

指向类比推理能力培养的探究案例

——几何体的表面积与体积的关系探究

孟 凡, 杨 军

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年8月28日; 录用日期: 2026年9月29日; 发布日期: 2026年10月30日

摘 要

类比推理是高中数学核心思维能力之一, 是学生实现知识迁移、建构数学规律的重要载体。本文以人教版高中数学导数章节拓展内容为依托, 以几何体表面积与体积的导数关系为探究主题, 设计指向学生类比推理能力培养的探究式案例。以圆与球的公式导数规律为切入点, 引导学生发现二维、三维对称几何体中“面积导数为周长、体积导数为表面积”的特殊规律, 通过正方形、正方体引发认知冲突, 逐步修正猜想。进而依次对正方体、长方体、圆柱体等典型几何体展开探究, 通过变量替换、几何直观分析、代数推导验证等方式, 揭示几何体表面积与体积导数关系的本质: 该规律的成立与否并非取决于几何图形形态, 而是由几何体的生长扩张方式与自变量选取方式决定, 选取几何体中心到表面的距离为特征自变量时, 各类几何体均可实现体积导数与表面积的统一对应关系。整个过程遵循“观察-猜想-验证-修正-归纳”的探究主线, 让学生亲历从特例发现、冲突思辨到本质提炼的完整数学探究过程, 有效实现二维到三维的思维跃迁, 在掌握几何导数核心规律的同时, 锤炼类比推理、质疑求证、模型建构的数学核心素养, 为高中数学导数几何意义拓展教学与思维能力培养提供实践参考。

关键词

类比推理, 导数几何意义, 几何体, 表面积与体积

An Inquiry Case Aiming at Cultivating Analogical Reasoning Ability

—Exploration of the Relationship between Surface Area and Volume of Geometric Solids

Fan Meng, Jun Yang

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: August 28, 2026; accepted: September 29, 2026; published: October 30, 2026

Abstract

Analogical reasoning is one of the core thinking abilities in senior high school mathematics. It serves as a vital carrier for students to realize knowledge transfer and construct mathematical rules. Based on the extended content of the Derivatives chapter in the People's Education Press senior high school mathematics textbook, this paper takes the derivative relationship between the surface area and volume of geometric solids as its research theme, and designs an inquiry-based teaching case oriented to cultivating students' analogical reasoning ability. Starting from the derivative rules of formulas for circles and spheres, the teaching guides students to discover the special rule that "the derivative of area equals perimeter, and the derivative of volume equals surface area" for two-dimensional and three-dimensional symmetric geometric figures. Cognitive conflicts are triggered through squares and cubes to revise conjectures step by step. Typical geometric solids including cubes, cuboids and cylinders are further explored. By means of variable substitution, geometric intuitive analysis and algebraic derivation and verification, this paper reveals the essence of the derivative relationship between the surface area and volume of geometric solids: whether the rule holds does not depend on the shape of geometric figures, but on the growth-expansion mode of geometric solids and the selection of independent variables. When the distance from the center of a geometric solid to its surface is selected as the characteristic independent variable, the unified correspondence between the derivative of volume and surface area can be achieved for various geometric solids. Following the inquiry thread of "observation-conjecture-verification-revision-induction", the whole teaching process enables students to experience a complete mathematical inquiry from discovering special cases and reflecting on conflicts to extracting essences. It effectively realizes the thinking leap from two dimensions to three dimensions. While mastering the core rules of geometric derivatives, students' key mathematical competencies such as analogical reasoning, questioning and verification, and model construction are developed. This paper provides practical references for the extended teaching of the geometric meaning of derivatives and the cultivation of thinking abilities in senior high school mathematics.

Keywords

Analogical Reasoning, Geometric Meaning of Derivative, Geometric Solid, Surface Area and Volume

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 类比推理能力培养

波利亚在他的《怎样解题》一书中说：类比是一种相似性。相似的物体在某些方面彼此一致，而类似的物体则在它们相应部分的特定关系上相一致[1]。当学生观察圆与球的公式时，他们首先捕捉到的是形式上的呼应——周长是面积的导数，表面积是体积的导数。这一发现就像在数学的密林中辨认出一条隐约的小径。然而真正的思考才刚刚开始。学生必须暂时放下数字与符号，在脑海中构建这样的图景：当半径微微增加，圆的面积如何像一圈光晕均匀展开；球的体积增量，则如同一层又一层紧贴表面的薄壳。这一过程，正是从“看到相似”到“理解为什么相似”的关键一跃。

