right\|<\varepsilon,$$

这意味着条件 $\lim\limits_{h\to 0^+}h^{-1}d\left(\left(I-hA\right)x,C\right)=0,\forall x\in C$ 成立。

($\Leftarrow$)固定 $x\in C$，对 $\forall\varepsilon>0$，寻找 $h\in\left(0,1\right)$。及 $y\in C$ 使得

$$\begin{aligned}&h^{-1}\left\|x+h\left(Tx-x\right)-y\right\|\leq d\left(x+h\left(Tx-x\right),C\right)+h\varepsilon\\&\Rightarrow\left\|Tx-\left[\left(I-h^{-1}\right)x+h^{-1}y\right]\right\|\leq h^{-1}d\left(x+h\left(Tx-x\right),C\right)+\varepsilon\\&\Rightarrow Tx\in\overline{I_C\left(x\right)}\end{aligned}$$

定理 12 [8]设 E 是 Banach 空间，C 是 E 的非空闭凸子集。则 $T:C\to E$ 是弱内向的当且仅当 $\lim\limits_{h\to 0^+}h^{-1}d\left(\left(I-h\right)x+hTx,C\right)=0,\forall x\in C$。

推论 1 设 H 是实 Hilbert 空间，C 是 H 的非空闭凸子集，$T:C\to H$ 是半连续伪压缩映射且满足弱内向条件。则 $I-T$ 在零点半闭，即 $\forall\left\{x_n\right\}\subset C$，$x_n\rightharpoonup x\in H$ 且 $\left(I-T\right)x_n\to 0\left(n\to\infty\right)\Rightarrow x\in C$ 且 $Tx=x$。

证明令 $A=I-T$，则 $A:C\to H$ 是半连续单调映射。由引理 4，A 满足 Nagumo 边界条件 $\lim\limits_{h\to 0^+}h^{-1}d\left(\left(I-hA\right)x,C\right)=0,\forall x\in C$。利用定理 11，知 A 是半闭的，故 $x\in C$ 且 $Tx=x$。

3.4. 集值映射的半闭原理

实际应用中，可行解或观测约束往往不是一个点，而是一个集合。因此，单值映射不足以描述这类问题，需要集值映射。半闭原理的推广面临新挑战：序列的收敛性和映射值的选取需要同时处理。

定义 3 设 C 是 Banach 空间 E 的非空子集。集值映射 $A:C\to CH\left(E\right)$ 称为非扩张的，如果

$$H\left(Ax,Ay\right)\leq\left\|x-y\right\|,\forall x,y\in C.$$

其中 $H\left(\cdot,\cdot\right)$ 是 $CH\left(E\right)$ 上的 Hausdorff 度量。

定义 4 集值映射 $A:C\to 2^Y$ 的图 $G\left(A\right)$ 定义为 $G\left(A\right)=\left\{\left(x,y\right)\in E\times Y:x\in C,y\in Ax\right\}$，其中 Y 是另一个 Banach 空间。

定义 5 如果 $\left\{x_n\right\}\subset C$，$x_n\rightharpoonup x_0$ 且 $y_n\in Ax_n\to y\Rightarrow x_0\in C$ 且 $y\in Ax_0$。则称集值映射 A 在 $y\in Y$ 处半闭。

我们将证明，对任意紧集的非扩张集值映射 T，在满足 Opial 条件的 Banach 空间中 $I-T$ 是半闭的。

定理 13 [8]设 C 是满足 Opial 条件的 Banach 空间 E 的非空弱紧子集，$T:C\to K\left(E\right)$ 是非扩张集值映射。则映射 $I-T$ 是半闭的。

证明 因为 $I-T$ 的定义域是弱紧的，故只需证明 $I-T$ 的图是序列闭的。设 $\left(x_n,y_n\right)\in G\left(I-T\right)$ 满足 $x_n\rightharpoonup x_0$ 且 $y_n\to y$，则 $x_0\in C$。

我们需证 $y\in\left(I-T\right)x_0$。因为 $y_n\in\left(I-T\right)x_n$。存在 $z_n\in Tx_n$，使得 $y_n=x_n-z_n$。由 T 的非扩张性，存在 $z_n'\in Tx_0$ 满足

$$\left\|z_n-z_n'\right\|\leq H\left(Tx_n,Tx_0\right)\leq\left\|x_n-x_0\right\|,$$

