

一个三重积分例题计算方法的探讨

朱 敏

云南大学数学与统计学院, 云南 昆明

收稿日期: 2026年8月28日; 录用日期: 2026年9月25日; 发布日期: 2026年10月28日

摘 要

从一个典型例题中整理了三重积分的多种计算方法, 特别针对在椭球体上的三重积分和椭圆上的二重积分给出不同的计算方法, 希望在积分计算方法上给予启发和参考。

关键词

积分, 对称性, 轮换性, 换元

Discussion on the Calculation Methods of an Example of Triple Integral

Min Zhu

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan

Received: August 28, 2026; accepted: September 25, 2026; published: October 28, 2026

Abstract

Various calculation methods for triple integrals have been summarized from a typical example. Special focus is placed on presenting different calculation approaches for triple integrals over ellipsoids and double integrals over ellipses, with the aim of providing insights and references for integral calculation methods.

Keywords

Integration, Symmetry, Cyclic Symmetry, Substitution



1. 引言

微积分是一门数学基础课程,它不仅培养学生的数学逻辑推导思维和数学的计算能力,还能让学生在数学方法的多样性和数学思维的多元性训练中,树立灵活多变的思维方式,开拓思路,建立多元思维和多方法应用能力体系。教师在教学中利用积分计算方法的多样性,培养学生多角度思考能力和方法多元性这一数学特长[1]。在三重积分计算中,积分对称性的应用和换元法的应用是积分计算的基础能力,也是教师在教学中的重点和难点,本文以被积函数为 $x^2 + y^2 + z^2$ 在上椭球体上的三重积分为例题,呈现积分对称性和换元法的应用,及不同三重积分法,并对这广义球坐标法、截面法、投影法进行比较分析[2]-[4]。

2. 三重积分方法探讨

$$\text{例: } I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv, \quad \Omega = \left\{ x, y, z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\} (a, b, c > 0)。$$

为了更好计算该例题的积分,在作三种不同的积分方法比较前,首先利用三重积分积分的被积函数的奇偶性及积分区域的对称性对该积分在计算上作统一的化简[5],被积函数 $x^2 + y^2 + z^2$ 对三个变量 x, y, z 而言都是偶函数,积分区域 Ω 既关于 yoz 面对称,又关于 zox 面对称,可先利用奇偶对称性,将该积分化简为在第一卦限椭球体区域 $\Omega_1 = \left\{ x, y, z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ 上的三重积分:

$$I = 4 \iiint_{\Omega_1} (x^2 + y^2 + z^2) dv, \quad \Omega_1 = \left\{ x, y, z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)。$$

将其拆分成三项之和,记 $I_1 = \iiint_{\Omega_1} x^2 dv$, $I_2 = \iiint_{\Omega_1} y^2 dv$, $I_3 = \iiint_{\Omega_1} z^2 dv$, 有 $I = 4(I_1 + I_2 + I_3)$, 此时只需计算出 I_1 、 I_2 、 I_3 即可。

2.1. 方法I——广义的球坐标系

由于 Ω_1 为在第一卦限上的椭球体,考虑采取坐标变换作广义的球坐标系[2]:

$$\begin{cases} x = ar \sin \varphi \cos \theta \\ y = br \sin \varphi \sin \theta \\ z = cr \cos \varphi \end{cases}$$

其雅可比行列式为:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} a \sin \varphi \cos \theta & ar \cos \varphi \cos \theta & -ar \sin \varphi \sin \theta \\ b \sin \varphi \sin \theta & br \cos \varphi \sin \theta & br \sin \varphi \cos \theta \\ c \cos \varphi & -cr \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = abcr^2 \sin \varphi,$$

在广义球坐标系下, $dv = |J| dr d\varphi d\theta = abcr^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$, 将且第一卦限椭球体 Ω_1 伸缩成单位球在第一卦限球体区域, 即: Ω_1

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right., \text{ 则:}$$

$$I_1 = \iiint_{\Omega_1} x^2 dv = a^3 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{\pi}{30} a^3 bc ,$$

$$I_2 = \iiint_{\Omega_1} y^2 dv = ab^3 c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{\pi}{30} ab^3 c ,$$

$$I_3 = \iiint_{\Omega_1} z^2 dv = abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{\pi}{30} abc^3 ,$$

$$I = 4(I_1 + I_2 + I_3) = \frac{2\pi}{15} a^3 bc + \frac{2\pi}{15} ab^3 c + \frac{2\pi}{15} abc^3 .$$

