

梯度Ricci-Bourguignon孤立子的分裂定理

李成德, 刘建成*

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年9月7日; 录用日期: 2026年10月6日; 发布日期: 2026年10月19日

摘要

本文研究了完备梯度Ricci-Bourguignon孤立子的分裂性问题, 证明了该孤立子的万有覆盖等距于 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{N}^{n-k}$ 。同时, 在数量曲率为常数且截面曲率满足有界性条件的假设下, 证明了该孤立子的Ricci曲率核分布是平行的且具有整体常数秩。

关键词

梯度Ricci-Bourguignon孤立子, 分裂定理, Ricci曲率核分布, 加权Laplacian

Splitting Theorem for Gradient Ricci-Bourguignon Solitons

Chengde Li, Jiancheng Liu*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: September 7, 2026; accepted: October 6, 2026; published: October 19, 2026

Abstract

This paper investigates the splitting theorem of complete gradient Ricci-Bourguignon solitons. It is shown that the universal cover of such a soliton is isometric to $\mathbb{R}^k \times \mathbb{N}^{n-k}$. Moreover, under the assumptions that the scalar curvature is constant and the sectional curvature satisfies a bounded condition, it is proved that the Ricci curvature kernel distribution of the soliton is parallel and has globally constant rank.

*通讯作者。

Keywords

Gradient Ricci-Bourguignon Soliton, Splitting Theorem, Ricci Curvature Kernel Distribution, Weighted Laplacian

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

J. P. Bourguignon ([1])在黎曼流形 (M^n, g) 上研究了 Ricci-Bourguignon 流, 其演化方程如下

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2(\text{Ric} - \rho Rg), \quad (1)$$

其中 Ric 是 Ricci 张量, R 是数量曲率, ρ 是常数. 特别地, 当 $\rho = 0$ 时, (1)即为经典的 Ricci 流([2]);

当 $\rho = \frac{1}{2}$ 时即为 Einstein 流; 当 $\rho \leq 0$ 时, (1)是 Ricci 流和 Yamabe 流之间的“插值”([3]-[5]).

Catino ([6])系统发展了 Ricci-Bourguignon 流的抛物理理论, 证明了当 $\rho < \frac{1}{2(n-1)}$ 时解的短时间存在性.

Dwivedi ([7])引入了 Ricci-Bourguignon 流的自相似解——Ricci-Bourguignon 孤立子, 即一个赋予了向量场 X 的黎曼流形 (M^n, g) , 满足方程

$$R_{ij} + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \lambda g_{ij} + \rho Rg_{ij}, \quad (2)$$

其中 $\mathcal{L}_X g$ 表示度量 g 关于向量场 X 的李导数, $\lambda \in \mathbb{R}$ 为常数. 若向量场 X 可以表示为一个光滑函数 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的梯度, 则 (M^n, g) 称为梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子(也称梯度 ρ -Einstein 孤立子), 此时孤立子方程变为

$$\text{Ric} + \nabla^2 f = \rho Rg + \lambda g. \quad (3)$$

当 ∇f 为平行向量场时, 称该孤立子为平凡孤立子. 当 $\lambda = 0$ (或 > 0 , 或 < 0)时分别称该孤立子为稳定(收缩, 膨胀)孤立子. 特别地, 一个梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子被称为

- (i) 梯度 Einstein 孤立子, 如果 $\rho = \frac{1}{2}$;
- (ii) 梯度 Ricci 孤立子, 如果 $\rho = 0$;
- (iii) 梯度 Schouten 孤立子, 如果 $\rho = \frac{1}{2(n-1)}$;
- (iv) 无迹 Ricci 孤立子, 如果 $\rho = \frac{1}{n}$.