由上式可得

$$\liminf_{n\to\infty}\left\|x_n-y_n-z_n'\right\|=\liminf_{n\to\infty}\left\|z_n-z_n'\right\|\le\liminf_{n\to\infty}\left\|x_n-x_0\right\|, \tag{4}$$

因为Tx_0是紧集且$z_n'\in Tx_0$，$y_n\to y$，故存在子列$z_{n_i}'\in z_n'$使得$z_{n_i}'\to z\in Tx_0$且$y_{n_i}\to y$。

于是由(4)式得

$$\liminf_{n\to\infty}\left\|x_{n_i}-y-z\right\|\le\liminf_{n\to\infty}\left\|x_{n_i}-x_0\right\|,$$

由 Opial 条件

$$\liminf_{n\to\infty}\left\|x_{n_i}-x_0\right\|<\liminf_{n\to\infty}\left\|x_{n_i}-y-z\right\|,$$

矛盾。故$y+z=x_0$，从而$y=x_0-z\in x_0-Tx_0$。

3.5. 渐近非扩张映射的半闭原理

渐近非扩张映射最初由 Goebel 与 Kirk(1972)引入，其定义允许 Lipschitz 常数$k_n\ge1$但趋于 1。非扩张映射的 Lipschitz 常数固定为 1，但渐近非扩张映射允许常数趋于 1，这为处理更广泛的算子(如某些积分算子)提供了可能。我们已经证明了在一致凸 Banach 空间及满足 Opial 条件的空间中，任意非扩张映射都是半闭的。然而，常数变化使传统的基于非扩张性的估计失效，需要引入新的工具，如渐近中心和凸组合技巧。下面给出渐进中心的定义：

定义 6 设E是 Banach 空间，C是E的非空有界闭凸子集，$\{x_n\}$是C中的有界序列。称点x^*为序列$\{x_n\}$在C中的渐近中心，如果

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|x_n-x^*\right\|=\inf_{y\in C}\limsup_{n\to\infty}\left\|x_n-y\right\|,$$

在一致凸且满足 Opial 条件的 Banach 空间中，非空闭凸子集上的序列$\{u_n\}$弱收敛到$u\in C$，则u是$\{u_n\}$关于C的渐近中心。在一致凸 Banach 空间中，有界序列的渐近中心存在且唯一。

引理 5 [8]设C是一致凸 Banach 空间E的非空闭凸子集，$T:C\to C$是渐近非扩张映射。若$\{y_n\}$是C中的有界序列满足$\lim_{n\to\infty}\left\|y_n-Ty_n\right\|=0$，且渐近中心$Z_a\left(\{y_n\},C\right)=\{v\}$，则$v$是$C$中的不动点。

证明 定义C中的序列$\{z_m\}$为$z_m=T^mv,m\in N$。对整数$m,n\in N$，有

$$\begin{aligned}\left\|z_m-y_n\right\|&\le\left\|T^mv-T^my_n\right\|+\left\|T^my_n-T^{m-1}y_n\right\|+\cdots+\left\|Ty_n-y_n\right\|\\&\le k_m\left\|v-y_n\right\|+\sum_{i=1}^{m-1}k_i\left\|Ty_n-y_n\right\|\end{aligned}$$

于是，由上式可得

$$r_a\left(z_m,\{y_n\}\right)=\limsup_{n\to\infty}\left\|y_n-z_m\right\|\le k_mr_a\left(v,\{y_n\}\right)=k_mr_a\left(C,\{y_n\}\right)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left|r_a\left(z_m,\{y_n\}\right)-r_a\left(C,\{y_n\}\right)\right|\le\lim_{n\to\infty}\left(k_m-1\right)r_a\left(C,\{y_n\}\right)=0.$$

从而$T^mv\to v$。由T的连续性得

$$Tv=T\left(\lim_{n\to\infty}T^mv\right)=\lim_{n\to\infty}T^{m+1}v=v.$$

定理 14 [8]设E是满足 Opial 条件的一致凸 Banach 空间，C是E的非空闭凸(不一定有界)子集。则

对任意渐近非扩张映射 $T:C\to C$，映射 $I-T$ 在零点半闭。

证明 设 $\{x_n\}$ 是 C 中序列，满足 $x_n \rightharpoonup x_0$ 且 $(I-T)x_n\to 0$。由定义 6 知道，$\{x_n\}$ 的渐近中心是 x_0。由引理 5 即得 x_0 是 T 的不动点，所以映射 $I-T$ 在零点半闭。

