

Schrödinger-Poisson方程爆破解的动力学性质

严丽君

重庆师范大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年8月25日; 录用日期: 2026年9月27日; 发布日期: 2026年10月19日

摘 要

本文研究质量临界Schrödinger-Poisson方程的爆破解动力学性质。具体地, 利用最佳Gagliardo-Nirenberg不等式及经典非线性薛定谔方程基态的变分刻画, 在解 $u(t)$ 于 T^* 时刻发生爆破的假设下, 证明了当 $t \rightarrow T^*$ 时 $u(t)$ 不存在 L^2 -强极限。进一步, 当初值 u_0 具有径向对称性时, 得到了爆破解 $u(t)$ 会在原点处出现 L^2 -集中现象。

关键词

Schrödinger-Poisson方程, 爆破解, L^2 -集中

Dynamical Properties of Blow-Up Solutions for the Schrödinger-Poisson Equation

Lijun Yan

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: August 25, 2026; accepted: September 27, 2026; published: October 19, 2026

Abstract

This paper investigates the dynamical properties of blow-up solutions to the mass-critical Schrödinger-Poisson equation. By using the sharp Gagliardo-Nirenberg inequality and the variational characterization of the ground state for the classical nonlinear Schrödinger equation, we prove that if a solution $u(t)$ blows up at a finite time T^* , then $u(t)$ admits no strong limit in L^2 as $t \rightarrow T^*$. Furthermore, when the initial datum u_0 is radially symmetric, the blow-up solution $u(t)$ exhibits L^2 -concentration at the origin.

Keywords

Schrödinger-Poisson Equation, Blow-Up Solution, L^2 -Concentration

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近些年来, 带有非局部 Coulomb 相互作用的非线性 Schrödinger 方程得到了广泛研究。为此, 本文考虑三维 Schrödinger-Poisson 方程

$$i\partial_t u + \Delta u - (|x|^{-1} * |u|^2)u + |u|^{p-2}u = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, \quad (1.1)$$

其中 $u = u(x, t): [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ 是波函数, $i = \sqrt{-1}$, Δ 为 Laplace 算子, $2 < p < 6$, $|x|^{-1} * |u|^2$ 代表排斥型非局部库仑势且 $*$ 表示卷积运算。方程(1.1)来源于含 Coulomb 相互作用的多粒子 Hartree - Fock 模型, 在量子多体系统和半导体模型中有重要应用背景(参见[1]-[4])。

关于方程(1.1)的适定性、驻波解及爆破行为有如下研究。当 $2 < p < \frac{10}{3}$ 时, Cazenave [5]建立了方程(1.1)在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 空间中的局部适定性与整体存在性。当 $\frac{10}{3} < p < 6$ 时, Kikuchi [6]和 Bellazzini [7]利用变分法证明了驻波解的强不稳定性。紧接着, 李等人[8]和 Feng 等人[9]将方程(1.1)的解在有限时间爆破的相关结论推广至 $\frac{10}{3} \leq p < 6$ 的情形。此外, Fang-Han [10]证明了方程(1.1)在 $\frac{10}{3} \leq p < 6$ 时, 若初始值具有有限方差且能量为负的条件下, 则解会在有限时间内爆破。值得注意的是, $p = \frac{10}{3}$ 恰好是方程(1.1)的 L^2 -临界指数, 因此临界情形下爆破解在爆破时刻附近的行为具有特殊的研究意义。

基于上述工作, 本文重点研究方程(1.1)在 L^2 -临界情形($p = \frac{10}{3}$)下对应的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - (|x|^{-1} * |u|^2)u + |u|^{\frac{4}{3}}u = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3. \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.2)$$

由于方程(1.2)的局部非线性项与经典质量临界非线性 Schrödinger 方程具有相同的临界结构, 且在质量保持缩放

$$u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{3}{2}} u(\lambda x), \lambda > 0$$

下, 能量泛函中的动能项和临界局部非线性能量项均按 λ^2 缩放, 而 Coulomb 能量项仅按 λ 缩放。因此, 从缩放阶数上看, 非局部 Coulomb 项相对于临界主部表现为低阶项。与经典质量临界非线性 Schrödinger 方程相比, 方程(1.2)中额外出现的非局部 Coulomb 相互作用给爆破解的估计带来了新的困难。记

$$D(u) := \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(t, x)|^2 |u(t, y)|^2}{|x - y|} dx dy.$$