Dwivedi ([7])在紧致梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子上建立了关于 Hessian 和 Ricci 张量偏差的积分恒等式, 为紧致情形下的刚性分析提供了基础工具. Pigola 等([8])在梯度 Ricci 孤立子中利用随机分析工具(加权拉普拉斯 Δ_f 的 L^p -Liouville 性质, 弱极值原理, 抛物性等), 将刚性结果中所需的点态曲率条件弱化为全局积分条件, 在非紧情形下证明了梯度 Ricci 孤立子的平凡性. Cunha 等([9])进一步将 Pigola 等的分析方法从梯度 Ricci 孤立子推广到更一般的 Ricci-Bourguignon 孤立子. 通过控制加权 Ricci 张量

$\text{Ric}_f = \text{Ric} + \text{Hess}(f)$ 或 Schouten 张量的有界性, 证明了加权拉普拉斯 Δ_f 的弱极值原理在 Ricci-Bourguignon 孤立子上成立, 进而得到了相应的数量曲率估计和平行性结果。Ou 等([10])从曲率控制的角度, 引入张量间的曲率控制条件: 存在常数 $A > 0$, 使得对任意单位正交向量 $u \perp v$ 有 $|R(u, v, u, v)| \leq A \cdot \text{Ric}(u, u)$, 证明了收缩梯度 Ricci 孤立子的刚性结果。

尽管上述方法在各自框架下取得重要进展, 但其在梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子框架下的有效性与具体表现形式仍未达成充分探究。基于此, 本文在完备黎曼流形上研究梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子的分裂定理。受 Ou 等([10])的启发, 引入如下曲率控制条件

(I) 数量曲率 R 为常数;

(II) 存在常数 $A > 0$, 使得对任意单位正交向量 $u \perp v$, $|R(u, v, u, v)| \leq A \cdot \text{Ric}(u, u)$ 。在此条件下, 得到了 Ricci 算子的秩在流形上为常数的结论(命题 1), 并进一步证明了其核分布是平行的(命题 2)。利用 De Rham 分裂定理, 得到了完备梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子的万有覆盖等距于 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{N}^{n-k}$, 其中 $\mathbb{N}$ 是具有正 Ricci 曲率的梯度孤立子(定理 3)。

与已有工作相比, 这些结果将 Catino (参见[12])依赖于势函数在每个正则等值集上梯度长度恒定和截面曲率的非负性弱化为不依赖截面曲率非负, 直接获得了 Ricci 曲率秩的全局恒定性及核分布的平行性。并将 Ghosh (参见[11])等人在 Ricci-Bourguignon 近孤立子上紧致且整体积分的方法推广到完备非紧情形, 且在数量曲率为常数的前提下, 得到了更一般的结构分裂定理。

下面详细阐述假设下面详细阐述假设(I)和(II)的几何意义、来源与合理性。

假设(I)要求数量曲率 R 为常数。在梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子 $\text{Ric} + \nabla^2 f = \rho Rg + \lambda g$ 下, 由公式 $(1 - 2(n-1)\rho)\nabla R = 2\text{Ric}(\nabla f, \cdot)$, 可知当 R 为常数时, 有 $\text{Ric}(\nabla f) = 0$, 即势函数的梯度在 Ricci 曲率核中。这一性质在分裂理论中具有明确的几何意义: 它使得 Ricci 算子的核分布与势函数梯度方向相容, 从而为核分布的平行性论证提供了关键结构。从来源上看, 假设(I)是对经典分裂定理中“数量曲率为常数”这一常见条件的自然推广。在梯度 Ricci 孤立子(即 $\rho = 0$)情形, 若 R 为常数, 则 $\text{Ric}(\nabla f) = 0$, 这与 Petersen-Wylie、Wylie 等人在梯度 Ricci 孤立子分裂理论中所使用的条件一致。在 Ricci-Bourguignon 孤立子中, 由于方程多出 ρRg 项, 数量曲率常数的假设更显必要, 能避免 ∇R 与 $\text{Ric}(\nabla f) = 0$ 之间的复杂耦合。

假设(II)这一条件最早由 Ou 等[10]在研究收缩梯度 Ricci 孤立子的刚性时引入。其核心思想是: 用 Ricci 曲率控制截面曲率的大小, 从而在没有截面曲率非负性假设的情况下, 仍能获得曲率张量的某种“正性”或“有界性”。