引理 6 [8]设 E 是满足 Opial 条件的 Banach 空间，C 是 E 的非空弱紧凸子集。则对任意渐近非扩张映射 $T:C\to C$，若 $\{x_n\}$ 是 C 中序列满足 $x_n \rightharpoonup x_0\in C$ 且 $(I-T)x_n\to 0\ (n\to\infty)$，则 $\{T^n x_0\}$ 弱收敛到 x_0。

定理 15 [8]设 E 是满足局部一致 Opial 条件的 Banach 空间，C 是 E 的非空弱紧凸子集。则对任意渐近非扩张映射 $T:C\to C$，映射 $I-T$ 在零点半闭。

证明 设 $\{x_n\}$ 是 C 中序列，有 $x_n \rightharpoonup x_0\in C$ 且 $(I-T)x_n\to 0\ (n\to\infty)$。由引理 5，有 $T^n x_0 \rightharpoonup x_0$。因为 T 是渐近非扩张的，有

$$\limsup_{m\to\infty}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\|T^n x_0-T^m x_0\right\|\right)\le\limsup_{m\to\infty}\left(\limsup_{n\to\infty}k_m\left\|T^{n-m}x_0-x_0\right\|\right)=\limsup_{n\to\infty}\left\|T^n x_0-x_0\right\|,$$

这推出 $T^m x_0\to x_0$。由 T 的连续性得 $x_0=Tx_0$。

定理 16 [8]设 C 是一致凸 Banach 空间 E 的非空闭凸有界子集，$T:C\to C$ 是渐近非扩张映射。则映射 $I-T$ 在零点半闭。

证明 设 $\{x_n\}$ 是 C 中序列，有 $x_n \rightharpoonup x_0\in C$ 且 $(I-T)x_n\to 0\ (n\to\infty)$。我们证明 $T^n x_0\to x_0$。事实上，因 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x_0, 对任意整数 $n\in N$，存在凸组合

$$y_n=\sum_{i=1}^{m(n)}t_i^{(n)}x_{i+n},\ t_i^{(n)}\ge 0,\ \sum_{i=1}^{m(n)}t_i^{(n)}=1.$$

使得 $\|y_n-x_0\|<\dfrac{1}{n}$。对任意固定的 $j\in n$，因 $(I-T)x_n\to 0$，存在足够大的 $n_0=n_0\{\varepsilon,j\}$ 使得 $\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon$ 且当 $n\ge n_0$ 时 $\left\|\left(I-T^j\right)x_n\right\|<\varepsilon$。

因为 E 是一致凸的，存在严格递增的凸连续函数 $g:R^+\to R^+$，$g(0)=0$，使得对任何非扩张映射 $S:C\to E$，对 C 中任意有限个元 $\{u_i\}_{i=1}^n$ 及任意非负数组 $\{t_i\}_{i=1}^n$ 满足 $\sum_{i=1}^n t_i=1$。下述不等式成立：

$$g\left(\left\|S\left(\sum_{i=1}^{m(n)}t_i u_i\right)-\sum_{i=1}^{n}t_i Su_i\right\|\right)\le\max_{1\le i.j\le n}\left(\left\|u_i-u_j\right\|-\left\|Su_i-Su_j\right\|\right)\tag{5}$$

设 L_j 是 T^j 的 Lipschitz 常数。则 $L_j^{-1}T^j$ 在 C 上是非扩张的，由(5)式可得

$$\begin{aligned}\left\|T^j y_n-y_n\right\|&\le\left\|T^j y_n-\sum_{i=1}^{m(n)}t_i^{(n)}T^j x_{i+n}\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{m(n)}t_i^{(n)}T^j x_{i+n}-y_n\right\|\\&\le\left\|T^j\left(\sum_{i=1}^{m(n)}t_i^{(n)}T^j x_{i+n}\right)-\sum_{i=1}^{m(n)}t_i^{(n)}T^j x_{i+n}\right\|+\sum_{i=1}^{m(n)}t_i^{(n)}\left\|T^j x_{i+n}-x_{i+n}\right\|\\&\le L_j g^{-1}\left(\max_{1\le i.k\le m(n)}\left(\left\|x_{i+n}-x_{k+n}\right\|-L_j^{-1}\left\|T^j x_{i+n}-T^j x_{k+n}\right\|\right)\right)+\varepsilon\\&\le L_j g^{-1}\left(2\varepsilon+\left(1-L_j^{-1}\right)\mathrm{diam}(C)\right)+\varepsilon\end{aligned}\tag{6}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\left\|x_{i+n}-x_{k+n}\right\|-L_j^{-1}\left\|T^j x_{i+n}-T^j x_{k+n}\right\|&\le\left\|x_{i+n}-T^j x_{i+n}\right\|+\left\|x_{k+n}-T^j x_{k+n}\right\|+\left(1-L_j^{-1}\right)\left\|T^j x_{i+n}-T^j x_{k+n}\right\|\\&\le 2\varepsilon+\left(1-L_j^{-1}\right)\mathrm{diam}(\mathrm{C})\end{aligned}$$

