

一元函数的一致连续性的几何直观

杨春玲, 张传芳

广东石油化工学院理学院, 广东 茂名

收稿日期: 2026年8月23日; 录用日期: 2026年9月28日; 发布日期: 2026年10月19日

摘要

本文从几何直观的视角出发, 探讨了一元函数一致连续性的直观解释。首先, 回顾函数在一点连续的几何意义——即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个长度 2δ 可随点变化的, 宽度为 2ε 能让函数曲线穿过的矩形窗口, 以此说明连续性是“局部”性质, 即 δ 通常依赖于点 x_0 。在此基础上, 引出一致连续的核心思想: 若在整个区间上可以找到长度 δ 固定的、宽度为 ε “公共矩形”, 可以在整个定义区间上任意“滑动”而始终满足曲线穿过的要求, 则函数是一致连续的; 否则不一致连续。最后, 文章通过若干反例纠正了常见的直观误区, 指出“导函数无界”不能简单地与不一致连续划等号, “有界连续”也不能得出一致连续, 并给出了相应的判定定理。

关键词

一元函数, 连续, 一致连续, 几何直观

Geometric Intuition of the Uniform Continuity of Functions of One Variable

Chunling Yang, Chuanfang Zhang

School of Science, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong

Received: August 23, 2026; accepted: September 28, 2026; published: October 19, 2026

Abstract

This paper investigates intuitive geometric interpretations of the uniform continuity of single-variable functions. It first reviews the geometric meaning of pointwise continuity: for any $\varepsilon > 0$, a rectangular window can be constructed at each point x_0 , whose horizontal length δ depends on x_0 , confirming that continuity is a local property. From this foundation, the core notion of uniform continuity is introduced. A function is uniformly continuous on an interval if there exists a rectangle of fixed horizontal length δ and vertical height 2ε valid for the whole interval. When slid over the domain, every

portion of the curve lying inside the rectangle's horizontal range stays within its vertical bounds. If no such universal rectangle exists, the function is not uniformly continuous. Counterexamples are employed to dispel common misunderstandings: an unbounded derivative does not imply non-uniform continuity, and a continuous bounded function need not be uniformly continuous. Corresponding criteria are provided.

Keywords

Functions of One Variable, Continuity, Uniform Continuity, Geometric Intuition

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

一致连续是几乎贯穿数学分析课程始终的重要概念, 对学生来说能否真正理解和掌握一致连续的概念将直接影响后续内容的学习。大部分数学分析教材[1]-[5]都只给出了一致连续的定义, 没有给出几何解释, 这就使得很多学生感觉一致连续的概念太抽象, 难于理解, 不像连续的概念在图形上看起来那么直观易懂, 还有一些学生压根就不理解“一致”体现在哪里。针对这些问题, 如何用简单直观的方式解释一致连续性使学生更容易理解和记忆, 这是所有授课教师都应该思考的问题。文献[6]从实例出发, 讨论函数连续与一致连续的区别, 给出了一致连续的几何意义; 文献[7]借助几何直观, 通过类比教学, 研究了函数一致连续性的教学方法; 文献[8]通过两个例子, 给出了一致连续中公共的 δ 的直观取法; 文献[9]利用连续函数在一点的“连续程度”对函数的一致连续性作了直观形象的阐述; 文献[10]从连续性、非一致连续性、导函数等角度揭示了一致连续的本质内涵; 文献[11]从概念的叙述方式、几何意义、概念的整体性等方面对一致连续概念进行了剖析, 从连续和离散两个角度刻画了一致连续性概念的本质含义; 文献[12]讨论了一致连续的几何意义、不一致连续的充要条件、有限区间上连续函数一致连续的充要条件等; 文献[13]用辨析的方式剖析了连续与一致连续的概念, 厘清了两者的差别, 并解释了“一致”的含义; 文献[14]分别从“概念的直观性”、“函数变化率”、“区间”等方面提出了对“一致连续性”判定的一些教学思考。上述这些文献虽然有一些介绍了一致连续性的几何解释, 但解释的不够全面, 本文是在参考这些文献的基础上利用直观的图形解释一致连续性, 希望能够帮助学生理解和掌握一致连续性。对于大部分学生来说, 越直观越容易理解, 越容易记忆和掌握, 正所谓直观是理解科学知识的起点, 是学生由不知到知的开端, 也是知识获得的首要环节, 尤其是对于普通高等院校的学生来说, 适时恰当地直观教学往往能收到事半功倍的效果。

2. 主要结论

2.1. 一元函数的连续性

先从一元函数连续的定义说起。

定义 2.1 [1]-[5] 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $x_0 \in I$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。若 $f(x)$ 在区间 I 内的每一点都连续, 则称 $f(x)$ 为区间 I 上的连续函数。