在经典分裂定理中, 通常需要截面曲率非负(或 Ricci 曲率非负)来保证核分布的平行性。例如, Cheeger-Gromoll 分裂定理要求 Ricci 曲率非负; 而 Catino [12]在梯度 Ricci 孤立子分裂中, 曾依赖势函数在正则等值集上梯度长度恒定以及截面曲率非负。假设(II)的引入, 正是为了弱化这些较强的曲率假设: 它不要求截面曲率非负, 只要求截面曲率被 Ricci 曲率控制。由于在梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子中, Ricci 曲率在核分布的正交补上往往具有正定性, 条件(II)可推出核分布上 Ricci 曲率的非负性, 进而保证 $\text{Ric} \geq 0$ 在适当子空间上成立。

因此, 假设(II)与假设(I)结合, 使得本文能够在完备非紧情形下, 不依赖截面曲率非负, 直接证明 Ricci 曲率核分布的平行性与整体常数秩。

2. 预备知识和引理

设 (M^n, g) 是 n 维黎曼流形, ∇ 是 Levi-Civita 联络, Ric 是 Ricci 曲率张量。对于任意一点 $p \in M$, 定义线性映射 $\text{Ric}^\# : T_p M \rightarrow T_p^* M$ 使得

$$\text{Ric}^\#(v)(w) = \text{Ric}(v, w), \quad \forall v, w \in T_p M,$$

则称 Ricci 算子在点 p 处的秩是该线性映射的秩, 即

$$\text{rank}(\text{Ric}) = \dim \text{Im}(\text{Ric}^\#).$$

等价地, 若记 $K_p = \ker \text{Ric}^\#$, 则

$$\text{rank}(\text{Ric}) = n - \dim K_p.$$

(i) 若 $\text{rank}(\text{Ric}) < n$, 则称 Ric 在点 p 处是退化的;

(ii) 若对任意一点 $p \in M$, $\text{rank}(\text{Ric})$ 为同一常数, 则称 Ric 具有常数秩。

设 (M^n, g, f, λ) 是梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子(以下简称 R-B 孤立子), 本文采用局部标准正交标架场 $\{e_i\}$, 并记 $\nabla_i \nabla_j f = f_{ij}$, $\nabla_i f = f_i$ 。主要结果的证明需要如下几个引理。

引理 1 ([12]) 设 (M^n, g, f, λ) 是梯度 R-B 孤立子, 记加权 Laplace $\Delta_f T = \Delta T - \nabla_{\nabla f} T$, 其中 T 为 $(0,2)$ 型张量。则有

$$(1 - 2(n-1)\rho R)\nabla_i R = 2R_{il}\nabla_l f, \quad (4)$$

$$(1 - n\rho)R + \Delta f = n\lambda, \quad (5)$$

$$(1 - 2(n-1)\rho)\nabla R = 2\text{Ric}(\nabla f, \cdot), \quad (6)$$

$$(1 - 2(n-1)\rho)\Delta_f R = 2(\rho R^2 - |\text{Ric}|^2 + \lambda R). \quad (7)$$

引理 2 对梯度 R-B 孤立子 (M^n, g, f, λ) , 有

$$\Delta f_{ij} = \nabla_i \nabla_j \Delta f + R_{ik} f_{kj} + R_{jk} f_{ki} - 2R_{ijkl} f_{kl} + (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_k R_{ij}) f_k. \quad (8)$$

证明 通过对 Weitzenböck 公式两边同时求协变导数, 得到

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_k \nabla_k f_j &= \nabla_i (\Delta f_j) \\ &= \nabla_i (\nabla_j \Delta f) + \nabla_i (R_{jk} f_k) \\ &= \nabla_i \nabla_j \Delta f + \nabla_i R_{jk} f_k + R_{jk} f_{ik}, \end{aligned}$$

代入到下式

$$\begin{aligned} \Delta f_{ij} &= \nabla_k \nabla_k \nabla_i f_j \\ &= \nabla_k (\nabla_i \nabla_k f_j + R_{kijl} f_l) \\ &= \nabla_i \nabla_k \nabla_k f_j + R_{ik} f_{kj} + R_{kijl} f_{kl} + \nabla_k R_{kijl} f_l + R_{kijl} f_{kl}, \end{aligned}$$

则有

$$\Delta f_{ij} = \nabla_i \nabla_j \Delta f + R_{ik} f_{kj} + R_{jk} f_{ik} + 2R_{kijl} f_{kl} + \nabla_i R_{jk} f_k + \nabla_k R_{kijl} f_l \quad (9)$$