在(6)式中对 $n\to\infty$ 并取上极限，得到对所有的 $j\in N$，

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|T^J y_n - y_n\right\| \le L_j g^{-1}\left(2\varepsilon + \left(1-L_j^{-1}\right)\operatorname{diam}(C)\right)+\varepsilon, \tag{7}$$

对任意 $j\in N$，有

$$\begin{aligned}\left\|T^J x_0 - x_0\right\| &\le \left\|T^J x_0 - T^J y_n\right\| + \left\|T^J y_n - y_n\right\| + \left\|y_n - x_0\right\| \\ &\le \left(L_j+1\right)\left\|x_0 - y_n\right\| + \left\|T^J y_n - y_n\right\|\end{aligned} \tag{8}$$

因为 $y_n\to x_0$，由(7)和(8)可得

$$\begin{aligned}\left\|T^J x_0 - x_0\right\| &\le \limsup_{n\to\infty}\left(\left(L_j+1\right)\left\|x_0 - y_n\right\| + \left\|T^J y_n - y_n\right\|\right) \\ &\le L_j g^{-1}\left(2\varepsilon + \left(1-L_j^{-1}\right)\operatorname{diam}(C)\right)+\varepsilon \\ &= g^{-1}(0) = 0\end{aligned}$$

令 $j\to\infty$ 和 $\varepsilon\to 0$，即得 $\left\|T^J x_0 - x_0\right\|\le 0$，这说明 $T^n x_0\to x_0$，再由 T 的连续性得 $x_0 = Tx_0$。

从定理 15 和定理 16 可以看出，半闭性成立的条件是一致凸且满足 Opial 条件，或一致凸且 C 是有界闭凸集。

定理 17 [8]设 E 是具有弱连续对偶映射 $J_\mu : E\to E^*$ (以 μ 为规范函数)的 Banach 空间，C 是 E 的非空闭凸子集，$T: C\to C$ 是一致连续的近 Lipschitz 映射，具有序列 $\left\{\left(\eta\left(T^n\right), a_n\right)\right\}$ 且 $\lim_{n\to\infty}\eta\left(T^n\right)=1$，则映射 $I-T$ 在零点半闭。

推论 1 [8]设 E 是具有弱连续对偶映射 $J_\mu : E\to E^*$ 的Banach空间，C 是 E 的非空闭凸子集，$T: C\to C$ 是渐近非扩张映射。则映射 $I-T$ 在零点半闭。

定理 18 [8]设 E 是满足 Opial 条件的一致凸 Banach 空间，C 是 E 的非空闭凸子集，$T: C\to E$ 是弱内向连续伪压缩映射。则映 $I-T$ 在零点半闭。

证明 设 $\{x_n\}$ 是 C 中序列，有 $x_n \rightharpoonup x_0\in C$ 且 $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - Tx_n\right\|=0$。由定义 6 指出，若序列 $\{u_n\}$ 属于具有 Opial 性质的一致凸 Banach 空间中的非空闭凸子集，且弱收敛到 $u\in C$，则 u 是 $\{u_n\}$ 关于 C 的渐近中心。我们有渐近中心 $Z_a\left(\{x_n\}, C\right)=\{z\}$，

对任意 $r>0$，定义 $A_T : C\to E$ 为 $A_T := I + r(I-T)$。则已知 $C\subset A_T(C)$，并且因 A_T 是一对一的，故可定义 $g: C\to C$ 为 $g = A_T^{-1}$，它是非扩张的。因为 $A_T\left(x_n\right) = x_n + r\left(x_n - Tx_n\right)$，故有 $x_n = g\left(x_n + r\left(x_n - Tx_n\right)\right)$，于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - g\left(x_n\right)\right\| &\le \lim_{n\to\infty}\left\|g\left(x_n + r\left(x_n - Tx_n\right)\right) - g\left(x_n\right)\right\| \\ &\le \lim_{n\to\infty} r\left\|x_n - Tx_n\right\| = 0.\end{aligned}$$

