

Hölder不等式及其应用

何 胜

四川建筑职业技术大学基础教学部数学教研室, 四川 德阳

收稿日期: 2026年8月19日; 录用日期: 2026年9月22日; 发布日期: 2026年9月29日

摘 要

本文首先给出Young不等式的基本形式, 在此基础上, 证明经典的Hölder不等式的积分形式。在应用层面, 选取函数估计、泛函极值、Minkowski不等式证明三个典型场景, 展示Hölder不等式在分析问题中的具体用法, 本文可作为学习Hölder不等式的补充材料。

关键词

Young不等式, Hölder不等式, Minkowski不等式, 函数估计

Hölder's Inequality and It's Applications

Sheng He

Department of Basic Education, Sichuan University of Architectural Technology, Deyang Sichuan

Received: August 19, 2026; accepted: September 22, 2026; published: September 29, 2026

Abstract

This paper begins with the basic form of Young's inequality, based upon which the integral form of the classical Hölder inequality is established. Three typical applications are then presented—namely, function estimation, functional extremum problems, and the proof of Minkowski's inequality—to illustrate the role of Hölder's inequality in various analytical contexts. The paper is intended to serve as a supplementary reference for students and researchers studying Hölder's inequality.

Keywords

Young's Inequality, Hölder's Inequality, Minkowski's Inequality, Function Estimation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在分析数学中, Hölder 不等式是最基本、最重要的不等式之一。它通过引入共轭指数对 $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 准确刻画了不同幂次可和(或可积)的数学对象与其乘积的和(或积分)之间的不等式关系。Hölder 不等式自 1889 年被德国数学家 Otto Hölder 提出以来, 已广泛应用于实变函数、泛函分析、偏微分方程等数学分支。

近年来, 国内外学者对 Hölder 不等式的研究主要围绕以下几个方向展开:

1) 形式的推广: 将 Hölder 不等式推广到加权形式、多重函数形式、矩阵形式等。如乔建斌[1]对 Hölder 不等式的离散形式与积分形式进行了推广; 黄灿[2]给出了 Hölder 型矩阵不等式及改进结果。

2) 等价关系的探讨: 研究 Hölder 不等式与其他著名不等式(如 Young 不等式、Minkowski 不等式、Cauchy-Schwarz 不等式)之间的等价性或蕴含关系。如沈诗雨[3]给出了可积函数 Hölder 不等式的若干等价不等式。

3) 专业领域的深入应用: 将 Hölder 不等式应用于 Sobolev 空间理论、偏微分方程正则性理论、调和分析等前沿领域。如 Brasco 等[4]在 Sobolev 嵌入和距离函数的研究中系统使用了 Hölder 不等式。

然而, 尽管 Hölder 不等式在理论研究中被频繁使用, 对它在各类常见数学问题中的应用进行系统梳理和归纳的工作相对较少。现有文献多侧重于某一方向的推广或某一领域的应用, 缺少一条从基础到应用的完整学习路径。

基于此种情况, 本文从 Young 不等式出发, 给出 Hölder 不等式积分形式的完整证明, 并通过三个典型例题展示其在函数估计、泛函极值以及证明 L_p 空间三角不等式中的应用。本文兼顾逻辑完整性与可读性, 可作为学习 Hölder 不等式的补充材料。

2. Young 不等式

如果 $a > 0$ 且 $b > 0$, 而数 p, q 满足: $p > 1, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, 当且仅当 $a^p = b^q$ 时, 等号成立。

若令 $s = a^p, t = b^q$, 则有 $a = s^{\frac{1}{p}}, b = t^{\frac{1}{q}}$, 在条件不变的情况下, 可得到 Young 不等式的变形形式 $s^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{q}} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q}$, 当且仅当 $s = t$ 时, 等号成立。

几何直观: Young 不等式的几何意义可以通过幂函数 $y = x^u$ 的图像来理解: 由 $\int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}$, $\int_0^b x^{q-1} dx = \frac{b^q}{q}$ 可知 $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ 等于该函数在两个区间上的面积之和, 而 ab 表示以 a 和 b 为边长的矩形面积。等号成立当且仅当 $a^p = b^q$ 。

3. Hölder 不等式

1) (离散形式) 设 $x_i \geq 0, y_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 且 $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

当且仅当向量 $(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ 与向量 $(y_1^q, y_2^q, \dots, y_n^q)$ 共线时, 等号成立[5]。

2) (积分形式) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为测度空间 E 上的可积函数, 且 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\int_E |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

当且仅当存在常数 $\lambda \geq 0$, 使得 $|f(x)|^p = \lambda |g(x)|^q$ a.e. 于 E 时, 等号成立[6] [7]。