由连续的定义可知：连续是一个“局部”的概念，即使是区间 I 上的连续函数也是由逐点的连续性定义的。通常情况这种局部性体现在定义中的 δ 不仅与 ε 有关，而且与点 x_0 有关。一般来说对于给定的 ε ，不同的点 x_0 对应于不同的 δ ，因此， δ 可表示为 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ 。

连续的 $\varepsilon - \delta$ 语言的几何解释：设 $y_0 = f(x_0)$ ，则点集

$$\{(x, f(x)) \mid |x - x_0| < \delta, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$$

显然包含在长为 2δ ，宽为 2ε 的矩形区域

$$\{(x, y) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon\}$$

内。即曲线在不同点处可以用不同长度的矩形覆盖，只要横坐标与 x_0 点距离小于 δ ，对应函数值与 $f(x_0)$ 之差就小于 ε 。以函数 $y = \frac{1}{x}$ 为例，如图 1 中 x_1 与 x_2 点处的曲线被不同长度的矩形覆盖，但 x_3 点处的矩形不满足要求。

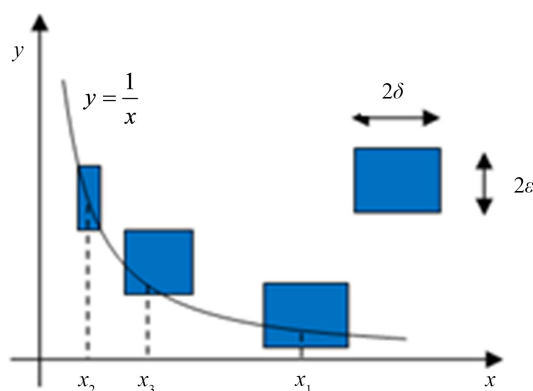


Figure 1. Geometric illustration of the $\varepsilon - \delta$ definition of continuity of a function

图 1. 函数连续的 $\varepsilon - \delta$ 定义的几何示意图

通常来说，不同点处，矩形长度 2δ 不同，例如在 x_1 点处的矩形的长度 2δ 与 x_2 点处的长度 2δ 显然是不同，而且图 1 中在 x_1 处的矩形的长度 2δ 可以再长一些，但 x_2 点处的矩形的长度 2δ 不可以再长了。这种不同点处有不同的 δ ，就是文献[9]、[10]中所说的连续程度或者称连续强度， δ 越大，连续程度越好； δ 越小，连续程度越差。当然每一点处的 δ 也并不是唯一确定的，存在无穷多个 δ 都满足条件，没有最小的 δ ，但有最大的 δ 。仔细观察函数 $y = \frac{1}{x}$ 图像还容易发现：当 x 越靠近 0 时， δ 就越小；当 x 越远离 0，即沿 x 轴正向取值越大时， δ 就越长，因此，当 ε 给定后， δ 的大小与函数曲线的陡峭程度有关，当函数曲线越陡， δ 越小；相反，函数曲线越平缓， δ 越大。

理解了连续函数的 $\varepsilon - \delta$ 定义后自然要问：是否存在这样的函数，在各点处存在一个公用的(一致的) δ ，使得每一点都满足连续性要求，这就是下面要介绍的函数的一致连续性。

2.2. 一元函数的一致连续性

定义 2.2 [1]-[5] 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta > 0$ ，使得 $\forall x', x'' \in I$ ，只要 $|x' - x''| < \delta$ ，就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (1)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 是一致连续的。

从一致连续的定义可以看出：一致连续是一个“整体”的概念，是函数在区间 I 上的性质，与 I 内具体的点无关，即定义中的 δ 只与 ε 有关，而与具体的点无关，通常记 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 。特别地，对于固定的 $x_0 \in I$ ， $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta > 0$ ，使得 $\forall x \in I$ ，只要 $|x - x_0| < \delta$ ，就有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

成立，其中 δ 仅与 ε 有关，而与 x_0 无关，即 δ 对于区间 I 上所有点是公用的，这就是“一致”的含义。显然，一致连续的函数必然是连续函数，反之，不一定。

在图形上来看，连续函数就是一条连绵不断的曲线，这种几何直观解释学生很容易理解。但一致连续却并不显得那么直观。对于一致连续来说就是任意给定的宽度 ε ，寻找一个不依赖于位置的公共长度 δ 的矩形区域能够覆盖曲线。即存在长为 δ ，宽为 ε 的矩形，使得曲线各点处都能被这样的矩形覆盖，这就是一致连续的几何直观解释，如图 2 所示。