将第二 Bianchi 恒等式 $\nabla_k R_{kijl} = \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij}$ 代入(9)式即完成引理 2 的证明。□

引理 3 设 (M^n, g, f, λ) 是梯度 R-B 孤立子, 则有

$$\Delta_f R_{ij} = 2(\rho R + \lambda) R_{ij} - 2R_{ikjl} R_{kl} + \rho(n-2) \nabla_i \nabla_j R + \rho \Delta R \delta_{ij}. \quad (10)$$

证明 对梯度 R-B 孤立子方程左右两边同时作用加权 Laplacian 算子, 有

$$\Delta_f R_{ij} = \rho \Delta_f R \delta_{ij} - \Delta_f f_{ij}.$$

由(5)和(3)式可得

$$\nabla_i \nabla_j \Delta f = (n\rho - 1) \nabla_i \nabla_j R, \quad (11)$$

$$f_{ij} = (\rho R + \lambda) \delta_{ij} - R_{ij}. \quad (12)$$

将(11)和(12)式代入(8)式得

$$\begin{aligned} \Delta f_{ij} &= (n\rho - 1) \nabla_i \nabla_j R + R_{ik} (\rho R + \lambda) \delta_{kj} - R_{ik} R_{jk} + R_{jk} (\rho R + \lambda) \delta_{ki} - R_{jk} R_{ki} \\ &\quad - 2R_{ikl} (\rho R + \lambda) \delta_{kl} + 2R_{ikl} R_{kl} + (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_k R_{ij}) f_k \\ &= (n\rho - 1) \nabla_i \nabla_j R - 2R_{ik} R_{jk} + 2R_{ikl} R_{kl} + (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_k R_{ij}) f_k. \end{aligned}$$

对(3)式求协变导数再与 f_k 沿 k 指标缩并得

$$\nabla_{\nabla f} f_{ij} = \rho \nabla_{\nabla f} R \delta_{ij} - \nabla_{\nabla f} R_{ij},$$

结合加权 Laplacian 算子的定义, 得到

$$\begin{aligned} \Delta_f R_{ij} &= \rho \Delta_f R \delta_{ij} - (n\rho - 1) \nabla_i \nabla_j R + 2R_{ik} R_{jk} - 2R_{ikl} R_{kl} \\ &\quad - (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_k R_{ij}) f_k + \rho \nabla_{\nabla f} R \delta_{ij} - \nabla_{\nabla f} R_{ij} \\ &= \rho \Delta_f R \delta_{ij} - (n\rho - 1) \nabla_i \nabla_j R + 2R_{ik} R_{jk} - 2R_{ikl} R_{kl} - (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik}) f_k. \end{aligned} \quad (13)$$

对(6)式求协变导数并交换 i, j 指标得

$$\begin{aligned} (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik}) f_k &= (1 - 2(n-1)\rho) \nabla_i \nabla_j R - (R_{ik} f_{kj} + R_{jk} f_{ki}) \\ &= (1 - 2(n-1)\rho) \nabla_i \nabla_j R - 2(\rho R + \lambda) R_{ij} + 2R_{ik} R_{kj}, \end{aligned} \quad (14)$$

将(14)式代入(13)式即完成了(10)式的证明。□

3. 主要结果及证明

命题 1 设 (M^n, g, f, λ) 是完备的梯度 R-B 孤立子且满足条件(I), (II)。则当 $\rho > 0$ 时, Ricci 算子的秩在 M 上为常数。

证明 任取 $p \in M$, 设 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ 是 p 点处的 Ricci 特征值, 相应的单位正交特征向量为 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 。将 $\{e_i\}$ 沿测地线平行延拓到邻域 $B(p, \delta)$, 得到光滑正交标架场。对 $\forall k, 1 \leq k \leq n$, 定义障碍函数 $u: B(p, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$u(x) = \sum_{i=1}^k \text{Ric}(e_i(x), e_i(x)),$$

满足 $\text{Ric}(e_i(x), e_i(x)) \geq \lambda_i(x)$ 且 $\text{Ric}(e_i(p), e_i(p)) = \lambda_i(p)$ 。