证明 令 $A = \int_E |f(x)|^p dx$, $B = \int_E |g(x)|^q dx$,

① 若 $A = 0$ 或 $B = 0$, 则 $|f(x)| = 0$ 或 $|g(x)| = 0$ a.e. 于 E , 结论显然成立;

② 若 $|f(x)| > 0$, $|g(x)| > 0$, 在 **Young 不等式** 的变形中令 $s = \frac{|f(x)|^p}{A}$, $t = \frac{|g(x)|^q}{B}$, 得到

$$\frac{|f(x)|}{A^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(x)|}{B^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \cdot A} + \frac{|g(x)|^q}{q \cdot B}$$

不等式两边对 E 进行积分, 有

$$\frac{1}{A^{\frac{1}{p}} \cdot B^{\frac{1}{q}}} \int_E |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p \cdot A} \int_E |f(x)|^p dx + \frac{1}{q \cdot B} \int_E |g(x)|^q dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

因此, $\int_E |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$ 。

4. Hölder 不等式的应用

在函数估计问题中, Hölder 不等式及其退化形式柯西 - 施瓦茨不等式常用来解决带边界条件的泛函的下界估计。

例 1 已知 $f(x)$ 是 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上的连续可微函数, 满足 $\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) \sin x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) \cos x dx = 1$, 则 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (f'(x))^2 dx \geq \pi^{-1}$ 。

证明 由条件 $\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) \sin x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) \cos x dx = 1$ 知

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) (\sin x - \cos x) dx = 1 \quad (1)$$

由分部积分公式及 $g(x) = -\cos x - \sin x$ 在边界 $x = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 的函数值 $g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$, 得

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) (\sin x - \cos x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) (-\cos x - \sin x)' dx \\ &= (-\cos x - \sin x) f(x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f'(x) (\cos x + \sin x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f'(x) (\cos x + \sin x) dx \end{aligned}$$

结合(1)式, 进一步得到 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f'(x)(\cos x + \sin x) dx = 1$ 。

在此基础上, 应用 **Hölder 不等式** ($p = q = 2$) 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f'(x)(\cos x + \sin x) dx \right| &\leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f'(x)(\cos x + \sin x)| dx \\ &\leq \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos x + \sin x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin 2x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \pi^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{而 } \left| \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f'(x)(\cos x + \sin x) dx \right| = 1。$$

$$\text{所以 } \pi^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq 1$$

$$\text{进而 } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (f'(x))^2 dx \geq \pi^{-1}。$$

注: 当 $p = q = 2$ 时, Hölder 不等式退化为柯西 - 施瓦茨不等式。

本例中, 通过巧妙构造边界函数 $g(x) = -\cos x - \sin x$, 利用其在积分区间端点处取值为零的特性, 结合分部积分公式, 成功将原积分条件转化为关于导数 $f'(x)$ 的积分等式。这一步转化的核心意义在于, 它建立了一个从函数本身 $f(x)$ 向导数 $f'(x)$ 迁移的桥梁。最终得到的估计 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (f'(x))^2 dx \geq \pi^{-1}$, 本质上给出了

了该问题中导数的 L^2 范数的一个严格下界。在物理或工程语境下, 这通常对应于系统的“最小能量”或“最小耗散”。这种下界估计是证明 PDE 解的唯一性、稳定性以及正则性(即解的光滑程度)的基础, 也为后续利用变分法寻找极小值提供了必要的理论支撑。

例 2 [4] 设 $B_1 \subset R^N$ 为单位球, $U_p \in W^{1,p}(B_1)$ 为某个能量泛函的极小元, 其中 $1 < p_0 < p < \infty$ 。证明:

$$\left(\int_{B_1} |\nabla U_p|^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq \omega_N^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}} \left(\int_{B_1} |\nabla U_p|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ 其中 } \omega_N \text{ 为 } B_1 \text{ 的体积。}$$

证明 令 $f(x) = |\nabla U_p|^{p_0}$, $g(x) = 1$

由 **Hölder 不等式** 有

$$\int_{B_1} |\nabla U_p|^{p_0} dx = \int_{B_1} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{B_1} |f(x)|^{\frac{p}{p_0}} dx \right)^{\frac{p_0}{p}} \left(\int_{B_1} |g(x)|^{1-\frac{p}{p_0}} dx \right)^{1-\frac{p_0}{p}} \quad (2)$$