进而，

$$\begin{aligned}r_a\left(g(z), \{x_n\}\right) &= \limsup_{n\to\infty}\left\|x_n - g(z)\right\| \\ &\le \limsup_{n\to\infty}\left\|g\left(x_n\right) - g(z)\right\| \\ &\le \limsup_{n\to\infty}\left\|x_n - z\right\|,\end{aligned}$$

由此推出 $g(z)=z$，从而 z 也是 T 的不动点。因渐近中心唯一，故 $x_0 = Tx_0$。

以后多位学者给出更广泛的研究，例如 2015 年 Wan [10]的研究则将半闭原理拓展到渐近非扩张映射

的 Browder-Petryshyn 类型。

4. 应用与展望

4.1. 不动点的收敛性证明

半闭原理是连接“弱收敛”与“强极限方程”的桥梁。在求解不动点时，我们通常通过迭代生成一个序列$\{x_n\}$，例如 Ishikawa 迭代、Mann 迭代等，但这个序列$\{x_n\}$往往只有弱收敛性质，很难直接证明其强收敛。我们就需要借助半闭原理来证明这个弱极限$\{x_0\}$就是我们要找的不动点。这使得该原理成为证明 Mann、Ishikawa、Halpern 等迭代方法收敛性的理论基础。具体思路为：

在不动点迭代算法中，我们先证迭代序列$\{x_n\}$残差趋于 0、序列整体有界；利用自反空间有界序列必有弱收敛子列，再借助算子半闭原理，可得子列弱极限是算子不动点；最后结合不动点唯一、算子单调等条件，即可证明整条迭代序列收敛，完成迭代算法收敛性证明。下面以经典的 Mann 迭代算法为例，展示利用半闭原理证明收敛性的流程。

定理 19 设E是满足 Opial 条件的自反 Banach 空间，C是E的非空闭凸子集，对任意非扩张映射$T:C\to C$有不动点集$F(T)\neq\varnothing$。任取$x_1\in C$，序列$\{x_n\}$由 Mann 迭代$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTx_n$生成，其中步长$\alpha_n\subset[0,1]$满足$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)=\infty$，$\alpha_n\to 0$。则序列$\{x_n\}$弱收敛到算子$T$的不动点

证明 1) 有界性：对任意$p\in F(T)$，利用非扩张性可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|&\le\|(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTx_n-p\|\\&\le(1-\alpha_n)\|x_n-p\|+\alpha_n\|Tx_n-p\|\\&\le\|x_n-p\|\end{aligned}$$

由归纳法可知$\|x_n-p\|\le\|x_1-p\|$，故序列$\{x_n\}$有界。

2) 残差趋于 0：利用标准不等式得

$$\|x_{n+1}-p\|^2\le\|x_n-p\|^2-\alpha_n(1-\alpha_n)\|x_n-Tx_n\|^2$$

结合$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)=\infty$，可推出$\|x_n-Tx_n\|\to 0$。

3) 弱收敛子列：由于序列$\{x_n\}$有界且空间自反，则存在子列$\{x_{n_k}\}$弱收敛到某点x^*。

4) 应用半闭原理：由步骤(2)，残差$\|x_n-Tx_n\|\to 0$，即$(I-T)x_n\to 0$。因为非扩张映射满足半闭原理(定理 4)，由$x_{n_k}\rightharpoonup x^*\in C$且$(I-T)x_{n_k}\to 0$，可知$x^*\in F(T)$。

5) 整列收敛：利用 Opial 条件的标准矛盾论证，可证明所有弱聚点相同，故序列$\{x_n\}$弱收敛到算子T的不动点x^*。

该流程清晰展示了半闭原理在连接算法生成的弱极限与目标不动点中的核心作用。

4.2. 变分不等式中的弱收敛

在 Hilbert 空间或 CAT(0)空间中，诸多投影迭代算法可以写成非扩张或渐近非扩张映射的不动点形式。Hilbert 空间中，非扩张映射T满足经典的半闭原理，则弱收敛序列可证明其收敛到不动点。半闭原理可推广至渐近非扩张映射，并在一致凸 Banach 空间的框架下仍然成立。对于 CAT(0)空间，弱收敛被Δ-收敛替代，同样可建立相应的半闭性质，这是测地线度量空间中投影算法的核心工具。利用上述事实，只需证明迭代产生的序列有界且逐步逼近其像，即可从任一弱(或Δ-)聚点直接获得不动点，从而锁定变分不等式的解。