除用广义球坐标变换外, 此例题还可以在直角坐标下进行计算, 有两种计算方法: 截面法和投影法[3][4]。但由于被函数 $x^2 + y^2 + z^2$ 在积分区域 $\Omega_1 = \left\{ x, y, z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ 上具备对称轮换性[5], 因此在对直角坐标系下计算方法的讨论中, 只需计算出 I_1 的值, I_2 、 I_3 便能用积分轮换性类地计算出它们的值。在下文对截面法和投影法的介绍中, 只重点给出 I_1 的计算方法的探讨。

2.2. 方法II——截面法

$$I_1 = \iiint_{\Omega_1} x^2 dv, \quad \Omega_1 = \left\{ x, y, z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) \text{ 在直角坐标系下的截面法的计算,}$$

会因选取的截面不同, 而产生计算方法的差异性。本节将对 I_1 选取两种截面法: 平行 $yo z$ 面的截面和平行 xoz 面的截面, 同时在这两种截面上对 I_1 的计算方法进行探讨。

2.2.1. 选取平行 $yo z$ 面的截面

由积分区域 Ω_1 是第一卦限椭球体, 且被积函数为 x^2 只含变量 x , 对 Ω_1 可选取平行 $yo z$ 面的椭圆截面, I_1 在截面上的二重积分可转换计算该椭圆截面面积即可, 可降低 I_1 的积分计算量, 更便捷计算 I_1 的积分值。记在 Ω_1 作平行 $yo z$ 面的椭圆截面为 $D(x): \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2}, y \geq 0, z \geq 0 (0 \leq x \leq a)$, 有:

$$\Omega_1 : \begin{cases} D(x): \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2}, y \geq 0, z \geq 0; \\ 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

三重积分 I_1 可先计算在椭圆截面 $D(x)$ 上的二重积分, 最后再对 x 积分:

$$I_1 = \iiint_{\Omega_1} x^2 dv = \int_0^a x^2 dx \iint_{D(x)} dy dz = \int_0^a x^2 S_{D(x)} dx, \quad (1)$$

这里 $S_{D(x)}$ 表示椭圆截面 $D(x)$ 的面积, 即: $S_{D(x)} = \frac{1}{4} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$, 代入(1), 有:

$$I_1 = \frac{1}{4} \pi bc \int_0^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{1}{30} \pi a^3 bc .$$

2.2.2. 选取平行 xoz 面的截面

如果 I_1 选择含有被积函数变量的截面, 如平行 xoz 面的截面, 此时被积函数 x^2 在截面上的二重积分会有不同的计算方法, 将对该截面上的二重积分的计算方法进行讨论。

首先记在 Ω_1 作平行 xoz 面的椭圆截面为 $D(y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{y^2}{b^2}, x \geq 0, z \geq 0 (0 \leq y \leq b)$, 有:

$$\Omega_1: \begin{cases} D(y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{y^2}{b^2}, x \geq 0, z \geq 0; \\ 0 \leq y \leq b. \end{cases}$$

I_1 的积分次序为: 先在椭圆截面 $D(y)$ 上的算二重积分, 最后再对 y 积分, 有:

$$I_1 = \iiint_{\Omega_1} x^2 dv = \int_0^b dy \iint_{D(y)} x^2 dx dz. \quad (2)$$

椭圆截面 $D(y)$ 上的二重积分 $I_{D(y)} = \iint_{D(y)} x^2 dx dz$ 可选取广义的极坐标系下积分, 也可选直角坐标系下积分。

(i) 在截面 $D(y)$ 上采取广义的极坐标积分。

$$\text{因截面 } D(y) \text{ 为椭圆, 采取广义的极坐标系, 令: } \begin{cases} x = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\rho \cos \theta \\ z = c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\rho \sin \theta \end{cases},$$

$$\text{雅可比行列式为: } J = \frac{\partial(x, z)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\cos \theta & -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\rho \sin \theta \\ c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\sin \theta & c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\rho \cos \theta \end{vmatrix} = ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\rho,$$

在广义的极坐标系下, $dx dz = |J| d\rho d\theta = ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\rho d\rho d\theta$ 且将椭圆截面 $D(y)$ 伸缩为圆心为原点, 半

径为 1 的 $\frac{1}{4}$ 圆区域, 即: $D(y): \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 有:

$$I_{D(y)} = \iint_{D(y)} x^2 dx dz = a^3 c \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{16} a^3 c \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2.$$

(ii) 在截面 $D(y)$ 上采取直角坐标系积分。

二重积分 $I_{D(y)}$ 在直角坐标系下积分, 有两种次序: 先对 z 后对 x 积分或先对 x 后对 z 积分, 但不管选择哪个次序, 都会用到三角换元法才能算出积分值。