由于该项具有非局部性, 其估计涉及不同空间位置之间的相互作用, 因而不能直接采用局部幂次非线性项的处理方式。利用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式及 Gagliardo-Nirenberg 不等式可得

$$D(u) \leq C \|u\|_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}^4 \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3 \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

结合质量守恒可知, Coulomb 能量项至多按 $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ 的一阶增长, 而动能项和质量临界局部非线性项均按 $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$ 的二阶增长。上述估计进一步说明, 非局部 Coulomb 项虽需额外处理, 但并不改变爆破尺度下临界主部的主导阶数。基于这一特点, 经典质量临界非线性 Schrödinger 方程关于有限时间爆破解的已有研究对方程(1.2)的分析具有一定的启发意义。为此, 下面先回顾经典非线性 Schrödinger 方程爆破解在爆破时刻附近的若干已有结果。Merle [11] 在 L^2 -超临界情形 ($\frac{10}{3} < p < 6$) 下, 证明了对任意爆破解 $u(t)$, 当 $t \rightarrow T^*$ 时, 存在相应的 L^r -极限, 其中 $r \in \left(\frac{10}{3}, 6\right)$ 。而对于初值 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ 的 L^2 -临界情形, Merle-Tsutsumi [12] 证明了当 $t \rightarrow T^*$ 时, $u(t)$ 不存在 L^2 -极限。进一步, Merle-Tsutsumi 还证明了当初值 u_0 是径向函数时, 相应爆破解会在原点发生 L^2 -集中现象。随后, Nawa [13] 将该结果推广到非径向初值情形。Hmidi-Keraani [14] 建立了适用于 L^2 -质量集中问题的改进型紧性引理。受上述结果启发, 一个自然的问题是: 对于带有非局部 Coulomb 相互作用的方程(1.2), 其有限时间爆破解是否也会出现类似的 L^2 -集中现象? 与经典质量临界非线性 Schrödinger 相比, 这一问题的关键在于如何控制非局部 Coulomb 项。本文将围绕这一问题展开研究。方程(1.2)具有如下质量守恒律和能量守恒律:

质量守恒

$$M(u(t)) := \int_{\mathbb{R}^3} |u(t, x)|^2 dx \equiv M(u_0), \quad (1.3)$$

能量守恒

$$E(u(t)) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(t, x)|^2 dx + \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(t, x)|^2 |u(t, y)|^2}{|x - y|} dx dy - \frac{3}{10} \int_{\mathbb{R}^3} |u(t, x)|^{\frac{10}{3}} dx \equiv E(u_0). \quad (1.4)$$

本文首先研究 Cauchy 问题(1.2)爆破解的精细结构, 其结论如下:

定理 1.1. 设 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ 且方程(1.2)的解 $u(t, x) \in C([0, T^*]; H^1(\mathbb{R}^3))$ 在有限时间爆破, 则当 $t \rightarrow T^*$ 时, $u(t, x)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 空间中无强极限, 而且不存在序列 $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ 使得当 $|x|^{-1} * |u|^2$ 时, $u(t_n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 空间中收敛。

若初始值 u_0 是径向对称的, 则 $u(t)$ 也是径向对称的。这就意味着, 当 $t \rightarrow T^*$ 时, 爆破解 $u(t)$ 在 L^2 -集中现象将在原点 0 处出现。具体结论如下:

定理 1.2. 设 u_0 径向对称且方程(1.2)的解 $u(t, x) \in C([0, T^*]; H^1(\mathbb{R}^3))$ 在时间 T^* 爆破, 则原点 0 为爆破点且对任意的 $R > 0$, 有

$$\liminf_{t \rightarrow T^*} \|u(t)\|_{L^2(B(0, R))}^2 \geq \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2,$$

其中 $B(0, R) = \{x; |x| < R\}$, Q 是如下椭圆方程

$$-\Delta Q + Q = |Q|^{\frac{4}{3}} Q, \quad Q \in H^1(\mathbb{R}^3), \quad (1.5)$$