进一步，若变分不等式问题具有非空解集，则不动点集恰与该解集重合。此时结合 Fejér 单调性(即

对任意解p，有$d\left(x_{n+1},p\right)\le d\left(x_n,p\right)$)，可证明序列的所有弱聚点均属于解集；在 Hilbert 空间中借助 Opial 条件，在 CAT(0)空间中借助Δ-收敛的唯一性，即可推出整列弱(或Δ-)收敛到某一解。以经典投影梯度法为例，变分不等式$\left\langle F\left(x\right),y-x\right\rangle\ge 0,\forall y\in C$等价于不动点问题$x=P_C\left(x-\lambda F\left(x\right)\right)$。当$F$满足逆强单调且步长$\lambda$适当小时，映射$P_C\left(I-\lambda F\right)$为非扩张，直接纳入上述框架。即使面对单调性更弱的伪单调问题，亦可通过外梯度、次梯度外梯度等修正算法，将其转化为渐近非扩张映射的不动点迭代，从而在弱收敛意义下获得严格的收敛性证明。这一途径将变分不等式求解归结为不动点迭代的弱收敛分析，为无穷维空间中的算法设计与理论保障奠定了基础。

4.3. 图像恢复与凸可行性

在图像恢复中，交替投影方法常构造非扩张映射，其不动点对应可行解。当约束条件非凸时，半闭原理可用于分析迭代序列的渐近行为。集值投影算子的半闭性用于处理含噪声或不确定性的可行性问题。

在数字图像恢复与重构问题中，目标往往被建模为寻找满足某些物理约束(如非负性、有界性、观测一致性等)的最优解。这类问题本质上可以被抽象为凸可行性问题，而交替投影法是解决该问题的核心算法之一。从泛函分析的视角来看，交替投影过程常常被构造为非扩张映射的组合迭代，该映射的不动点集恰恰对应着满足所有约束条件的可行解集合。因此，研究非扩张映射的不动点性质，直接关系到图像恢复算法能否收敛到正确目标。

然而，实际图像处理中的约束条件往往不是凸的。当约束集丧失凸性时，常规的收敛性证明失效，迭代序列可能出现周期振荡或陷入局部极值。在此情形下，半闭原理为分析非凸约束下迭代序列的渐近行为提供了强有力的理论工具，它保障了迭代误差与理想解之间的弱收敛性质。更为复杂的是，现实环境中的观测数据常含有噪声或不确定性，针对这种情形，传统的单值投影算子不再适用。多值投影算子的研究开始显现价值，其半闭性理论有望突破限制，为处理含噪数据或不确定性集条件下的可行性问题建立严格的数学基础。

4.4. 后续研究方向

半闭原理不仅在 Hilbert 空间和 Banach 空间中成立，也被推广到了更抽象的几何空间，如 CAT(0)空间[11]和一致凸 w-双曲空间。未来的研究可从以下三个前沿方向展开，旨在推动不动点理论与现代图像处理及非线性分析的深度融合：

1) CAT(0)空间中的伪压缩映射研究

传统的非线性分析理论多建立在 Hilbert 或 Banach 空间之上。CAT(0)空间[12]作为 Hilbert 空间的一个高度非线性推广，在数学及计算机科学中具有重要地位。后续研究应着重在 CAT(0)空间中引入并研究伪压缩映射的性质，探究连续伪压缩映射是否满足类似定理 9 的半闭性。若成立，所需的几何条件是什么。这一问题的解决将为单调变分不等式在测地线空间中的数值方法提供理论基础，这将为解决复杂的单调包含问题和变分不等式提供全新的数学工具，从而拓宽图像处理中非线性约束问题的求解路径。

2) 集值渐近非扩张映射的迭代算法收敛性

在非线性算子理论中，单值算子的研究已相对成熟，但集值算子[13]的动力学行为更加贴合实际的现实模型。未来的研究可以聚焦于集值渐近非扩张映射。在 Opial 条件或一致凸的 CAT(0)空间框架下，如何将半闭性原理扩展到多值情景，并探索如 Mann 迭代、Ishikawa 迭代等算法的收敛性，研究可证明 Mann 迭代序列弱聚点属于不动点集的条件，如何将渐近中心的技巧推广到集值情形。这不仅能在理论上丰富不动点理论，还将为多源数据融合或具有多个可行解的逆向问题提供稳健的数值算法支撑。

