

基于积分定义求解极限问题的方法综述

杨 印

成都工业学院大数据学院, 四川 成都

收稿日期: 2026年8月22日; 录用日期: 2026年9月14日; 发布日期: 2026年9月23日

摘 要

本文针对积分定义计算特殊极限问题展开: 首先, 给出黎曼和与定积分、二重积分和三重积分定义之间的理论联系, 再给出黎曼和与积分的转化方法; 其次, 通过等分、特殊节点的选取, 将区间或者区域分割, 给出将极限转化为定积分、二重积分和三重积分的具体方法; 最后, 文中主要选取历年数学竞赛和考研试题, 对所提方法加以实践和应用。

关键词

特殊极限, 黎曼和, 积分定义, 等分

A Survey of Limit-Solving Methods via Integral Definitions

Yin Yang

School of Data Science, Chengdu Technological University, Chengdu Sichuan

Received: August 22, 2026; accepted: September 14, 2026; published: September 23, 2026

Abstract

This paper addresses the problem of evaluating special limits via integral definitions. First, the theoretical connection between Riemann sums and the definitions of definite, double, and triple integrals is established, and the transformation methodology from Riemann sums to integrals is formulated. Second, through equipartition and specific sample-point partitioning of intervals or regions, concrete methods for converting limits into definite, double, and triple integrals are derived. Finally, the proposed methods are applied and validated through problems selected from previous mathematical competitions and national graduate entrance examinations.

文章引用: 杨印. 基于积分定义求解极限问题的方法综述[J]. 理论数学, 2026, 16(9): 97-103.

DOI: 10.12677/pm.2026.169202

Keywords

Special Limits, Riemann Sums, Integral Definitions, Equipartition

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

极限是微积分学中的核心概念：在理论上，连续、导数、定积分和二重积分等概念，都是通过极限来定义的；在应用上，极限的题型和计算方法多样，有一类特殊类型的极限问题：无限多个无穷小量之和(黎曼和)的极限，其结构与积分定义具有内在对应关系。本文从这一关系出发，利用其结构与积分定义的内在联系，将极限计算转化为积分运算，积分函数主要针对连续函数。内容安排上，首先给出定义作为极限计算的理论依据，然后考虑实际计算中，将区间等分的极限题型，转化为定积分的具体方法和过程。其次给出二重积分定义作为极限计算的理论依据，然后给出实际计算中，在特殊情况下区域划分的具体方法及例题。再其次，同理给出利用三重积分计算极限的方法。最后总结该方法，并进一步将方法拓展。

2. 定积分定义和极限计算

2.1. 定积分定义

设实函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上为有界函数[1]，在区间 $[a, b]$ 内任意加入 $n-1$ 个分点 $x_1, \dots, x_{n-1}$ ($a = x_0, b = x_n$)，且满足 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ，划分成 n 个小区间，记第 i 个区间长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ， $\lambda = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ ，取 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ，和式 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 极限存在[2]，那么

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

那么就称：上式中无限和极限称为黎曼和，函数 $f(x)$ 称为可积函数，后续例题中的函数一般要求满足连续条件。

2.2. 问题提出

由定积分定义可知，区间划分是任意的。但在实际计算中，一般将区间 $[a, b]$ 作 n 等分，则每个划分区间的长度为 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ ， $\xi_i = a + (b-a) \left(\frac{i}{n} + \frac{\rho-1}{n} \right)$ ($0 \leq \rho \leq 1$) [3]，这里 ρ 可的取值范围，以取对应小区间内的任意一点，满足积分定义的取点的任意性。比如特殊情况下， $\rho = \frac{1}{2}, 0, 1$ ，表示取划分小区间的中点、左端点或右端点。

按定积分定义，可表示为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f \left[a + (b-a) \left(\frac{i}{n} + \frac{\rho-1}{n} \right) \right] \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

计算本类题型时，具体步骤为：

- ① 转化成黎曼和的形式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f \left[a + (b-a) \left(\frac{i}{n} + \frac{\rho-1}{n} \right) \right] \frac{b-a}{n}$, 重点确定 $\frac{i}{n}$ 和其系数 $b-a$, 单独乘项 $\frac{b-a}{n}$ [4];
- ② 将转化后式中的 $a + (b-a) \left(\frac{i}{n} + \frac{\rho-1}{n} \right)$ 确定换成 x [4], $\frac{b-a}{n}$ 换成 dx , 确定积分区间 $[a, b]$ 和函数 $f(x)$;
- ③ 转化为定积分并计算。

2.3. 典型例题

例 1: 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ [5]

解: 将所求极限转化成黎曼和形式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{i}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{i}{n}}}$$

将上述和式整理为黎曼和形式: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f \left[a + (b-a) \left(\frac{i}{n} + \frac{\rho-1}{n} \right) \right] \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{i}{n}}}$

可知 $\rho=1$ 表示取划分区间的右端点, $a=0, b-a=1$, $a=0, b=1$, 积分区间为 $[0, 1]$; 将 $\frac{i}{n}$ 换成 x , 被积函数为 $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{n}$ 换成 dx , 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$ 。