将 $f(x) = |\nabla U_p|^{p_0}$, $g(x) = 1$ 代入(2)式中, 有

$$\left(\int_{B_1} |f(x)|^{\frac{p}{p_0}} dx \right)^{\frac{p_0}{p}} = \left(\int_{B_1} |\nabla U_p|^p dx \right)^{\frac{p_0}{p}}$$

$$\left(\int_{B_1} |g(x)|^{1-\frac{p}{p_0}} dx \right)^{1-\frac{p_0}{p}} = \left(\int_{B_1} dx \right)^{1-\frac{p_0}{p}} = \omega_N^{1-\frac{p_0}{p}},$$

因此

$$\int_{B_1} |\nabla U_p|^{p_0} dx \leq \left(\int_{B_1} |\nabla U_p|^p dx \right)^{\frac{p_0}{p}} \omega_N^{1-\frac{p_0}{p}} \quad (3)$$

(3)式两边取 $\frac{1}{p_0}$ 次幂, 即得

$$\left(\int_{B_1} |\nabla U_p|^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq \omega_N^{\frac{1}{p_0} \frac{1}{p}} \left(\int_{B_1} |\nabla U_p|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

在变分法分析中, 建立不同指数之间的积分关系是核心难题。本例巧妙地应用 Hölder 不等式, 将 p_0 次幂的积分通过单位球体积 ω_N 放大(或约束)到了 p 次幂的积分上。这一步看似只是代数变形, 实则揭示了函数空间嵌入关系的本质: 在一定区域内(如单位球 B_1), 由于测度有限, 具有更高阶可积性(p 较大)的函数空间, 会被连续嵌入到较低阶可积性(p_0 较小)的空间中。这种 L^p 范数之间的相互控制, 是研究偏微分方程解的存在性和正则性不可或缺的工具, 它保证了在极值问题中, 函数的能量不会在局部突然发散, 从而保障了变分问题解的物理意义和数学结构的合理性。

Hölder 不等式是证明 L^p 空间中三角不等式(Minkowski 不等式)的关键工具。

设 $E \subset R^n$ 为可测集, $f(x)$ 在 E 上可测, $1 \leq p < \infty$, 定义 $L^p(E) = \left\{ f \mid \int_E |f(x)|^p dx < \infty \right\}$ 。

例 3 设 $f, g \in L^p(E)$, 其中 $E \subset R^n$ 是可测集, $1 \leq p < \infty$, 则 $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ 。

证明

$$\|f+g\|_{L^p}^p = \int_E |f(x)+g(x)|^p dx = \int_E |f(x)+g(x)|^{p-1} |f(x)+g(x)| dx \quad (4)$$

因为 $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$,

所以(4)变为

$$\begin{aligned} & \int_E |f(x)+g(x)|^{p-1} |f(x)+g(x)| dx \\ & \leq \int_E |f(x)+g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_E |f(x)+g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \end{aligned} \quad (5)$$

运用 Hölder 不等式和 $(p-1)q = p$, (5)式右端第一项变为

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)+g(x)|^{p-1} |f(x)| dx & \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (6)$$

同理, (5)式右端第二项变为

$$\int_E |f(x)+g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \leq \left(\int_E |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (7)$$

由(5)~(7)式, 得到

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p dx \leq \left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \quad (8)$$

(8)式两边同除 $\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}$, 有

$$\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\int_E |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

即 $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ 。

例 3 通过 Hölder 不等式证明了 Minkowski 不等式, 其数学意义极其深远, 它确立了 L^p 空间作为完备赋范线性空间(即 Banach 空间)的基石地位。泛函分析的发展依赖于在函数空间中引入类似欧几里得空间中的“距离”和“长度”概念。Minkowski 不等式 $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ 正是证明 $\|f\|_{L^p}$ 是一个合法范数的最后一个必要条件(三角不等式)。

参考文献

- [1] 乔建斌. Holder 不等式的离散形式与积分形式的推广[J]. 河南科学, 2013, 31(2): 127-129.
- [2] 黄灿. Hölder 型矩阵不等式及改进[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2012, 26(8): 120-122.
- [3] 沈诗雨, 张盛婕, 张文彬. 可积函数 Hölder 不等式的等价不等式[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 1068-1076.
- [4] Brasco, L., Prinari, F. and Zagati, A.C. (2024) Sobolev Embeddings and Distance Functions. *Advances in Calculus of Variations*, **17**, 1365-1398. <https://doi.org/10.1515/acv-2023-0011>
- [5] 卓里奇. 数学分析(第一卷) [M]. 蒋铎, 等, 译. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2012: 216-217.
- [6] 周民强. 实变函数论[M]. 第 4 版. 北京: 北京大学出版社, 2018.
- [7] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pólya, G. 不等式[M]. 越民义, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2008.