的基态解。

本文用 L^2 表示 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 空间, 而在相应的证明中 C 表示适当的正常数, 其值在不同位置可不相同。

2. 预备知识

本节回顾一些将在后续内容中用到的预备性结果。首先, 回顾文献[15]提出的如下 Gagliardo-Nirenberg 型不等式。

引理 2.1 ([15]). 设 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 存在常数 C_{GN} 使得

$$\|u\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} \leq C_{GN} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{4}{3}},$$

其中 C_{GN} 为最佳常数且 $C_{GN} = \frac{5}{3\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^3}$, Q 是方程(1.5)的基态解。

接着, 给出如下两个在后续定理证明中的重要引理。

引理 2.2 ([16]). 设 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ 是径向对称函数, R 为任意正常数, 则有

$$\|u\|_{L^\infty(|x|>R)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(|x|>R)} \|u\|_{L^2(|x|>R)},$$

其中 C 为正常数。

在本文用 ρ_R 表示一个 C_0^∞ 函数,

$$\rho_R(x) = \rho_R(|x|) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R, \\ 0, & |x| \geq 2R, \end{cases}$$

且 $\forall x \in \mathbb{R}^3, |\rho_R(x)| \leq 1$ 。

引理 2.3 ([12]). 设 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, R 为任意正常数, 则有

$$\|\rho_R u\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^2(|x| \leq 2R)} + \|u\|_{L^2(|x| \leq 2R)} \right)^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{4}{3}},$$

其中 C 为正常数。

3. 爆破解的 L^2 -不连续性

本节旨在证明定理 1.1 此时, 需注意定理 1.1 是以下命题的直接结论。为此, 只需证明如下命题即可。

命题 3.1. 设 $u(t) \in C([0, T^*); H^1(\mathbb{R}^3))$ 是方程(1.2)的解。若存在序列 $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ 使得当 $n \rightarrow +\infty, t_n \rightarrow T^*$ 时, $u(t)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 空间中收敛, 则 $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \in L^\infty(0, T^*)$ 。

证明. 根据能量守恒(1.4)有

$$\begin{aligned} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= 2E(u_0) - \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(t, x)|^2 |u(t, y)|^2}{|x - y|} dx dy + \frac{3}{5} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} \\ &\leq 2E(u_0) + \frac{3}{5} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}}. \end{aligned}$$

于是, 对 $\forall n \neq m$ 和 Gagliardo-Nirenberg 不等式可得

$$\begin{aligned}
 \|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq 2E(u_0) + \frac{3}{5} \left(\|u(t_n) - u(t_m)\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} + \|u(t_m)\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} \right)^{\frac{10}{3}} \\
 &\leq 2E(u_0) + C \|u(t_n) - u(t_m)\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} + C \|u(t_m)\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} \\
 &\leq 2E(u_0) + C \|u(t_n) - u(t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{4}{3}} \left(\|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u(t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right)^2 \\
 &\quad + C \|u(t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{4}{3}} \|\nabla u(t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.
 \end{aligned}$$

再由质量守恒(1.4)与上式可知, 固定 m 可得

$$\|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C \|u(t_n) - u(t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{4}{3}} \|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C(m), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

其中 $C(m)$ 取决于 m 和 C 。又因为序列 $u(t_n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 空间中强收敛, 则存在正整数 n_0 使得对 $\forall n \geq n_0, m \geq n_0$ 有

$$C \|u(t_n) - u(t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{4}{3}} < \frac{1}{2}.$$

因此, 在(3.1)中令 $m = m_0$ 可知, 对 $\forall n \geq n_0$ 有

$$\|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C(n_0),$$

从而

$$\|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq 2C(n_0) < \infty.$$

再由质量守恒(1.4)可得, 序列 $u(t_n)$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 空间中一致有界。据此, 由方程(1.2)的局部适定性理论可知, 若 $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ 在 $(0, T^*)$ 无界, 则存在子序列(仍记为 $\{t_n\}_{n=1}^\infty$) $t_n \rightarrow T^*$ 满足 $\|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow \infty$, 导出矛盾。故 $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \in L^\infty(0, T^*)$, 该命题 3.1 得证。