① 在截面 $D(y)$ 上先对 z , 后对 x 积分。

由 $D(y): 0 \leq x \leq a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}, 0 \leq z \leq c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}}$, 有:

$$I_{D(y)} = \iint_{D(y)} x^2 dx dz = \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} x^2 dx \int_0^{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}}} dz = \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} x^2 c \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}} dx.$$

令 $x = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\sin \theta$, $dx = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\cos \theta d\theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 有:

$$I_{D(y)} = a^3 c \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{16} a^3 c \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2.$$

② 在截面 $D(y)$ 上先对 x , 后对 z 积分。

由 $D(y): 0 \leq z \leq c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}, 0 \leq x \leq a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$, 有:

$$I_{D(y)} = \iint_{D(y)} x^2 dx dz = \int_0^{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dz \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}} x^2 dx = \int_0^{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \frac{1}{3} a^3 \left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dz.$$

仿效上述①中的三角变换, 令 $z = c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \sin \theta$, 可得:

$$I_{D(y)} = \frac{1}{3} a^3 c \left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{16} a^3 c \left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2.$$

将上述三种方法计算 $I_{D(y)}$ 的结果代入(2)式中, 有: $I_1 = \int_0^b \frac{\pi}{16} a^3 c \left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{30} a^3 bc$ 。

当然, I_1 的积分计算还可以选择平行 xoy 面的截面法, 在截面进行变量轮换: 将变量 $y \rightarrow z$ 和参数 $b \rightarrow c$ 轮换后[5], 仿效 2.2.2. 选取平行 xoz 面的截面所探讨的计算方法计算其值。

2.3. 方法III——投影法

如果 I_1 的积分计算在直角坐标系下采取投影法, 有三种情形, 但因 I_1 在三个坐标面上的投影区域均为椭圆区域, 且具有变量轮换性的特点[5], 因而给出先对 z 积分, 将 Ω_1 投影到 xoy 面上的投影法的详细讨论。

2.3.1. 先对 z 积分

将 Ω_1 投影到 xoy 面上得到椭圆投影区域记为 D_{xy} 且 $D_{xy}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$, 由椭球面方程:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 在 Ω_1 上可以得 $z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, 故 z 的积分上下限为 $0 \leq z \leq c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, I_1 可先对 z 积分, 再在椭圆投影区域 D_{xy} 上算二重积分, 有:

$$I_1 = \iiint_{\Omega_1} x^2 dv = \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz = \iint_{D_{xy}} cx^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dx dy, \quad (3)$$

而在椭圆区域 D_{xy} 上的二重积分, 可仿效截面 $D(y)$ 的二重积分计算方法, 用广义极坐标系下或直角坐标系计算出 $I_1 = \frac{\pi}{30} a^3 bc$ 。同时, 若选择先对 y 积分, 再在投影区域 D_{zx} 上的二重积分, 也可由变量轮换性[5]: 在上式(3)中将 $z \rightarrow y$, 参数 $b \rightarrow c$, 用类似方法算出 I_1 。

2.3.2. 先对 x 积分

I_1 的被积函数 x^2 含有变量 x , 若先对 x 的积分这一积分次序, 要计算函数 x^2 的积分, 其计算量较先对 z 积分多。将 Ω_1 投影到 $yo z$ 面上得到椭圆投影区域, 记为 D_{yz} 且 $D_{yz}: \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, y \geq 0, z \geq 0$ 。在椭球面

Ω_1 上解得 $x = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$, $\Omega_1: \begin{cases} 0 \leq x \leq a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \\ D_{yz} \end{cases}$, 则有:

$$I_1 = \iint_{D_{yz}} dy dz \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}} x^2 dx = \frac{1}{3} a^3 \iint_{D_{yz}} \left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dy dz,$$

而在椭圆域 D_{yz} 上的二重积分 $I_{D_{yz}} = \iint_{D_{yz}} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dydz$ ，它仍然是被积函数含有二次根式的无理函数积分，可用平行 xoz 面的截面中所探讨方法，计算出 $I_1 = \frac{\pi}{30} a^3 bc$ 。

另外，仍然需要说明的是在 I_1 还可以在直角坐标系下直接化为三次积分的方法，但由于此情形采用的方法思路与投影法相似，本文就不再重复列举整理。

3. I_1 三种方法的对比

前文对 I_1 积分计算方法展开探讨，体现积分求解方法的多样性及灵活性。椭球体上的三重积分一般可采用广义球坐标、截面法与投影法三类思路求解。三类方法在积分定限、计算量、椭球体几何分析及易错环节等方面各有差异。针对本例 I_1 的积分计算，广义球坐标积分形式简洁，但对相关积分公式的灵活应用要求较高；选取平行 $yo z$ 面的截面法计算效率最优，但对椭球体的几何结构分析能力要求高；投影法基础性与通用性强，但计算过程繁琐。现将 I_1 三种积分方法的优势与不足汇总对比，如表 1 所示。