当学生带着这样的洞察审视其他几何体时，类比推理便从发现工具升级为探索罗盘。他们会追问：正方形呢？圆柱呢？规律依然成立，还是出现了有趣的“例外”？每一次猜想与验证，都是一次测试。最终，规律的本质在反复辩证中浮出水面——它并非关于特定图形，而是关于几何体扩张方式的根本特

征：当且仅当一个几何体以“保持形状”的方式均匀膨胀时，其体积对特征长度的导数，才恰好等于该时刻的表面积。

这段思考之旅的价值，远不止于得出一个数学结论。它完整呈现了“观察－抽象－类比－验证－提炼”的科学探索韵律。学生在其中亲历了从巧合到规律、从特例到本质的思维登山，他们所获得的不仅是知识，更是一种可迁移的数学思维能力。当数学不再是一串静止的公式，而是一个充满发现与解释的生动过程，求知的好奇心与探究的乐趣，便自然在其中生长。

2. 问题提出

打开人教版高中选修二的导数章节，在小结处遇到这样一个引人深思的问题：“你能从物理和几何两方面解释导数的意义吗？”[2]教材告诉我们，导数能够刻画运动变化的瞬时状态——从物理学的效率、电流变化，到日常生活中的温度升降，它无处不在。然而，当我们目光转向几何的世界，导数的形象却似乎朦胧起来。物理世界有运动轨迹、有速度变化，导数在其中如鱼得水，可到了静止的几何图形中，导数又扮演着什么角色？难道它只属于动态的物理，而与静态的几何图形无关？

正是这个疑问，将我们引向一个更深层的数学洞察：在几何中，导数同样讲述着“变化的故事”——它不是物体在时间中的运动，而是图形在变化过程中，形态与度量之间隐秘的呼应。当我们思考“一个球慢慢变大时，它的体积是如何变化的”，便不知不觉踏入了几何导数的奇妙世界[3]。

本文尝试推开这扇门，以类比推理为钥匙，设计一个引导学生从熟悉走向发现的教学旅程。从圆的周长与面积的关系出发，到球的表面积与体积的关联，再到更复杂的长方体与圆柱——我们将在几何的静谧图景中，听见导数发出的清晰而优美的回响。

3. 指向类比推理能力培养的“几何体表面积与体积关系探究”设计

本章节的教学过程，围绕“观察－猜想－验证－修正－归纳”的探究主线展开，旨在引导学生亲历一次完整的数学发现过程。设计以学生熟知的圆与球为认知起点，通过设置认知冲突、引导类比迁移，逐步探究长方体、圆柱等几何体中表面积与体积的导数关系。各环节环环相扣，最终建构具有一般性的数学模型。全过程注重培养学生在类比迁移中发现问题、验证猜想、修正结论的数学思维能力。

3.1. 提出问题：圆与球的“巧合”

我们已经掌握了导数这一描绘“变化”的数学工具。现在请大家观察两组熟悉的公式。

圆的周长和面积公式为： $C_{\text{圆}} = 2\pi r, S_{\text{圆}} = \pi r^2$

球的表面积与体积公式为： $S_{\text{球}} = 4\pi r^2, V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi r^3$

请特别注意它们之间的“变化关系”：

$$S'_{\text{圆}} = 2\pi r = C_{\text{圆}}, \quad V'_{\text{球}} = \pi r^2 = S_{\text{球}}$$

一个令人惊叹的“巧合”出现了：圆的周长恰好是其面积随半径变化的“速度”；球的表面积恰好是其体积随半径变化的“速度”。由此，我们不禁提出一个大胆的猜想：

猜想 1：对于一般图形，其周长是否总是面积的导数？对于一般几何体，其表面积是否总是体积的导数？

我们学过的图形和几何体还有很多——正方形、长方形、圆柱、长方体……这个看似完美的规律，是数学中隐藏的普遍真理，还是仅仅属于圆和球的“特权”？

思考：我们还学过哪些图形，上述结论对于其他图形是否也成立？

通过引导学生对熟悉公式进行“求导运算”，自主发现圆与球中存在的“面积(或体积)的导数等于周长(或表面积)”这一对应关系，从而自然生成猜想。问题从特殊案例出发，引发学生追问：其他几何体(如长方体、圆柱)是否也存在类似规律？为后续类比推理活动奠定认知起点与思维张力。[4]