4. 爆破解的集中性质

本节目的是证明定理 1.2.为此, 假设初值 u_0 具有径向对称性。首先, 证明原点 0 在某种意义上是一个爆破点。随后, 再证明一个引理, 用以刻画 L^2 -范数在原点 0 处的集中效应。最后, 完成定理 1.2 的证明。

命题 4.1. 设初值 u_0 径向对称且方程(1.2)的解 $u(t)$ 在时间 T^* 处爆破, 则原点 0 为爆破点, 其意义如下:

- (i) $\forall R > 0$, 当 $t \rightarrow T^*$ 时, 有 $\|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|<R)} \rightarrow \infty$;
- (ii) 若 $t < T^*$, 对 $\forall R > 0$, 有 $u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, 则当 $t \rightarrow T^*$ 时, 有 $\|u(t)\|_{L^\infty(|x|<R)} \rightarrow \infty$ 。

证明. (i) 若初值 u_0 是径向对称的, 则根据方程(1.2)的局部适定性可知其对应的解 $u(t)$ 也是径向对称的。于是, 由能量守恒(1.4)可得

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = E(u_0) + \frac{3}{10} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|<\frac{R}{2})}^{\frac{10}{3}} + \frac{3}{10} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|>\frac{R}{2})}^{\frac{10}{3}} - \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(t,x)|^2 |u(t,y)|^2}{|x-y|} dx dy \quad (4.1)$$

又由

$$\|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|<\frac{R}{2})}^{\frac{10}{3}} \leq \left\| \frac{\rho_R}{2} u(t) \right\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}},$$

以及引理 2.3 和质量守恒(1.3)可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq E(u_0) + C \left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|\leq R)} + C \right)^2 + C \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|>\frac{R}{2})}^{\frac{10}{3}} \\ &\leq E(u_0) + C \left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|\leq R)} + C \right)^2 + C \|u(t)\|_{L^\infty(|x|>\frac{R}{2})}^{\frac{4}{3}} \|u(t)\|_{L^2(|x|>\frac{R}{2})}^2 \\ &\leq E(u_0) + C \left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|\leq R)} + C \right)^2 + C \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{3}} + C. \end{aligned}$$

因此, 由 $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow T^*$) 可知当 $t \rightarrow T^*$ 有

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|<R)} \rightarrow \infty.$$

(ii) 根据(4.1)式有

$$\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C \|u(t)\|_{L^\infty(|x|<R)}^{\frac{10}{3}} + C \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{3}} + C.$$

因此, 利用(i)中相同的证明方式可得当 $t \rightarrow T^*$ 时, 有 $\|u(t)\|_{L^\infty(|x|<R)} \rightarrow \infty$ 。

引理 4.1. 若 u_0 径向对称且方程(1.2)的解 $u(t) \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^3))$ 在时间 T^* 爆破, 则对 $\forall R > 0$, 有

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \frac{\|\nabla u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}}}{\|\nabla(\rho_R \nabla u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2} = 0.$$

证明. 由能量守恒(1.4), 质量守恒(1.3)及引理 2.2 可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|>R)}^2 &= -\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|<R)}^2 - \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(t, x)|^2 |u(t, y)|^2}{|x - y|} dx dy \\ &\quad + \frac{3}{10} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|<R)}^{\frac{10}{3}} + \frac{3}{10} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|>R)}^{\frac{10}{3}} + E(u_0) \\ &\leq \frac{3}{10} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|<R)}^{\frac{10}{3}} + \frac{3}{10} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|>R)}^{\frac{10}{3}} + C \\ &\leq C \left\| \frac{\rho_R}{2} u(t) \right\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} + C \|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|>R)}^{\frac{2}{3}} + C \\ &\leq C \|\nabla(\rho_R \nabla u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C \|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|>R)}^{\frac{2}{3}} + C. \end{aligned}$$

因此, 由命题 4.1 可知, 存在常数 $k < +\infty$ 使得

$$\limsup_{t \rightarrow T^*} \frac{\|u(t)\|_{L^2(|x|>R)}^2}{\|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2} = k.$$