例 2: 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2]$ (2023 年大学生数学竞赛非数学专业初试)

解: 将所求极限转化成黎曼和形式:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{3^2}{n} + \cdots + \left(\frac{2n-1}{n} \right)^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{n} \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(2 \left(\frac{i}{n} + \frac{-1}{2n} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

化简到这一步, 和给出的标准形式比对:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f \left[a + (b-a) \left(\frac{i-1}{n} + \frac{\rho-1}{n} \right) \right] \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(2 \left(\frac{i}{n} + \frac{-1}{2n} \right) \right)^2$$

步骤二: 由上式可得, $\rho = \frac{1}{2}$, 选取等分区间的中点; $a=0$, 的系数为 $b-a=2$, 可得: $b=2$, 区

间 $[0,2]$ n 等分为 $\frac{2}{n}$, 将 $2\left(\frac{i}{n}+\frac{-1}{n}\right)$ 转化为 x , 即函数为 x^2 。将 $\frac{2}{n}$ 转化成 dx [6]。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(2 \left(\frac{i}{n} + \frac{-1}{n} \right) \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left(2 \left(\frac{i}{n} + \frac{-1}{n} \right) \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

例 3: 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{\frac{1}{n+i}}}$

解: 首先从题设条件不能通过简单的变形来达到转化成黎曼和形式的目的, 题目中已有 $\frac{i}{n}$, 但是 $\frac{1}{n}$ 没法直接转化出乘积因子, 现对其进行变形处理, 可通过取自然对数将指数上的 $\frac{1}{n}$ 转化到乘积项中。设

极限为 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{\frac{1}{n+i}} \right)^{\frac{1}{n}}$, 并取自然对数得:

$$\ln L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{n+1}} + \cdots + \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{\frac{n}{n+i}} + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n}{n} \right)^{\frac{n}{n+n}} \right]$$

$$\ln L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{\frac{n}{n+i}}$$

$$\ln L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{n}{n+i} \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right)$$

所以通过上述变形, 转化成黎曼和, 其步骤和前两题相同, 同理可得: 被积函数 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$, 积分区间 $[0,1]$, 所以

$$\ln L = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 \ln(1+x) d \ln(1+x) = \frac{1}{2} \ln^2(1+x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln^2 2$$

可得: $L = e^{\frac{1}{2} \ln^2 2}$ 。

3. 二重积分定义和极限计算

3.1. 二重积分定义

设二元函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上为有界函数, 将区域 D 任意划分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, 这里 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个闭区域, 同时也表示其面积, 若当每个小闭区域直径的最大值 $\lambda \rightarrow 0$, $\forall (\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, 和式 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 极限存在, 那么

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma \quad [7]$$

那么就称：上式中无限和极限称为黎曼和，函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分，后续一般要求函数 $f(x, y)$ 为连续函数。

3.2. 问题提出

由于在区域的划分过程中是任意的，在实际计算极限时，一般要求矩形区域，记为 $[a, b] \times [c, d]$ ，将区间 $[a, b]$ n 等分，区间 $[c, d]$ m 等分；第 i 小区域中， $\xi_i = a + (b-a)\left(\frac{i}{n} + \frac{\rho-1}{n}\right)$ ，

$\eta_i = c + (d-c)\left(\frac{j}{m} + \frac{\eta-1}{m}\right)$ [3]，其中 $0 \leq \rho \leq 1$ ， $0 \leq \eta \leq 1$ （表示可以取到区域任一点），则将黎曼和转化为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f \left[a + (b-a) \left(\frac{i}{n} + \frac{\rho-1}{n} \right), c + (d-c) \left(\frac{j}{m} + \frac{\eta-1}{m} \right) \right] \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{m} = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy$$

具体步骤为：

① 转化成黎曼和的形式，重点确定 $\frac{i}{n}$ 和其系数 $b-a$ ， $\frac{j}{m}$ 和其系数 $d-c$ ，单独乘项 $\frac{b-a}{n}$ 和 $\frac{d-c}{m}$ ，并确定积分区域。

② 将式子变成标准形式：式中的 $a + (b-a)\left(\frac{i}{n} + \frac{\rho-1}{n}\right)$ 确定换成 x ， $\frac{b-a}{n}$ 换成 dx ；
 $c + (d-c)\left(\frac{j}{m} + \frac{\eta-1}{m}\right)$ 确定换成 y ， $\frac{d-c}{m}$ 换成 dy ，可以确定积分函数和区域。

③ 转化成二重积分并计算。

3.3. 典型例题

例 1：求极限 $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{(n+i)(m^3+j^3)}{n^2 m^4}$

解：将所求极限转化成黎曼和形式：

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{(n+i)(m^3+j^3)}{n^2 m^4} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(1 + \frac{i}{n} \right) \frac{1}{n} \left(1 + \frac{j^3}{m^3} \right) \frac{1}{m}$$