3.2. 认知冲突：正方形与正方体为何不满足猜想

我们可先从熟知的、较简单的图形验证。如正方形和正方体，验证猜想 1 是否对正方形和正方体依然成立：

正方形的周长与面积公式为： $C_{\text{正方形}} = 4a, S_{\text{正方形}} = a^2$

正方体的表面积与体积公式为： $S_{\text{正方体}} = 6a^2, V_{\text{正方体}} = a^3$

比较发现： $S'_{\text{正方体}} = 2a \neq 4a = C_{\text{正方形}}$ 、 $V'_{\text{正方体}} = 3a^2 \neq 6a^2 = S_{\text{正方体}}$

发现矛盾，正方形与正方体并未“遵守”猜想 1！但敏锐的学生会注意到它们之间仍然存在一种清晰的比例关系：

$$S'_{\text{正方体}} = \frac{1}{2}C_{\text{正方形}}, V'_{\text{正方体}} = \frac{1}{2}S_{\text{正方体}}$$

为什么圆与球完美匹配，而正方形与正方体却“打了折扣”？这个“ $\frac{1}{2}$ ”从何而来？是偶然还是必然？或许，我们需要修正最初的猜想：

猜想 2：对于一般图形，其表面积的导数与周长成比例；对于一般几何体，其体积的导数与表面积成比例。

激发追问，这个比例系数是固定的吗？对于不同的几何体，它是否会变化？它由什么决定——是形状？结构性质？还是扩展的模式？

通过正方形与正方体这两个反例，制造强烈的认知冲突，打破学生对猜想 1 的简单预期。引导学生发现对于一般几何体，其体积的导数与表面积成比例这一更深层的数学结构，从而自然过渡到更具一般性的猜想 2。此环节旨在培养学生面对反例时的思辨能力与猜想修正意识，激发探究比例系数决定因素的深层好奇心[5]。

3.3. 规律探索：几何体的表面积与体积的关系探究

导数的定义：设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某领域内有定义，若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在，则称函数在点 x_0 处可导，称该极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数。

在数学中，导数的严格定义虽严谨但略显抽象——它描述的是函数在某一点处随着自变量的微小变化而产生的瞬时变化率。我们可以这样理解：当一个物体运动时，导数就是它在某一瞬间的速度；当一条曲线变化时，导数就是它在某一点处的斜率；更一般地说，导数刻画的是事物在特定时刻、特定位置的变化快慢与变化趋势。

若将这一概念迁移至几何世界，我们可以问一个类似“速度”的问题：当一个几何体的某个尺寸(比如半径、棱长或高)发生极其微小的变化时，它的面积或体积会以多快的“生长速度”相应改变？对圆而言，想象你在一个圆形薄饼的边缘均匀涂抹一圈面糊，让半径增加微小的一丝，这圈新增的面积就像一条细长的长方形带子，其长度正是圆的周长——于是面积对半径的导数就等于周长；对球而言，雪球滚上一层雪花，体积对半径的导数就等于球的表面积。

导数的几何意义就在于，它能揭示这种“生长速度”：当一个几何体的维度发生细微变化时，其面

积或体积变化的瞬时快慢，恰好由该时刻的边界长度或表面积来描述。

由此，我们先前观察到的那些“巧合”：圆的周长等于面积的导数；球的表面积等于体积的导数。实际上反映了更深层的规律：导数，作为瞬时变化率，在几何世界中同样扮演着连接不同层级几何量的角色。

然而正方形与正方体向我们展示了这一关系的“不完全形态”，这促使我们追问：这种“层级连接”是否普遍存在？如果存在，它将以何种形式呈现——是完全相等，还是成比例？比例系数又由什么因素决定？

