

一类光滑泊松代数的构造

李怡频, 刘立宇*

扬州大学数学学院, 江苏 扬州

收稿日期: 2026年9月2日; 录用日期: 2026年10月10日; 发布日期: 2026年10月28日

摘 要

本文利用经典型广义外尔代数构造了一类泊松代数, 证明了这类泊松代数是光滑代数且具有平凡的典范丛。

关键词

泊松代数, 光滑, 典范丛

Construction of a Class of Smooth Poisson Algebras

Yipin Li, Liyu Liu*

School of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu

Received: September 2, 2026; accepted: October 10, 2026; published: October 28, 2026

Abstract

A class of Poisson algebras are constructed via generalized Weyl algebra of classical type. It is showed that these Poisson algebras are smooth and have trivial canonical bundle.

Keywords

Poisson Algebra, Smooth, Canonical Bundle

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

*通讯作者。

文章引用: 李怡频, 刘立宇. 一类光滑泊松代数的构造[J]. 理论数学, 2026, 16(10): 86-91.

DOI: 10.12677/pm.2026.1610215

1. 引言

泊松代数起源于经典哈密顿力学。在经典力学中, 哈密顿系统的可观测量构成函数空间, 该空间上定义了泊松括号, 用来刻画可观测量之间的动力学关联。伴随着 20 世纪微分几何的发展, 这一结构抽象成数学中的泊松代数, 并逐步成为非交换几何、量子群、可积系统、李双代数的研究基础。简言之, 泊松代数是同时拥有交换结合乘法与李括号的代数结构, 且李括号对乘法满足莱布尼茨性质[1]。

定义 1.1 设 R 是基域 $\mathbb{k}$ 上的交换结合代数, $\{\cdot, \cdot\}: R \times R \rightarrow R$ 是双线性映射。如果 $(R, \{\cdot, \cdot\})$ 是一个李代数且

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + \{a, c\}b, \quad \forall a, b, c \in R \quad (1)$$

成立, 那么 R 称为泊松代数, $\{\cdot, \cdot\}$ 称为 R 上的泊松括号。

泊松代数与泊松几何相辅相成。20 世纪下半叶, Lichnerowicz 定义了泊松上同调, 标志着泊松几何作为独立分支诞生; Weinstein 证明了泊松几何局部结构定理——分裂定理, 他与合作者解决了泊松流形的可积性问题, 证明泊松流形可积当且仅当其横截李代数胚可积。时至今日, 泊松代数已从微分几何延伸到代数几何、非交换几何、场论、可积系统等数学分支。

泊松代数是量子化的代数基础, 经典泊松括号经形变量子化过渡为量子代数的交换子, 对应从经典力学到量子力学的过渡。反过来, 对量子代数(如量子群)取半经典极限, 可以得到泊松代数。例如,

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar \hat{J}_y$$

是量子角动量交换子, 每个等式两边除以 $i\hbar$ 并令 $\hbar$ 趋于零, 则可得到李括号

$$\{J_x, J_y\} = J_z, \quad \{J_y, J_z\} = J_x, \quad \{J_z, J_x\} = J_y。$$

这就是 $so(3)^*$ 泊松代数。

有一大类泊松代数作为交换代数是多项式代数, 它们都是典型的光滑代数。一般地, 有限生成交换代数的光滑性可通过 Kähler 微分模进行刻画[2]。

定理 1.2 设 $A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$ 是有限生成交换代数, 则其 Kähler 微分模为

$$\Omega_A^1 = \bigoplus_{i=1}^n A dx_i / \sum_{j=1}^r A df_j。 \quad (2)$$

若进一步设 $\mathbb{k}$ 是代数闭域, 则 $\text{rank}(J) \leq n - \dim A$, A 是光滑代数且仅当等号在各点处成立, 其中 $J = (\partial f_j / \partial x_i)$ 是 Jacobi 矩阵, $\dim A$ 是 A 的 Krull 维数。

令 Ω_A^s 是 Ω_A^1 的 s 重外积。当定理 1.2 的条件满足时, 记 $d = \dim A$, 则有 $\Omega_A^d \neq 0$ 且 $\Omega_A^s = 0$ ($s > d$)。 Ω_A^d 称为 A 的典范丛, 若 Ω_A^d 作为 A -模是秩 1 自由模, 则称为 A 的典范丛是平凡的。具有平凡典范丛的光滑泊松代数往往具有好的性质, 其泊松同调与上同调具有对偶性[3]。