假设 Ricci 曲率的最小特征值 $\lambda_1 < 0$, 取单位特征向量 e_1 满足 $\text{Ric}(e_1, e_1) = \lambda_1(p)$, 由条件(II), 对每个 $i \geq 2$ 可得

$$|R(e_1, e_i, e_i, e_i)| \leq A \cdot \text{Ric}(e_1, e_1) = A\lambda_1(p) < 0,$$

矛盾。因此 $\lambda_1(p) \geq 0$ 处处成立, 进而 $\lambda_i \geq 0$ 对所有 i 成立。于是在点 p 处有

$$\begin{aligned}
\Delta_f u(p) &= (\Delta_f \text{Ric})(e_1, e_1) \\
&= 2(\rho R + \lambda) \text{Ric}(e_1, e_1) - 2A \sum_{i,j=1}^n R(e_1, e_i, e_1, e_j) \text{Ric}(e_i, e_j) \\
&\leq 2(\rho R + \lambda) \lambda_1(p) + 2A \lambda_1(p) \sum_{i=1}^n \text{Ric}(e_i, e_i) \\
&= 2(\rho R + \lambda + AR) \lambda_1(p),
\end{aligned} \tag{15}$$

由于 $u \geq \lambda_1$ 且 $u(p) = \lambda_1(p)$, 有

$$\Delta_f \lambda_1(p) \leq 2(\rho R + \lambda + AR) \lambda_1(p), \quad \forall p \in M. \tag{16}$$

若存在点 $q \in M$ 使得 $\lambda_1(q) = 0$, 则 u 在点 q 取最小值 0 且 $\Delta_f \lambda_1(q) \geq 0$, 结合(16)式可得 $\Delta_f \lambda_1(q) = 0$, 由极大值原理得要么 $\lambda_1 \equiv 0$ 在 M 上恒成立, 要么 $\lambda_1 > 0$ 恒成立。

同理, 对 $S_k = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \geq 0$, $2 \leq k \leq n$, 有

$$\Delta_f S_k \leq 2(\rho R + \lambda + AR) S_k,$$

由极大值原理, 对每个 k , 要么 $S_k \equiv 0$ 在 M 上恒成立, 要么 $S_k > 0$ 处处成立。由于 $S_n = R > 0$, 令

$$r = \max\{k \mid S_k \equiv 0\}, \quad 0 \leq r \leq n-1,$$

则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-r} \equiv 0$, $\lambda_{n-r+1} > 0$ 处处成立。因此 Ricci 算子的秩恒为常秩 $n-r$ 。□

命题 2 设 (M^n, g, f, λ) 是完备的梯度 R-B 孤立子且满足条件(I), (II)。则当 $\rho > 0$ 时, Ricci 曲率的核 $\ker(\text{Ric})$ 构成平行子丛。

证明 由命题 1 可知, Ricci 算子的秩在 M 上全局为常数。因此, $\ker(\text{Ric})$ 是 TM 的光滑子丛。设光滑向量场 $V \in \ker(\text{Ric})$ 满足 $\text{Ric}(V, \cdot) = 0$, 特别地 $\text{Ric}(V, V) = 0$ 。取点 p 处局部正交标架 $\{e_i\}$, 由加权 Laplacian 展开公式(参见[10], 命题 3.3)有

$$\begin{aligned}
\Delta_f \text{Ric}(V, V) &= (\Delta_f \text{Ric})(V, V) + 4(\nabla_k \text{Ric})(\nabla_k V, V) \\
&\quad + 2\text{Ric}(\Delta_f V, V) + 2\text{Ric}(\nabla_k V, \nabla_k V).
\end{aligned} \tag{17}$$

由引理 3 及条件(I), 上式变为

$$\begin{aligned}
\Delta_f \text{Ric}(V, V) &= 2(\rho R + \lambda) \text{Ric}(V, V) - 2R(V, e_i, V, e_j) \text{Ric}(e_i, e_j) \\
&\quad + 4(\nabla_k \text{Ric})(\nabla_k V, V) + 2\text{Ric}(\Delta_f V, V) + 2\text{Ric}(\nabla_k V, \nabla_k V).
\end{aligned} \tag{18}$$