3.3.1. 圆的周长与体积关系的探究：面积导数等于周长的几何本质

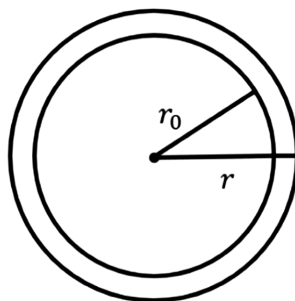
当正方形的反例让我们困惑时，不妨回到那个完美的圆。为什么圆的面积导数恰好等于周长？观察圆的生长：当半径产生一个无穷小的增量 Δr 时，圆在每个方向的增长都是均匀的。想象一个圆逐渐变大，其边界上的每一点都沿着半径方向同步向外移动。正是这种从中心向外的均匀辐射式生长，使得面积的瞬时变化率恰好等于此刻的周长。带着这个观察重新思考：猜想 1 的错误之处在于，它默认所有图形的周长与面积导数都恒等。实际上，对于圆而言，这种相等关系并非普遍规律下的“巧合”，而是源于其独特的均匀生长方式——当且仅当几何体以“从中心向各向同性”的方式扩张时，才会出现 $S' = V$ 或 $V' = S$ 的简洁形式。那么，这种均匀生长背后的数学本质是什么？

从数学上看，圆的面积增量为：

$$\Delta S = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2$$

当 Δr 无限变小时，圆面积增加的部分，恰好是以此刻周长为边界、厚度为 Δr 的一层极薄的圆环。

通过导数的定义计算，面积对半径 r 求导为：



$$S' = \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{S(r) - S(r_0)}{r - r_0}$$

代入计算：

$$\begin{aligned} S' &= \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{\pi r^2 - \pi r_0^2}{r - r_0} \\ &= \lim_{r \rightarrow r_0} \pi(r + r_0) \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

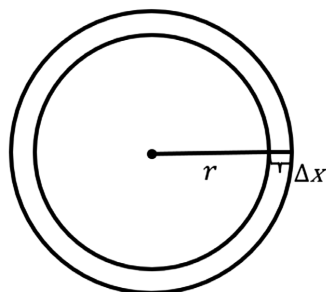
计算得，当圆半径增加的大小无限接近于 0 时，圆面积的导数与周长相等。图中可看出，当两个半径分别为 r 与 r_0 的同心圆无限接近时，它们之间的环形区域仿佛一条环绕圆周、厚度趋近于零的“数学丝带”。这条丝带的面积在极限意义上约等于周长乘以厚度 ($\Delta S \approx 2\pi r \times \Delta r$) 而导数的定义要求计算面积变

化量与半径变化量的比值 $\frac{\Delta S}{\Delta r}$, 因此需要再除以厚度 Δr , 此时 Δr 被约掉, 剩下的恰好是周长 $2\pi r$ 。换句话说, 面积对半径的瞬时变化率, 正是此刻的圆周长。

本环节从代数上验证“面积导数等于周长”这一事实, 更引导学生从几何直观上理解导数的瞬时意义——它描绘的是变化发生的那一“刻”、那一“层”的状态。这种从“静态公式”到“动态过程”的认知转换, 为后续将思维从二维平面迁移至三维空间, 类比理解“体积导数等于表面积”奠定坚实的逻辑与直觉基础。

3.3.2. 球体表面积与体积关系的探究

既然圆给了我们启发, 我们很自然地会问: 在三维世界中, 球是否也存在类似的关系? 能否用相似的思路来理解球的体积导数? 让我们进行严谨的推导。



球体体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 当半径 r 增加 Δx 时, 球体体积为 $V = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta x)^3$ 。

球体体积求导得:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} &= \frac{V(r + \Delta x) - V(r)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}\pi(r + \Delta x)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4}{3}\pi [3r^2 + 3r\Delta x + (\Delta x)^2] \\ &= 4\pi r^2 \\ &= S_{\text{球}}\end{aligned}$$

计算证实: 球的体积导数确实等于其表面积。

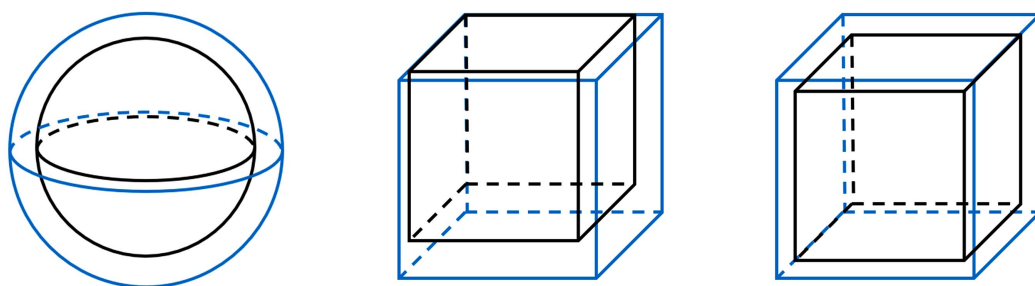
如何直观理解这一结果? 我们可以延续圆的思路进行类比想象: 当球的半径增加一个微小的 Δx 时, 其体积的增量 ΔV 相当于在球体表面均匀地“包裹”上一层极薄的“薄膜”。这层膜的厚度是 Δx 。而它的“包裹面积”正是球的表面积。