又根据引理 2.2 和质量守恒(1.3)可得

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|>R)}^{\frac{10}{3}} &\leq \|u(t)\|_{L^\infty(|x|>R)}^{\frac{4}{3}} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\leq C \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{8}{3}} \|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|>R)}^{\frac{2}{3}} \\ &\leq C \|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|>R)}^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

因此, 当 $t \rightarrow T^*$ 时, 有

$$\frac{\|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|>R)}^{\frac{10}{3}}}{\|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2} = \frac{\|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|>R)}^{\frac{10}{3}}}{\|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|>R)}^2} \cdot \frac{\|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|>R)}^2}{\|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2} \cdot \frac{1}{\|\nabla u(t)\|_{L^2(|x|>R)}^2} \rightarrow 0.$$

定理 1.2 的证明. 这里的 R 表示任意正常数, ρ_R 仍为前面所定义的函数。一方面, 根据能量守恒(1.4)式可得:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{3}{10} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|<R)}^{\frac{10}{3}} \\ &= E(u_0) + \frac{3}{10} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|>R)}^{\frac{10}{3}} - \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|u(t, x)|^2 |u(t, y)|^2}{|x - y|} dx dy \\ &\leq E(u_0) + \frac{3}{10} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|>R)}^{\frac{10}{3}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

此外, 质量守恒(1.3)有

$$-\frac{3}{10} \|\rho_R u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} \leq -\frac{3}{10} \|u(t)\|_{L^{\frac{10}{3}}(|x|<R)}^{\frac{10}{3}}, \quad (4.3)$$

和

$$\begin{aligned} \|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq \left(\|\rho_R \nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \rho_R \cdot u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right)^2 \\ &\leq \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C \|\rho_R \cdot \nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C \end{aligned}$$

因此,

$$\|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C \|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C. \quad (4.4)$$

再由(4.2)~(4.4)可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \frac{3}{10} \|\rho_R u(t)\|_{\frac{10}{L^3}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} \\
 & \leq \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{\frac{10}{L^3}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} - \frac{3}{10} \|u(t)\|_{\frac{10}{L^3}(|x|<R)}^{\frac{10}{3}} + C \|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C \\
 & \leq \frac{3}{10} \|u(t)\|_{\frac{10}{L^3}(|x|>R)}^{\frac{10}{3}} + C \|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

另一方面, 根据 Gagliardo-Nirenberg 不等式可得

$$\frac{3}{10} \|\rho_R u(t)\|_{\frac{10}{L^3}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}} \leq \frac{1}{2 \|\mathcal{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{4}{3}}} \|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\rho_R u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{4}{3}}.$$

因此, 又由(4.5)可得

$$1 - \frac{\frac{3}{10} \|\rho_R u(t)\|_{\frac{10}{L^3}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}}}{\frac{1}{2} \|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2} \leq \frac{\frac{3}{10} \|u(t)\|_{\frac{10}{L^3}(|x|>R)}^{\frac{10}{3}}}{\frac{1}{2} \|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2} + \frac{C \|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C}{\frac{1}{2} \|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}. \tag{4.6}$$

和

$$1 - \frac{\frac{3}{10} \|\rho_R u(t)\|_{\frac{10}{L^3}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10}{3}}}{\frac{1}{2} \|\nabla(\rho_R u(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2} \geq 1 - \frac{\|\rho_R u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{4}{3}}}{\|\mathcal{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{4}{3}}}. \tag{4.7}$$

最后, 结合(4.6)~(4.7), 命题 4.1 和引理 4.1 可知

$$\liminf_{t \rightarrow T^*} \|u(t)\|_{L^2(|x|<2R)} \geq \liminf_{t \rightarrow T^*} \|\rho_R u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq \|\mathcal{Q}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

至此, 该定理 1.2 得证。

5. 结论

本文主要研究质量临界的 Schrödinger-Poisson 方程的爆破解动力学性质, 利用带最佳常数的 Gagliardo-Nirenberg 不等式以及经典非线性 Schrödinger 方程基态的变分刻画, 得到其爆破解 $u(t)$ 当 $t \rightarrow T^*$ (T^* 为爆破时间)时的两个重要性质: 该爆破解 $u(t)$ 在 L^2 -空间中强极限的不存在性, 以及该爆破解 $u(t)$ 在原点 0 处出现 L^2 -集中现象。