由条件(II)可得 $R(V, e_i, V, e_i) = 0$, 则有

$$R(V, e_i, V, e_j) = \frac{1}{2} \left(R(V, e_i + e_j, V, e_i + e_j) - R(V, e_i, V, e_i) - R(V, e_j, V, e_j) \right) = 0.$$

注意到 $\text{Ric}(V, \cdot) = 0$ 有

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(\Delta_f V, V) &= 0, \\
(\nabla_k \text{Ric})(V, \cdot) + \text{Ric}(\nabla_k V, \cdot) &= 0.
\end{aligned}$$

于是

$$(\nabla_k \text{Ric})(\nabla_k V, V) = -\text{Ric}(\nabla_k V, \nabla_k V) = 0,$$

进而, (18)式变为

$$\Delta_f \text{Ric}(V, V) = -2\text{Ric}(\nabla_k V, \nabla_k V). \quad (19)$$

结合 $\text{Ric}(V, V) = 0$ 可得

$$0 = \Delta_f \text{Ric}(V, V) = \text{Ric}(\nabla_k V, \nabla_k V).$$

由于 $\text{Ric} \geq 0$, 二次型 $\text{Ric}(\nabla_k V, \nabla_k V) = 0$ 当且仅当 $\text{Ric}(\nabla_k V, \cdot) = 0$, 即 $\nabla_k V \in \ker(\text{Ric})$ 。由 k 的任意性, $\nabla_X V \in \Gamma(\ker(\text{Ric}))$ 对任意切向量 X 成立。故光滑子丛 $\ker(\text{Ric})$ 是平行子丛。□

定理 3 设 (M^n, g, f, λ) 是满足条件(I), (II)且 $\rho > 0$ 的完备的梯度 R-B 孤立子, 则 M 的万有覆盖等距于 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{N}^{n-k}$, 其中 $\mathbb{N}$ 是具有正 Ricci 曲率的梯度 R-B 孤立子。

证明 由命题 1 可知 Ricci 算子的秩在 M 上为常数, 记为 r , 即存在整数 r ($0 \leq r \leq n$), 使得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-r}, \lambda_{n-r+1} > 0$ 处处成立, 其中 λ_i 为 Ricci 特征值。

若 $r = n$, 则 Ricci 算子正定, $\dim \ker(\text{Ric}) = 0$, 此时取 $k = 0$, $\mathbb{N} = M$, 则定理 3 成立。

若 $r < n$, 则 $\dim \ker(\text{Ric}) = n - r > 0$ 。由命题 2 可知 $\ker(\text{Ric})$ 是平行分布, 即对任意 $V \in \Gamma(\ker(\text{Ric}))$ 和任意切向量 X , 有 $\nabla_X V \in \Gamma(\ker(\text{Ric}))$ 。因此 $\ker(\text{Ric})$ 在平行移动下不变, 且其正交补 $\ker(\text{Ric})^\perp$ 也是平行的。由于 (M^n, g) 是完备的, 由 De Rham 分裂定理可知, (M^n, g) 的万有覆盖等距于 $\mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{N}^r$, 其中 $\mathbb{N}^r$ 是 r 维黎曼流形。记 $k = n - r$, 则 (M^n, g) 的万有覆盖等距于 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{N}^{n-k}$ 。

在乘积结构下, 取局部坐标 $(x^1, \cdots, x^k, y^1, \cdots, y^{n-k})$, 其中 $\{x^i\}_{i=1}^k$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的坐标, $\{y^j\}_{j=1}^{n-k}$ 是 $\mathbb{N}$ 的坐标, 则度量, Ricci 曲率和势函数可分解为 $g = g_{\mathbb{R}^k} + g_{\mathbb{N}}$, $\text{Ric} = \text{Ric}_{\mathbb{R}^k} + \text{Ric}_{\mathbb{N}}$, $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, 由于 $\mathbb{R}^k$ 切空间是 $\ker(\text{Ric})$ 满足 $\text{Ric}_{\mathbb{R}^k} = 0$, $\nabla_{\mathbb{R}^k}^2 f_1$ 在 $\mathbb{N}$ 的切方向上分量为零以及 $R = R_{\mathbb{N}}$ 代入孤立子方程可得 $\text{Ric}_{\mathbb{N}} + \nabla_{\mathbb{N}}^2 f_2 = \rho R_{\mathbb{N}} g_{\mathbb{N}} + \lambda g_{\mathbb{N}}$, 且在 $\mathbb{N}$ 的切空间 $\ker(\text{Ric})^\perp$ 上, 由命题 1 及条件(II)知 Ricci 曲率非负且在此子空间满秩, 故 $\text{Ric}_{\mathbb{N}} > 0$, 因此 $(\mathbb{N}, g_{\mathbb{N}}, f_2, \lambda)$ 是 Ricci 曲率正定的梯度 R-B 孤立子。□