综上, 对几何体体积求导 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}$, 相当于在几何体的表面覆一层厚度均匀的膜。厚度增量为 Δx , $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 从球体看, 导数刚好等于球体表面积。

通过严格的数学推导与生动的几何类比, 验证球体满足 $V' = S$ 的规律, 并引导学生将二维的“圆环”模型成功迁移至三维的“球壳”模型, 完成从平面到空间的思维跃迁, 深化对导数几何意义的理解。

3.3.3. 正方体表面积与体积关系的探究: 为什么正方体“不听话”?

仔细思考球与正方体的生长差异。

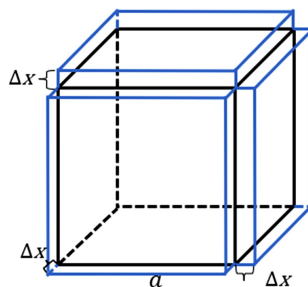


仔细观察三张图片，通过将二维转化至三维，可以直观看出：

球的生长：半径增加时，整个球面均匀向外“长出一层皮”，就像在球体表面均匀贴上一层膜。这层膜的体积恰好等于球的表面积乘以膜的厚度。

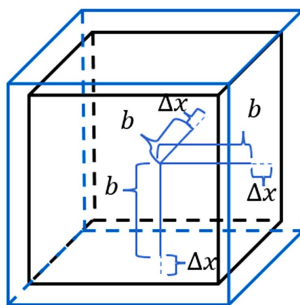
正方体的生长：棱长增加时，生长并非在所有表面均匀发生。仔细观察发现，只有三个相邻面真正向外扩张(想象一个角点处的三个面)，而另外三个面则随着其他面的扩张被动延伸。因此，体积的瞬时增量只相当于一半表面积参与“贴膜”。

我们可以这样想象：球体生长时，整个表面像气球一样均匀膨胀。正方体生长时，如同从某一顶点开始，向三个方向同时推开三个面，而另外三个面则被动跟随。这就是为什么 $V'_{\text{正方体}} = \frac{1}{2} S_{\text{正方体}}$ 。因为只有一半的表面积真正在“做增长的工作”。



思考如何突破困境。换个角度思考自变量，如果限定自变量为棱长 a ，正方体似乎只能实现“半面贴膜”。但数学的妙处在于：我们可以换一个视角，改变自变量。

类比球以半径 r 为自变量时，生长均匀。正方体是否有类似的“半径”？我们可以巧妙发现正方体的半棱长。



设正方体半棱长为 b ，则正方体表面积体积分别为：

$$S_{\text{正方体}} = 24b^2, V_{\text{正方体}} = 8b^3$$

当半棱长的增量为 Δx 时, 正方体体积为 $V_{\text{正方体}} = 8(b + \Delta x)^3$

正方体体积求导得

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} &= \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8(b + \Delta x)^3 - 8b^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 24b^2 + 24b\Delta x + 8(\Delta x)^2 \\ &= 24b^2 \\ &= S_{\text{正方体}} \end{aligned}$$

惊喜出现以半棱长为自变量时, 正方体的体积导数等于表面积!

为什么半棱长能达到“全表面贴膜”?