Table 1. Strengths and limitations of three integration methods
表 1. 三种积分方法的优点及不足

广义球坐标	<p>优点：通过伸缩变换把椭球化为单位球，积分限简洁直观，积分变量相互分离，计算量最小，为本例题次优解法。</p> <p>不足：方法辨识度低，学生难以主动选用；解题过程中容易漏乘雅可比行列式，行列式计算、积分上下限的确定均易出错，公式 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ 灵活运用能力不足。</p>
截面法	<p>由于椭球体可由椭圆截面累积，在椭圆截面上计算二重积分可以采取广义极坐标将椭圆伸缩成单位圆，可以降低计算量。在三种截面法的计算中，由于被积函数只含变量 x，选取平行 $yo z$ 面的截面进行积分计算时，它的计算量是最小，其他两种截面法计算量差不多的。</p> <p>1. 选取平行 $yo z$ 面的截面</p> <p>优点：结合被积函数的特点，选择垂直于 x 轴的截面使得在该截面上的积分化简为只需算该截面的面积，将三重积分简化为一元定积分，化简后为幂函数积分，大幅减少计算量，是本题推荐的最优解法。</p> <p>不足：学生难以掌握椭球的变椭圆截面几何结构，截面法定限难度大，且截面方程随变量 x 变化，椭圆面积易算错，对学生数学综合能力要求高。</p> <p>2. 选取其他截面</p> <p>优点：椭球截面为椭圆图形，在截面积分中优选广义极坐标变换，可将椭圆伸缩转化为单位圆，有效简化截面二重积分的运算难度，是求解本题的常用方法。</p> <p>不足：该方法需要学生掌握广义极坐标变换的雅可比行列式计算，同时熟练确定变换后的积分上下限，对公式 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ 的灵活运用能力要求较高；若学生在椭圆截面上直接采用直角坐标积分，计算量与投影法相近。</p>
投影法	<p>投影法三类解法中计算量最大的方法，同时也是最基础、最通用的三重积分求解方法。在本题求解中，结合仅含单变量的被积函数特点，选择适配的积分次序，如选择先对 z 积分或先对 y 积分可大幅缩减计算量；同时在椭圆投影区域上选用广义极坐标变换，是优化投影法计算过程、降低运算难度的有效手段。</p> <p>优点：属于学生最熟悉的基础通用方法，解题思维门槛低，积分定限简单，可快速构建先一后二积分次序，普适性极强。</p> <p>不足：整体计算量最大、易错点多；需熟练掌握积分公式 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ 与三角代换知识，解题繁琐度高。</p>

4. 小结

本文以一道椭球区域三重积分例题梳理了换元法、截面法、投影法三类三重积分求解思路，同时探讨三种方法的优劣。面对二次曲面为积分边界如：球面或椭球面、被积函数为多项式类的重积分问题，对称性与坐标变换是优先选用的化简工具：合理运用奇偶性、轮换对称性能够剥离冗余计算，实现积分快速化简[2][5]；特别针对椭球这类二次闭曲面区域，广义球坐标变换、截面法可以有效降低三重积分运算复杂度；与之对应，处理椭圆域上的二重积分时，广义极坐标变换也是行之有效的简化手段。

重积分的学习不局限于掌握孤立的解题技巧，而应当建立方法选择的思维模式：根据积分区域几何特征与被积函数结构，匹配恰当的积分策略，做到多种方法融会贯通。

基金项目

云南大学 2023 年教育教学改革研究项目，项目名称：基于大学数学的案例教学方法对比研究，项目编号：2023Y24。

参考文献

- [1] 同济大学数学教研室. 高等数学：下册[M]. 第 8 版. 北京：高等教育出版社, 2023: 154-161.
- [2] 井晨睿, 亓协兴, 马宝红. 计算三重积分坐标系选取方法探讨[J]. 教育教学论坛, 2019(14): 210-211.
- [3] 赵金虎. 从一题多解探析三重积分的计算方法[J]. 湖南工业职业技术学院学报, 2021, 21(6): 26-28+57.
- [4] 江婧. 一题多解探究三重积分的计算方法[J]. 科技风, 2023(9): 117-119.
- [5] 杨春玲, 张传芳. 轮换对称性及其应用[J]. 高等数学研究, 2025, 28(2): 5-78+85.