本文的核心任务是通过广义外尔代数构造泊松代数。为此我们介绍广义外尔代数的一些知识[4]。

定义 1.3 设 $\mathbb{k}[z]$ 是一元多项式代数, σ 是 $\mathbb{k}[z]$ 的代数自同构, $h(z) \in \mathbb{k}[z]$ 。定义如下代数 $A = \mathbb{k}\langle x, y, z \rangle / I$, 其中理想 I 由下面 4 个元素生成

$$xz - \sigma(z)x, \quad yz - \sigma^{-1}(z)y, \quad yx - h(z), \quad xy - \sigma(h(z)),$$

则 A 称为由 $(\sigma, h(z))$ 决定的广义外尔代数。

在同构意义下, σ 只有 3 类: 交换型、量子型、经典型, 分别对应于 $\sigma(z) = z$, $\sigma(z) = qz$ (其中 $q \in \mathbb{k}$

且 $q \neq 0, 1$), $\sigma(z) = z + 1$ 。本文考虑经典型广义外尔代数, 于是在 A 中有关系式

$$[x, z] = x, \quad [y, z] = -y, \quad [x, y] = h(z+1) - h(z), \quad yx - h(z), \quad (3)$$

其中 $[a, b] = ab - ba$, $\forall a, b \in A$ 。

2. 主要结论

从本节开始, 基域 $\mathbb{k}$ 是代数闭域。

2.1. 泊松代数的构造

根据公式(3), 我们取交换代数 $R = \mathbb{k}[x, y, z]/(yx - h(z))$, 用导数 $h'(z)$ 替代步长为 1 的差分 $h(z+1) - h(z)$, 定义

$$\{x, z\} = x, \quad \{y, z\} = -y, \quad \{x, y\} = h'(z), \quad (4)$$

并通过公式(1)和反称性质将 $\{\cdot, \cdot\}$ 延拓定义在 R 上。注意到在同构意义下, $\sigma(z) = z + 1$ 可以改成 $\sigma(z) = z + \varepsilon$ ($\varepsilon \neq 0$), 此时将交换子除以 ε 再令其趋于零, 即可得到公式(4)。换言之, 上述定义运用了半经典极限的技巧。

为了保证公式(4)使得 R 成为一个泊松代数, 首先要验证括号的合理性。

引理 2.1 公式(4)给出的括号 $\{\cdot, \cdot\}$ 是 R 上的合理的二元运算, 即 $\{\cdot, yx - h(z)\}$ 恒为零。

证明 只需验证 $\{x, yx - h(z)\} = \{y, yx - h(z)\} = \{z, yx - h(z)\} = 0$ 。

首先,

$$\begin{aligned} \{x, yx - h(z)\} &= \{x, yx\} - \{x, h(z)\} \\ &= \{x, y\}x + \{x, x\}y - \{x, z\}h'(z) \\ &= h'(z)x + 0 - xh'(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理可证 $\{y, yx - h(z)\} = 0$ 。其次,

$$\begin{aligned} \{z, yx - h(z)\} &= \{z, yx\} - \{z, h(z)\} \\ &= \{z, y\}x + \{z, x\}y - \{z, z\}h'(z) \\ &= yx - xy - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是结论成立。

定理 2.2 $R = \mathbb{k}[x, y, z]/(yx - h(z))$ 是一个泊松代数, 其泊松括号由公式(4)给出。

证明 根据引理 2.1, $\{\cdot, \cdot\}$ 是合理的二元运算, 并且其定义遵循公式(1)(即 $\{\cdot, \cdot\}$ 对乘法满足莱布尼茨性质)。只需再证明其满足李代数公理中的 Jacobi 恒等式。经计算, 有

$$\begin{aligned} &\{x, \{y, z\}\} + \{y, \{z, x\}\} + \{z, \{x, y\}\} \\ &= \{x, -y\} + \{y, -x\} + \{z, h'(z)\} \\ &= \{y, x\} - \{y, x\} + \{z, z\}h''(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