转化成黎曼和形式： $\frac{i}{n}$ 系数为 1，可得 $a=0$ ， $b-a=1$ ，有 $a=0, b=1$ ，同理可得 $c=0, d=1$ ，积分区域为 $[0,1] \times [0,1]$ ； $\frac{i}{n}$ 转化成 x ， $\frac{1}{n}$ 转化成 dx ； $\frac{j}{m}$ 转化成 y ， $\frac{1}{m}$ 转化成 dy ；由二重积分定义上式可以转化为二重积分 $\iint_{[0,1] \times [0,1]} (1+x)(1+y^3) dx dy = \int_0^1 (1+x) dx \int_0^1 (1+y^3) dy = \frac{15}{4}$ 。

例 2：求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ (2010 年考研真题)

解：由题意可知， $m=n$ ，转化成黎曼和形式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{j^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}$$

根据转化的黎曼和形式，具体转化过程和上题类似，可得积分区域为 $[0,1] \times [0,1]$ 。由二重积分定义上

式可以转化为二重积分
$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dx dy = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{4} \ln 2。$$

4. 三重积分定义和极限计算

4.1. 三重积分定义

设实函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭区域 Ω 上为有界函数, 将区域 Ω 任意划分成 n 个小闭区域 $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$, 这里 Δv_i 表示第 i 个闭区域和体积, 若当每个小闭区域直径的最大值 $\lambda \rightarrow 0$,

$\forall (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$, 和式 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 极限存在, 那么

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \quad [7]$$

那么就称: 上式中无限和极限称为黎曼和, 函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上的三重积分, 后续一般要求函数 $f(x, y, z)$ 为连续函数。

4.2. 问题提出

因为区域的划分过程是任意的, 在实际计算极限时一般要求长方体区域, 记为 $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, 将区间 $[a, b]$ n 等分, 区间 $[c, d]$ m 等分, 区间 $[e, f]$ p 等分, 第 i 个小区域中, 设

$\xi_i = a + (b-a)\left(\frac{i}{n} + \frac{\rho-1}{n}\right)$, $\eta_i = c + (d-c)\left(\frac{j}{m} + \frac{\eta-1}{m}\right)$, $\zeta_i = e + (f-e)\left(\frac{k}{p} + \frac{\zeta-1}{p}\right)$, 转化为黎曼和形式:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f\left[a + (b-a)\left(\frac{i}{n} + \frac{\rho-1}{n}\right), c + (d-c)\left(\frac{j}{m} + \frac{\eta-1}{m}\right), e + (f-e)\left(\frac{k}{p} + \frac{\zeta-1}{p}\right)\right] \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{m} \frac{f-e}{p} \\ &= \iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} f(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

因为转化方式与定积分和二重积分相同, 这里就简单概括步骤为: ① 转化成黎曼和形式; ② 确定积分区域和函数; ③ 转化成三重积分并计算。

4.3. 典型例题

例 1: 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{ij^2k^3}{n^9}$

解: 本题中 $n = m = p$, 转化为黎曼和形式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{ij^2k^3}{n^9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) \left(\frac{j^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n}\right) \left(\frac{k^3}{n^3} \cdot \frac{1}{n}\right)$$

转化成三重积分形式, 积分区域为 $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ 。被积函数为 $f(x, y, z) = xy^2z^3$, 由三重积分定义上式可以转化为三重积分
$$\iiint_{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]} xy^2z^3 dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^1 y^2 dy \int_0^1 z^3 dz = \frac{1}{24}。$$

5. 结论

本文总结了基于积分定义求解特殊极限问题的方法。通过定积分、二重积分及三重积分的定义, 给出了通过积分定义求黎曼和极限的方法——基于将区间或者区域等分, 分别将一维、二维及三维和式极

限转化为对应的定积分、二重积分及三重积分。其应用还可以推广到曲线和曲面积分,该方法也可拓展到一般的可积函数与复杂的积分区域。后续可进一步研究非等分情况下的极限。

同时给出实际例子,都是用定积分、二重积分和三重积分来计算极限,在变形过程中,只要掌握基本方法,就能够将所求极限转化为与积分结构对应的黎曼和形式,简单直接明了。但同时,所求极限转化成积分,都是针对一些特殊的点和特殊的区域,这也是其局限性。

参考文献

- [1] 方源,王元.微积分(上册)[M].北京:高等教育出版社,2014.
- [2] 同济大学数学系.高等数学(上册)[M].第7版.北京:高等教育出版社,2023.
- [3] 田卫章.用积分定义求极限方法探究[J].三门峡职业技术学院学报,2024,23(1): 144-148.
- [4] 彭国荣.用定积分定义计算一类数列极限[J].课程教育研究,2015(32): 132-133.
- [5] 柯朗,约翰.微积分和数学分析引论:第一卷第一分册[M].张鸿林,周民强,译.北京:科学出版社,2006.
- [6] 李慧云,李志国,李小明.利用定积分定义求极限的方法小结[J].科技风,2024(19): 31-33.
- [7] 同济大学数学系.高等数学(下册)[M].第7版.北京:高等教育出版社,2022.