当半棱长 b 增加时, 相当于整个正方体从中心点向所有方向均匀扩张。这时的增长方式与球体的径向生长类似——每个面都均匀向外平移。在这样的视角下, 正方体的六个面都参与了均匀的“贴膜”过程。

由此我们得到猜想 3: 每个几何体都有其“自然生长”的方式。当我们找到描述这种自然增长的自变量(如球的半径、立方体的半棱长), 就能揭示体积与表面积之间最本质的联系。即任何几何体的体积导数都可以等于其表面积。

这个自变量通常是:

对于球体: 球心到表面的距离(半径)

对于正方体: 中心到表面的距离(半棱长)

本环节通过“贴膜”的直观比喻, 帮助学生理解正方体生长过程中的“半表面效应”, 并引导他们认识到: 导数关系不仅取决于几何形状, 还与自变量的选择密切相关。通过巧妙的变量替换, 原本“不完美”的关系可以变得“完美”, 体现了数学思维中“变换视角”的强大力量。学生将学会不局限于固定思维, 而是灵活调整视角, 寻找最优的数学描述方式。

需要注意, 球体、正方体仅由单一参数(半径、棱长)控制, 属于单参数相似几何体。而长方体、圆柱体拥有两个及以上独立几何参数, 属于多变量几何体, 其体积变化率需要借助偏导数来描述。若只改变其中某一个维度, 应当使用偏导数符号 $\frac{\partial V}{\partial r}$ 、 $\frac{\partial V}{\partial h}$, 而非普通全导数 $\frac{dV}{dr}$ 。只有几何体各个维度做同步等比例放大, 即沿相似变换方向取方向导数时, 体积对缩放参数的导数才等于几何体的总表面积。考虑授课对象为高中生, 课堂上不展开偏导数严格定义, 仅通过控制变量的几何实例让学生感知该现象背后的数学本质, 论文行文则采用规范的偏导符号加以区分[6]。

3.3.4. 长方体表面积与体积关系的探究: 从特殊到一般的思维跃迁

问题的提出: 猜想能否继续拓展?

通过对圆、球、正方形、正方体的研究, 我们发现了一个有趣的规律: 几何体体积的导数具有明确的几何意义——“在表面均匀贴上一层薄膜”时, 这层膜的体积变化率与表面积存在联系。然而, 这一关系并非总是表现为简单的相等: 以棱长为自变量时, 正方体的体积导数只有表面积的一半。这说明, 体积导数是否等于表面积, 与自变量的选择密切相关。于是我们得到猜想 3: 通过选择合适的自变量, 可

以使几何体的体积导数等于其表面积。

现在面临新的挑战：这个猜想是否适用于更一般的几何体，如长方体、圆柱等？如果适用，我们又该如何找到那个“合适的自变量”？

首先，我们考察长方体这个更具一般性的几何体。

长方体表面积与体积公式为： $S_{\text{长方体}} = 2(ab + bc + ac)$ 、 $V_{\text{长方体}} = abc$

对长方体的长宽高分别求导： $V'_a = bc$ 、 $V'_b = ac$ 、 $V'_c = ab$

此时， $S_{\text{长方体}} = 2(V'_a + V'_b + V'_c)$

这暗示着：当长方体三边独立变化时，表面积的“贡献”被平均分配到了三个方向。受正方体“半棱长”启发，我们能否为长方体找到类似的“自然生长尺度”？尝试将自变量设为半长、半宽、半高。

改变自变量，将自变量设为半长、半宽、半高： x 、 y 、 z 。

改变自变量后长方体表面积与体积公式为： $S_{\text{长方体}} = 8(xy + yz + xz)$ 、 $V_{\text{长方体}} = 8xyz$ 。设增量为 Δx 。

长方体体积对增量求得：

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} &= \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8(x + \Delta x)(y + \Delta x)(z + \Delta x) - 8xyz}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 8 \frac{(xy + yz + xz)\Delta x + (x + y + z)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 8 \left[(xy + yz + xz) + (x + y + z)\Delta x + (\Delta x)^2 \right] \\ &= 8(xy + yz + xz) \\ &= S_{\text{长方体}}\end{aligned}$$

此时 $S_{\text{长方体}} = V'_x + V'_y + V'_z$

惊喜发现，当所有“半尺寸”同步增长时，体积的导数竟然等于表面积！

为什么会有这样的结果？因为选择半长、半宽、半高作为自变量，相当于描述长方体从其几何中心到各个表面的距离。当这些距离同步增加时，长方体就像是中心点均匀向外膨胀——每个面都等距外移，实现了真正的“全表面贴膜”。这种变化方式与球体的径向生长、正方体的中心扩张一脉相承。

长方体的情况比之前的几何体更为复杂，因为它需要三个参数来描述。这促使我们的思维从单变量导数转向多变量偏导数[7]。我们发现：当自变量选取合适时，体积对某个方向的变化率可以反映表面积的相应部分所有方向的偏导数之和，与表面积存在明确的比例关系。