对于生成元的其余排列, 可以类似证明结果都为零。这样, 我们便完成了证明。

2.2. 光滑性的刻画

令 R 如上所述, 本节我们将通过多项式 $h(z)$ 对 R 的光滑性予以刻画, 给出 R 是光滑代数的充分必要条件。注意到 R 是 3 元多项式代数 $\mathbb{k}[x, y, z]$ 模掉主理想 $(yx - h(z))$ 所得的商代数。从几何上来看, R 对应于仿射空间 $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^3$ 中的曲面 $S = \{(x, y, z) : yx - h(z) = 0\}$, 因此 $\dim R = 2$ 。

另一方面, 记 $f(x, y, z) = yx - h(z)$, 则 Jacobi 矩阵

$$J = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (y, x, -h'(z))。$$

假设存在点 $(x_0, y_0, z_0) \in S$ 使得 $\text{rank}(J) < 1 = 3 - \dim R$, 那么 J 在该点处是零矩阵, 即有

$$y_0 = x_0 = -h'(z_0) = 0。$$

又因为 $y_0 x_0 - h(z_0) = 0$, 不难得出 $h(z_0) = h'(z_0) = 0$, 这意味着 $h(z)$ 有重根。换言之, 当 $h(z)$ 没有重根时, $\text{rank}(J) = 3 - \dim R$ 在各点处均成立, 那么 R 是光滑代数。

反过来, 当 $h(z)$ 有重根时, 取一个重根 z_0 , 则在点 $(0, 0, z_0) \in S$ 处, $\text{rank}(J) < 3 - \dim R$, 所以 R 不是光滑代数。

综上, 我们将其总结成

定理 2.3 泊松代数 $R = \mathbb{k}[x, y, z]/(yx - h(z))$ 是光滑代数的充分必要条件是多项式 $h(z)$ 没有重根。

2.3. 典范丛的平凡性

设 R 是满足定理 2.3 条件的光滑泊松代数, 我们来计算其典范丛。

易知

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = ydx + xdy - h'(z)dz,$$

因此 $\Omega_R^1 = (Rdx \oplus Rdy \oplus Rdz)/R(ydx + xdy - h'(z)dz)$ 。于是

$$\begin{aligned} \Omega_R^2 &= \Omega_R^1 \wedge dx + \Omega_R^1 \wedge dy + \Omega_R^1 \wedge dz \\ &= \frac{Rdx \wedge dy \oplus Rdx \wedge dz \oplus Rdy \wedge dz}{R(xdy - h'(z)dz) \wedge dx + R(ydx - h'(z)dz) \wedge dy + R(ydx + xdy) \wedge dz} \\ &= \frac{Rdx \wedge dy \oplus Rdx \wedge dz \oplus Rdy \wedge dz}{R(xdx \wedge dy - h'(z)dx \wedge dz) + R(ydx \wedge dy + h'(z)dy \wedge dz) + R(ydx \wedge dz + xdy \wedge dz)} \end{aligned} \quad (5)$$

定理 2.4 光滑泊松代数 $R = \mathbb{k}[x, y, z]/(yx - h(z))$ 具有平凡的典范丛。

证明 注意到 $h(z)$ 与 $h'(z)$ 互素, 于是存在多项式 $u(z)$ 和 $v(z)$ 使得

$$u(z)yx + v(z)h'(z) = u(z)h(z) + v(z)h'(z) = 1。$$

利用自然同态 $\mathbb{k}[z] \rightarrow \mathbb{k}[x, y, z] \rightarrow R$ 以及 $yx = h(z)$, 上式可以推出等式

$$u(z)yx + v(z)h'(z) = 1$$

在 R 中成立。由公式(5)可知, 在 Ω_R^2 中, 等式

$$xdx \wedge dy = h'(z)dx \wedge dz, \quad ydx \wedge dy = -h'(z)dy \wedge dz, \quad ydx \wedge dz = -xdy \wedge dz$$