4. 结论与讨论

本文研究了完备梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子的分裂性问题。在数量曲率为常数和截面曲率受 Ricci 曲率控制条件下, 证明了 Ricci 算子的秩在流形上为常数(命题 1), 其核分布是平行的(命题 2), 并利用 DeRham 分裂定理得到万有覆盖等距于 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{N}^{n-k}$, 其中 $\mathbb{N}$ 是具有正 Ricci 曲率的梯度 R-B 孤立子(定理 3)。

与经典分裂定理相比, 经典 Cheeger-Gromoll 分裂定理要求 Ricci 曲率非负且存在一条直线; 本文不直接假设直线, 而是通过 Ricci 核分布的平行性获得分裂结构, 并用假设(II)替代 Ricci 非负性。Catino [12] 在梯度 Ricci 孤立子分裂中依赖势函数在正则等值集上梯度长度恒定以及截面曲率非负; 本文将其弱化为假设(I)和(II), 不依赖截面曲率非负, 直接获得 Ricci 曲率秩的全局恒定性及核分布的平行性。Ghosh 等 [12] 在紧致且整体积分框架下讨论 Ricci-Bourguignon 近孤立子; 本文将其推广到完备非紧情形, 并在数量曲率为常数的前提下得到更一般的结构分裂定理。

未来可在以下方向进一步研究: 一是 $\rho < 0$ 的情形, 此时 Ricci-Bourguignon 流介于 Ricci 流与 Yamabe 流之间, 孤立子方程结构可能更复杂, 能否获得类似的核分布平行性与分裂定理值得探讨; 二是非恒定数量曲率的情形, 若放弃假设(I), 则(6)式中 ∇R 与 $\text{Ric}(\nabla f)$ 的耦合将带来新的困难, 可尝试用积分估计或弱极值原理处理; 三是更弱的曲率控制条件, 可探索用 Weyl 张量或 Ricci 张量的其他不变量替代截面曲率; 四是建立紧致与非紧的统一框架。