参考文献

- [1] Bardos, C., Golse, F., Gottlieb, A.D. and Mauser, N.J. (2003) Mean Field Dynamics of Fermions and the Time-Dependent Hartree-Fock Equation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **82**, 665-683. [https://doi.org/10.1016/s0021-7824\(03\)00023-0](https://doi.org/10.1016/s0021-7824(03)00023-0)
- [2] Lieb, E.H. and Simon, B. (1977) The Thomas-Fermi Theory of Atoms, Molecules and Solids. *Advances in Mathematics*, **23**, 22-116. [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(77\)90108-6](https://doi.org/10.1016/0001-8708(77)90108-6)
- [3] Lions, P.L. (1987) Solutions of Hartree-Fock Equations for Coulomb Systems. *Communications in Mathematical Physics*, **109**, 33-97. <https://doi.org/10.1007/bf01205672>
- [4] Mauser, N.J. (2001) The Schrödinger-Poisson- $X\alpha$ Equation. *Applied Mathematics Letters*, **14**, 759-763.

- [https://doi.org/10.1016/s0893-9659\(01\)80038-0](https://doi.org/10.1016/s0893-9659(01)80038-0)
- [5] Cazenave, T. (2003) Semilinear Schrödinger Equations. American Mathematical Society.
<https://doi.org/10.1090/cln/010>
 - [6] Kikuchi, H. (2007) Existence and Stability of Standing Waves for Schrödinger-Poisson-Slater Equation. *Advanced Non-linear Studies*, **7**, 403-437. <https://doi.org/10.1515/ans-2007-0305>
 - [7] Bellazzini, J., Jeanjean, L. and Luo, T.J. (2013) Existence and Instability of Standing Waves with Prescribed Norm for a Class of Schrödinger-Poisson Equations. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **107**, 303-339.
<https://doi.org/10.1112/plms/pds072>
 - [8] 李晓光, 张健, 吴永洪. Schrödinger-Poisson-Slater 方程驻波的强不稳定性[J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(1): 45-58.
 - [9] Feng, B.H., Chen, R.P. and Wang, Q.X. (2020) Instability of Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger-Poisson Equation in the L^2 -Critical Case. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **32**, 1357-1370.
<https://doi.org/10.1007/s10884-019-09779-6>
 - [10] Fang, D.Y. and Han, Z. (2011) The Nonlinear Schrödinger Equations with Combined Nonlinearities of Power-Type and Hartree-Type. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **32**, 435-474. <https://doi.org/10.1007/s11401-011-0642-7>
 - [11] Merle, F. (1989) Limit of the Solution of a Nonlinear Schrödinger Equation at Blow-Up Time. *Journal of Functional Analysis*, **84**, 201-214. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(89\)90119-5](https://doi.org/10.1016/0022-1236(89)90119-5)
 - [12] Merle, F. and Tsutsumi, Y. (1990) L^2 -Concentration of Blow-Up Solutions for the Nonlinear Schrödinger Equation with Critical Power Nonlinearity. *Journal of Differential Equations*, **84**, 205-214.
[https://doi.org/10.1016/0022-0396\(90\)90075-z](https://doi.org/10.1016/0022-0396(90)90075-z)
 - [13] Nawa, H. (1999) Asymptotic and Limiting Profiles of Blow-Up Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation with Critical Power. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **52**, 193-270.
[https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0312\(199902\)52:2<193::aid-cpa2>3.0.co;2-3](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0312(199902)52:2<193::aid-cpa2>3.0.co;2-3)
 - [14] Hmidi, T. and Keraani, S. (2005) Blowup Theory for the Critical Nonlinear Schrödinger Equations Revisited. *International Mathematics Research Notices*, **2005**, 2815-2828. <https://doi.org/10.1155/imrn.2005.2815>
 - [15] Weinstein, M.I. (1983) Nonlinear Schrödinger Equations and Sharp Interpolation Estimates. *Communications in Mathematical Physics*, **87**, 567-576. <https://doi.org/10.1007/bf01208265>
 - [16] Strauss, W.A. (1977) Existence of Solitary Waves in Higher Dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, **55**, 149-162. <https://doi.org/10.1007/bf01626517>