成立。所以

$$\begin{aligned}
dx \wedge dy &= (u(z)yx + v(z)h'(z))dx \wedge dy \\
&= u(z)yx dx \wedge dy + v(z)h'(z)dx \wedge dy \\
&= u(z)yh'(z)dx \wedge dz + v(z)h'(z)dx \wedge dy \\
&= h'(z)(v(z)dx \wedge dy + u(z)ydx \wedge dz) \\
dx \wedge dz &= (u(z)yx + v(z)h'(z))dx \wedge dz \\
&= u(z)yx dx \wedge dz + v(z)h'(z)dx \wedge dz \\
&= u(z)yx dx \wedge dz + v(z)xdx \wedge dy \\
&= x(v(z)dx \wedge dy + u(z)ydx \wedge dz) \\
dy \wedge dz &= (u(z)y\Lambda x + v(z)h'(z))dy \wedge dz \\
&= u(z)yxdy \wedge dz + v(z)h'(z)dy \wedge dz \\
&= -u(z)y^2 dx \wedge dz - v(z)ydx \wedge dy \\
&= -y(v(z)dx \wedge dy + u(z)ydx \wedge dz)
\end{aligned}$$

记 $\eta = v(z)dx \wedge dy + u(z)ydx \wedge dz$, 由上面 3 个表达式可以定义 R -模同态 $s: \Omega_R^2 \rightarrow R\eta$, 其中

$$s(dx \wedge dy) = h'(z)\eta, \quad s(dx \wedge dz) = x\eta, \quad s(dy \wedge dz) = -y\eta.$$

这是一个同构, 其逆映射 $s^{-1}: R\eta \rightarrow \Omega_R^2$ 由 $s^{-1}(\eta) = v(z)dx \wedge dy + u(z)ydx \wedge dz$ 给出。这意味着典范丛 Ω_R^2 是以 η 为基的秩 1 自由模。综上, 我们完成了证明。

注 2.5 一般而言, 典范丛 Ω_R^2 的基并不唯一, 上述证明过程中所定义的 η 只是其中一个。如何确定所有的基是笔者后续工作将要考虑的问题。

注 2.6 泊松代数 R 与相应的广义外尔代数 A 有很多对应的性质。如多项式 $h(z)$ 没有重根既是 R 为光滑代数的充要条件, 又是 A 为同调光滑代数的充要条件(同调光滑是光滑的同调版本), 也就是说, R 是光滑代数对应于 A 是同调光滑代数; 同样, R 具有平凡的典范丛对应于 A 是 Calabi-Yau 代数[5]。

3. 讨论与展望

本文所采用的方法亦可应用于量子型广义外尔代数, 此时构造出的泊松代数作为交换代数依然是 R , 但是泊松括号不再是公式(4), 其具体表达式有待进一步确定; 而光滑性仅依赖于交换代数结构, 与泊松括号无关, 这说明定理 2.4 对于这类泊松代数依然成立。

另一个问题是比较 R 上的泊松结构和 3 元多项式代数 $\mathbb{k}[x, y, z]$ 的泊松结构。后者有一种常见的构造方法——势函数法, 即取一个 3 元多项式 $\Phi = \Phi(x, y, z)$, 定义

$$\{x, y\} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \{y, z\} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \{z, x\} = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

这就给出了 $\mathbb{k}[x, y, z]$ 的一个泊松结构[6]。有趣的是, 若取 $\Phi = h(z) - xy$, 则由公式(4)可知 R 作为泊松代数是 $\mathbb{k}[x, y, z]$ 的商代数。至于量子型广义外尔代数所导出的泊松结构, 是否对应于某个多项式 Φ 则是一个未知问题, 笔者拟将其作为后续工作开展。

参考文献

- [1] Crainic, M., Fernandes, R.L. and Mărcuț, I. (2021) Lectures on Poisson geometry. American Mathematical Society.
- [2] 李克正. 交换代数与同调代数(第 2 版) [M]. 北京: 科学出版社, 2017.

-
- [3] Luo, J., Wang, S.-Q. and Wu, Q.-S. (2024) Poincaré Duality for Smooth Poisson Algebras and BV Structure on Poisson Cohomology. *Journal of Algebra*, **649**, 169-211. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2024.03.011>
 - [4] Bavula, V. (1996) Tensor Homological Minimal Algebras, Global Dimension of the Tensor Product of Algebras and of Generalized Weyl algebras. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **120**, 293-335.
 - [5] Liu, L. (2015) Homological Smoothness and Deformations of Generalized Weyl Algebras. *Israel Journal of Mathematics*, **209**, 949-992. <https://doi.org/10.1007/s11856-015-1242-0>
 - [6] Mukunda, N. and Sudarshan, E.C.G. (1976) Relation between Nambu and Hamiltonian Mechanics. *Physical Review D*, **13**, 2846-2850. <https://doi.org/10.1103/physrevd.13.2846>