本环节通过长方体这一非对称几何体的探究，推导：

1. 将先前发现的规律从高度对称的几何体推广到一般情况
2. 体验寻找“合适自变量”的探索过程
3. 理解多变量情况下导数关系的复杂性
4. 认识到“从中心开始均匀生长”这一原则的普遍意义

学生将在这一过程中深化对导数几何意义的理解，并为后续研究更复杂几何体(如圆柱)做好思维准备。

3.3.5. 圆柱体表面积与体积关系的探究：圆柱的挑战

圆柱体表面积与体积公式： $S_{\text{圆柱体}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ 、 $V_{\text{圆柱体}} = \pi r^2 h$

对圆柱体半径与高分别求导: $V'_r = 2\pi rh$ 、 $V'_h = \pi r^2$

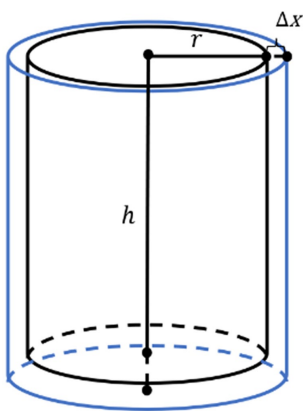
$$S_{\text{圆柱体}} = V'_r + V'_h + \pi r^2$$

一个耐人寻味的现象: 右侧多出了一项 πr^2 , 这恰好是一个底圆的面积。这意味着, 按照当前的“贴膜”方式, 圆柱体的两个底面中, 有一个被“漏贴”了。为什么会出现这种情况?

让我们从几何上理解: 当半径 r 增加时, 圆柱像“吹气球”一样向外膨胀, 侧面积均匀增长; 当高 h 增加时, 圆柱像“拉伸橡皮泥”一样被拉长, 只增加了侧面的延伸部分。但没有一个变化能同时让两个底面都均匀外扩。这就像试图给一个罐头盒均匀地“镀金”。要么镀侧面(半径变化), 要么从顶部或底部增加厚度(高变化), 但很难同时均匀地处理所有表面。

既然直接使用 h 作为自变量会导致“漏贴”一个底面, 我们能否换个思路?

受到正方体“半棱长”的启发, 我们尝试将自变量设为半高:



那我们改变自变量高 h , 将自变量设为半高 t 。

此时圆柱体表面积与体积公式: $S_{\text{圆柱体}} = 2\pi r^2 + 4\pi rt$ 、 $V_{\text{圆柱体}} = 2\pi r^2 t$ 。设增量为 Δx

圆柱体求导得:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} &= \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\pi(r + \Delta x)^2(t + \Delta x) - 2\pi r^2 t}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\pi \frac{r^2 t + 2rt\Delta x + t(\Delta x)^2 + r^2 \Delta x + 2r(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - r^2 t}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\pi (2rt + t\Delta x + r^2 + 2r\Delta x + (\Delta x)^2) \\ &= 4\pi rt + 2\pi r^2 \\ &= S_{\text{圆柱体}} \end{aligned}$$

神奇的时刻: 当选择半径和半高作为自变量时, 圆柱体体积的导数终于等于其完整的表面积!

几何上, 这相当于将圆柱体的“生长起点”置于其几何中心。此时: 圆柱体从中点向两端均匀扩张, 上下两个底面对称地向远离中心的方向平移, 侧面同时向外、向两端均匀膨胀。这样的生长方式, 确保了所有表面包括两个底面和侧面都参与了均匀的“贴膜”过程。

圆柱体的探究再次印证了一个深刻规律: 当以几何体的“特征尺度”作为自变量时, 这个尺度通常

描述从中心到边界的距离，体积与表面积之间会呈现最简洁的导数关系。

通过圆柱体这一特殊而重要的几何体，引导学生体验数学探索中的“受阻－分析－突破”过程；理解复杂几何体生长方式的多样性；掌握通过变量变换寻找“自然生长尺度”的方法；深化对“中心生长”这一统一原理的认识[8]。

圆柱体的案例特别有价值，因为它既不像球体那样完全对称，也不像长方体那样各向异性。研究它，有助于学生建立更全面、更灵活的几何直觉，为理解更一般的数学规律奠定坚实基础[9]。