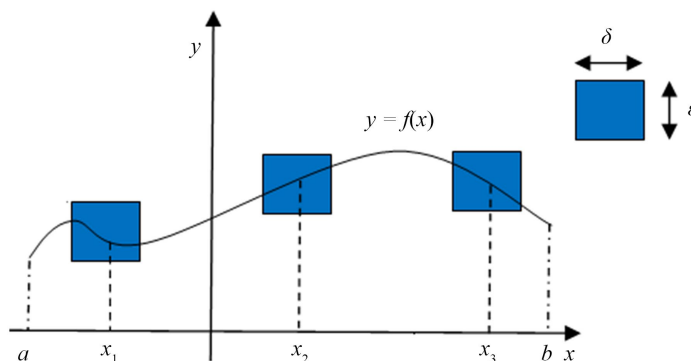


Figure 2. Geometric intuition of uniformly continuous functions
图 2. 一致连续函数的几何直观

区分逐点连续与一致连续：逐点连续是每个点可使用专属 δ 矩形；一致连续是整个区间共用同一套 δ 矩形，矩形可以在区间上任意滑动。

2.3. 一致连续的一些判别方法

在弄清楚一致连续性的含义后，还要清楚什么是不一致连续，那就是 $\forall \varepsilon > 0$ 在区间 I 上找不到公用的 δ ，即不同点处有不同的 δ ，例如函数 $y = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$ ，在区间 $(0, +\infty)$ 无法找到一个公共的 δ 使得 $\forall x', x'' \in (0, +\infty)$ ，只要 $|x' - x''| < \delta$ ，就有(1)式成立。特别地，当 x', x'' 越靠近点 0 时， δ 就越小，因此，无法找到最小的 δ 。这种直观几何解释是比较容易理解的，但直观不能代替严谨的数学推导，该函数在区间 $(0, +\infty)$ 不一致连续严格的证明过程可参见文献[1] [4]。

(1) 导函数无界 $\nRightarrow$ 不一致连续

仅凭直观有时也会产生误导。例如文献[11]中指出：函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若函数图像在 I 上的某点(有限点或无穷远点)附近变得“无限陡峭”，则称该点为一致连续性的“破坏点”[11]。这里所谓的“无限陡峭”是指切线的斜率是无穷大，即导数为无穷大。这种直观理解不一致连续是不正确的。

反例 1 设 $f(x) = \sqrt{x}, x \in (0, 1]$ ，则

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0, 1]$$

且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

但显然 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 是一致连续的。

因此, 存在无限陡峭的点函数不一定是非一致连续的。此外, 当导函数无界时, 函数也不一定是非一致连续的,

反例 2

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

显然 $f(x)$ 为闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 由康托定理知道 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 是一致连续的, 但

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, \quad x \in (0,1],$$

显然在区间 $(0,1]$ 上无界。

利用反证法即可得如下结论:

定理 1 如果连续函数 $f(x)$ 在有界开(或半开)区间 I 上无界, 则 $f(x)$ 在区间 I 上必不一致连续,

注: 这个结论对于无穷区间不成立, 例如

$$f(x) = x, x \in (-\infty, +\infty),$$

显然, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界, 但 $f(x)$ 在此区间上是一致连续的。

对于无穷区间上的一致连续函数, 虽然它的导数值可以变化剧烈, 但它最终必须趋于平缓, 或者振幅被限制在一定范围内。从“平均速度”的角度更容易理解。若区间 I 上的函数的平均变化率(平均速度)是有界的, 则函数在区间 I 上一致连续性。即

定理 2 [15] 若存在常数 $L > 0$, 使得对区间 I 上任意 x, y 都有

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L \quad (2)$$

则 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

推论 [15] 当 $f(x)$ 在区间 I 上可导时, 且导函数有界时, 则 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

证明 对区间 I 上任意 x, y , 由拉格朗日中值定理, $\exists \xi$ 介于 x 与 y 之间, 使得

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$$

再由导数有界即 $\exists M > 0$, 使得

$$|f'(x)| < M, x \in I,$$

故(2)式成立, 由定理 2 知函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

在上述讨论的基础上, 引入函数振幅的概念, 以便从“波动范围”的角度进一步刻画一致连续性。

(2) 利用连续模数判断一致连续性

定理 3 [1] 设 $f(x)$ 在区间 I 上有界, 令

$$M = \sup_{x \in I} f(x), m = \inf_{x \in I} f(x)$$

则 $f(x)$ 在区间 I 上的振幅

$$\omega \triangleq M - m = \sup_{x', x'' \in I} |f(x') - f(x'')|$$

证明 因为, $\forall x', x'' \in I$ 有

$$|f(x') - f(x'')| \leq M - m = \omega$$

所以

$$\sup_{x', x'' \in I} |f(x') - f(x'')| \leq \omega. \quad (3)$$

又由确界定义有 $f(x'_n) \rightarrow M, f(x''_n) \rightarrow m (n \rightarrow \infty)$, 故

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \rightarrow M - m = \omega$$

故

$$\sup_{x', x'' \in I} |f(x') - f(x'')| \geq \omega. \quad (4)$$

由(3)式和(4)式得证结论成立.