3) 基于广义空间的非光滑分析与优化算法结合

在实际应用(如压缩感知、全变分图像去噪)中，目标函数往往具有非凸、不可微的非光滑特征。因此，将半闭原理与次梯度投影及邻近点算法进行有机结合，是解决非光滑优化问题的关键。当前研究的另一个重要趋势是，将基于 Hilbert 空间建立的算法体系突破限制，推广至更一般的 Banach 空间乃至测地度量空间。在缺乏内积结构的一般空间中。例如在一致凸且光滑的 Banach 空间中，建立次梯度投影算子的半闭性，利用对偶映射和 Bregman 距离构造非扩张迭代，并证明其弱收敛性，这需要将半闭原理与非光滑分析的次微分工具结合，为更一般的信号处理问题提供理论保证。

5. 总结

半闭原理在不动点理论与迭代算法收敛性分析中的核心作用，是连接迭代算法生成的弱极限与目标不动点之间的桥梁，为证明各种不动点迭代算法的收敛性提供了理论基础。本文系统整理并证明了 Hilbert 空间和 Banach 空间中非线性映射的半闭原理，包括非扩张映射、渐近非扩张映射、伪压缩映射及集值映射的经典结果，并给出了详细的论证过程。这些结果构成了非线性算子迭代算法收敛性分析的基石。未来研究可进一步探索在更一般的空间(如 CAT(0)空间)或更弱的正则性条件下的半闭性。

半闭原理的研究正朝着更广泛的算子、更一般的空间、更高效的算法以及更深刻的理论四个方向深入发展。其核心价值在于它作为一座桥梁，成功地将算法生成的“弱收敛”序列与待求解的“不动点”连接起来，为分析和设计非线性问题的数值解法提供了坚实的理论基础。

参考文献

[1] Browder, F.E. (1965) Fixed Point Theorems for Noncompact Mappings in Hilbert Space. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **53**, 1272-1276. https://doi.org/10.1073/pnas.53.6.1272

[2] Opial, Z. (1967) Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Nonexpansive Mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 591-597. https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1967-11761-0

[3] Zhou, H.T. (2008) Convergence Theorems of Fixed Points for κ-Strict Pseudo-Contractions in Hilbert Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **69**, 456-462. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.05.032

[4] Zhou, H.Y. (2008) Convergence Theorems of Fixed Points for Lipschitz Pseudo-Contractions in Hilbert Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **343**, 546-556. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.045

[5] Zhou, H. (2009) Strong Convergence of an Explicit Iterative Algorithm for Continuous Pseudo-Contractions in Banach Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **70**, 4039-4046. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.08.012

[6] Deimling, K. (1974) Zeros of Accretive Operators. *Manuscripta Mathematica*, **13**, 365-374. https://doi.org/10.1007/bf01171148

[7] Lan, K.Q. and Wu, J.H. (2002) Convergence of Approximants for Demicontinuous Pseudo-Contractive Maps in Hilbert Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **49**, 737-746. https://doi.org/10.1016/s0362-546x(01)00130-4

[8] Sahu, D.R., O’Regan, D. and Agarwal, R.P. (2009) Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications. Springer, 48-128.

[9] Shukla, R., Panicker, R. and Vijayasenan, D. (2024) Demiclosed Principle and Some Fixed-Point Theorems for Generalized Nonexpansive Mappings in Banach Spaces. *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering*, **2024**, 1-15. https://doi.org/10.1186/s13663-024-00765-2

[10] Wan, L.L. (2015) Demiclosed Principle and Convergence Theorems for Total Asymptotically Nonexpansive Non-Self Mappings in Hyperbolic Spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, **2015**, Article No. 4. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2015-4

[11] Kirk, W.A. and Panyanak, B. (2008) A Concept of Convergence in Geodesic Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **68**, 3689-3696. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.04.011

[12] Saejung, S. (2009) Halpern’s Iteration in CAT(0) Spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, **2010**, 25-41. https://doi.org/10.1155/2010/471781

[13] Dhompongsa, S., Kirk, W.A. and Panyanak, B. (2007) Nonexpansive Set-Valued Mappings in Metric and Banach Spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **8**, 35-45.