3.4. 本质探寻：导数几何意义的统一视角

通过上述多组几何体的探究可以发现，“体积求导等于表面积”这一结论不是无条件成立。导数结果高度依赖自变量的选择方式：是改变单一维度，还是全部参数同步相似缩放。下面表格明确每种情形下自变量、体积表达式、导数符号与对应的几何意义，厘清不同条件下导数与表面积的关系[10]。

(1) 规律汇总通过系统的探究，我们获得了以下发现：

几何体	自变量选择	体积表达式	导数类型	导数公式	导数对应的几何含义
球体	半径： r	$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$	常微分	$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$	球体总表面积
正方体	棱长： a	$V(a) = a^3$	常微分	$\frac{dV}{da} = 6a^2$	正方体总表面积
圆柱体	底面半径 r ，高 h 固定不变	$V(r) = \pi r^2 h$	偏导数	$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$	圆柱体侧面积
圆柱体	高 h ，底面半径 r 固定不变	$V(h) = \pi r^2 h$	偏导数	$\frac{\partial V}{\partial r} = \pi r^2$	圆柱体单个底面积
圆柱体	相似缩放参数 t ， $r(t) = r_0 t$ ， $h(t) = h_0 t$	$V(r(t), h(t)) = \pi r_0^2 h_0 \cdot t^3$	复合函数全导数	$\frac{d[V(r(t), h(t))]}{dt} = 3\pi r_0^2 h_0 \cdot t^2$	按比例缩放后圆柱的总表面积
长方体	棱长 a 、 b 、 c 固定不变	$V(a) = abc$	偏导数	$\frac{\partial V}{\partial a} = bc$	垂直于棱 a 的单个截面面积
长方体	缩放参数， $a(t) = a_0 t$ ， $b(t) = b_0 t$ ， $c(t) = c_0 t$	$V(a(t), b(t), c(t)) = a_0 b_0 c_0 \cdot t^3$	复合函数全导数	$\frac{d[V(a(t), b(t), c(t))]}{dt} = 3t^2 (a_0 b_0 + b_0 c_0 + a_0 c_0)$	按比例缩放后长方体总表面积

从表格可以看出：自变量选取、参数是否做相似变换，直接决定导数结果。对于多参数几何体，对单一参数求偏导，结果仅对应部分曲面面积；只有全部参数同步缩放，方向导数才等于总表面积。这也提醒学生，类比推理不能直接无条件迁移，需要辨析条件边界[11]。

这个表格清晰地展示了一个重要事实：通过恰当选择自变量，我们总能使几何体的体积导数(或偏导之和)等于其表面积。

(2) 核心发现：自变量的选择是理解本质的关键。

本节课的核心洞见在于：导数的几何意义不仅在于描述变化率，更在于揭示了如何用最自然的“生长尺度”来统一描述几何体的扩张过程。

对于球体，自然的尺度是半径

对于正方体, 自然的尺度是半棱长

对于圆柱, 自然的尺度是半径和半高

当我们选择这些“从中心到表面”的距离作为自变量时, 几何体的体积变化就能用其表面积来精确描述。

参考文献

- [1] 波利亚. 怎样解题: 数学思维的新方法[M]. 涂泓, 冯承天, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2007.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [3] 贺建旗. “导数的几何意义”教学设计[J]. 数学学习与研究, 2019(14): 90-91.
- [4] 黄蕾. 基于直观想象素养的高中“立体几何”教学设计研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆师范大学, 2025.
- [5] 杨玉社. 超越信息获取: 数字化视域下高中生思辨能力培育新范式[J]. 现代阅读, 2026(17): 68-70.
- [6] 刘丽丽. 控制变量法在初中数学动态几何问题中的实践应用[J]. 中学课程辅导, 2026(18): 63-65.
- [7] 吉俊杰. 解答导数双变量问题的途径[J]. 语数外学习(高中版下旬), 2023(10): 43-44.
- [8] 袁华. 几何约束求解中关键技术的研究[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2009.
- [9] 牟泽湖. 实验法教学在立体几何体积教学中的应用——以圆柱体、圆锥体体积运算为例[J]. 数学学习与研究, 2019(12): 101.
- [10] 马荣, 张玉龙. 两类特殊几何体体积与表面积的关系[J]. 高等数学研究, 2012, 15(6): 27-28.
- [11] 人民教育出版社课程教材研究所. 普通高中教科书数学选择性必修第二册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.