定义[16] 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x', x'' \in I \\ |x' - x''| < \delta}} |f(x') - f(x'')|$$

称为函数 $f(x)$ 的连续模数, 即 $f(x)$ 的振幅.

定理 4 [16] $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的 $\Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

(3) 区间 I 上的有界连续函数 $\nRightarrow$ 一致连续性

反例 3 函数

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$$

显然 $f(x)$ 是开区间 $(0, 1)$ 上的连续有界函数, 但 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上不一致连续, 这主要就是因为当 x 趋于 0 时, 任何固定长度 δ 的矩形都无法在足够窄的宽度 2ε 矩形区域内“罩住”剧烈振荡的函数图像。如图 3 所示, 靠 0 附近无论选择多么窄的矩形, 总是无法满足覆盖条件。

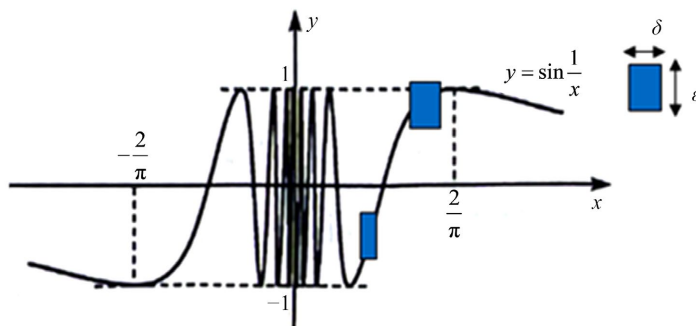


Figure 3. Geometric explanation of why $y = \sin \frac{1}{x}$ is not uniformly continuous

图 3. $y = \sin \frac{1}{x}$ 的不一致连续的几何解释

定理 5 [13] [15] 如果单调有界函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。
此处必须强调单调有界, 这表明单调有界函数在区间上的连续性与一致连续性是等价的。

3. 结束语

本文对一元函数的一致连续性的几何化处理方式将抽象的 ε - δ 语言转化为可视化的图形, 有助于学生建立正确的直观认识, 降低理解门槛, 为数学分析课程中一致连续性内容的教学提供有益参考。

致 谢

在此对参考文献给予的启发与思考以及审稿人提出的宝贵意见表示衷心感谢!

基金项目

- 1) 广东省教育科学规划课题(高等教育专项)项目编号: 2025GXJK0456;
- 2) 广东石油化工学院科研基金人才引进项目, 项目编号: 2019rc101。

参考文献

- [1] 华东师范大学数学系. 数学分析: 上册[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 80-81, 21.
- [2] 刘名生, 冯伟贞, 韩彦昌. 数学分析(一) [M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2019: 99.
- [3] 刘玉琰, 傅沛仁, 刘伟, 等. 数学分析讲义: 上册[M]. 第6版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 115-116.
- [4] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析: 上册[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 94-95.
- [5] 张筑生. 数学分析新讲: 第一册(重排本) [M]. 第2版. 北京: 北京大学出版社, 2021: 117.
- [6] 程丽. 对《数学分析》中“函数一致连续”概念的理解[J]. 丽水学院学报, 2010, 32(5): 79-81.
- [7] 王玉磊, 李彩娟, 付宗魁, 等. 对函数一致连续性教学的探讨[J]. 数学学习与研究, 2018(24): 5.
- [8] 金铁英, 王晓锋. 对建立函数一致连续概念的认识[J]. 大学数学, 2005(1): 104-106.
- [9] 孙永忠, 康志荣. 关于函数一致连续性的教学探讨[J]. 雁北师院学报, 1997(2): 40-42, 46.
- [10] 杨小远, 孙玉泉. 关于函数一致连续的研究性教学[J]. 高等数学研究, 2011, 14(6): 50-53.
- [11] 王云花, 张智倍. 函数一致连续性概念的几点注记[J]. 高师理科学刊, 2011, 31(4): 41-44.
- [12] 蒋品, 彭镇静, 贾桂丽. 解析有限开区间上单变量函数的一致连续[J]. 科技视界, 2014(20): 255.
- [13] 游俊华, 徐章韬. 微言要义之一致连续[J]. 高等数学研究, 2020, 23(5): 61-63.
- [14] 彭艳芳. 关于函数“一致连续性”的教学探究[J]. 黄冈师范学院学报, 2017, 37(6): 65-67.
- [15] 杨中南. 函数在无穷远处的一致连续性[J]. 集美大学学报(自然科学版), 1997(1): 70-75.
- [16] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2021: 130.