基金项目

国家自然科学基金项目(12161078), 甘肃省基础研究创新群体项目(24JRRA778)。

参考文献

- [1] Bourguignon, J.P. (1981) Ricci Curvature and Einstein Metrics. In: Ferus, D., Kühnel, W., Simon, U. and Wegner, B., Eds., *Global Differential Geometry and Global Analysis*, Springer, 42-63. <https://doi.org/10.1007/bfb0088841>
- [2] Catino, G., Cremaschi, L., Djadli, Z., Mantegazza, C. and Mazzieri, L. (2017) The Ricci-Bourguignon Flow. *Pacific Journal of Mathematics*, **287**, 337-370. <https://doi.org/10.2140/pjm.2017.287.337>
- [3] Brendle, S. (2005) Convergence of the Yamabe Flow for Arbitrary Initial Energy. *Journal of Differential Geometry*, **69**, 217-278. <https://doi.org/10.4310/jdg/1121449107>
- [4] Schwetlick, H. and Struwe, M. (2003) Convergence of the Yamabe Flow for Large Energies. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **2003**, 59-100. <https://doi.org/10.1515/crll.2003.078>
- [5] Ye, R. (1994) Global Existence and Convergence of Yamabe Flow. *Journal of Differential Geometry*, **39**, 35-50. <https://doi.org/10.4310/jdg/1214454674>
- [6] Catino, G. and Mazzieri, L. (2016) Gradient Einstein Solitons. *Nonlinear Analysis*, **132**, 66-94. <https://doi.org/10.1016/j.na.2015.10.021>
- [7] Dwivedi, S. (2021) Some Results on Ricci-Bourguignon Solitons and Almost Solitons. *Canadian Mathematical Bulletin*, **64**, 591-604. <https://doi.org/10.4153/s0008439520000673>
- [8] Pigola, S., Rimoldi, M. and Setti, A.G. (2011) Remarks on Non-Compact Gradient Ricci Solitons. *Mathematische Zeitschrift*, **268**, 777-790. <https://doi.org/10.1007/s00209-010-0695-4>
- [9] Cunha, A.W., Lemos, R. and Roing, F. (2023) On Ricci-Bourguignon Solitons: Triviality, Uniqueness and Scalar Curvature Estimates. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **526**, Article ID: 127333. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127333>
- [10] Ou, J.Y., Qu, Y.Y. and Wu, G.Q. (2025) Some Rigidity Results on Shrinking Gradient Ricci Soliton. *The Journal of Geometric Analysis*, **35**, Article No. 311. <https://doi.org/10.1007/s12220-025-02153-7>
- [11] Ghosh, A. (2022) Certain Triviality Results for Ricci-Bourguignon Almost Solitons. *Journal of Geometry and Physics*, **182**, Article ID: 104681. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2022.104681>
- [12] Catino, G., Mazzieri, L. and Mongodi, S. (2015) Rigidity of Gradient Einstein Shrinkers. *Communications in Contemporary Mathematics*, **17**, Article ID: 1550046. <https://doi.org/10.1142/s0219199715500467>

附录 A

引理 A.1 ([12]) 设 (M^n, g, f, λ) 是梯度 R-B 孤立子, 记加权 Laplace $\Delta_f T = \Delta T - \nabla_{\nabla f} T$, 其中 T 为 $(0,2)$ 型张量。则有

$$(1-2(n-1)\rho R)\nabla_i R = 2R_{il}\nabla_l f, \quad (1.1)$$

$$(1-n\rho)R + \Delta f = n\lambda, \quad (1.2)$$

$$(1-2(n-1)\rho)\nabla R = 2\text{Ric}(\nabla f, \cdot), \quad (1.3)$$

$$(1-2(n-1)\rho)\Delta_f R = 2(\rho R^2 - |\text{Ric}|^2 + \lambda R). \quad (1.4)$$

设 (M^n, g, f, λ) 是梯度 Ricci-Bourguignon 孤立子(以下简称 R-B 孤立子), 本文采用局部标准正交标架场 $\{e_i\}$, 并记 $\nabla_i \nabla_j f = f_{ij}$, $\nabla_i f = f_i$ 。

引理 A.2 对梯度 R-B 孤立子 (M^n, g, f, λ) , 有

$$\Delta f_{ij} = \nabla_i \nabla_j \Delta f + R_{ik} f_{kj} + R_{jk} f_{ki} - 2R_{ijkl} f_{kl} + (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_k R_{ij}) f_k \quad (1.5)$$

证明 由 Laplace 算子定义可得

$$\Delta f_{ij} = \nabla_k \nabla_k \nabla_i \nabla_j f = \nabla_k \nabla_k \nabla_i f_j,$$

其中,

$$\nabla_k \nabla_i f_j = \nabla_i \nabla_k f_j + R_{kijl} f_l,$$

得到

$$\begin{aligned} \Delta f_{ij} &= \nabla_k \nabla_i \nabla_k f_j + \nabla_k (R_{kijl} f_l) \\ &= \nabla_i \nabla_k \nabla_k f_j + R_{ik} f_{kj} + R_{kijl} f_{kl} + \nabla_k (R_{kijl} f_j) \\ &= \nabla_i \nabla_k \nabla_k f_j + R_{ik} f_{kj} + R_{kijl} f_{kl} + \nabla_k R_{kijl} f_j + R_{kijl} f_{kl}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

由 Ricci 恒等式, 可得

$$\Delta f_j = \nabla_j \Delta f + R_{jk} f_k, \quad (1.7)$$

对(1.7)求协变导数, 可得

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_k \nabla_k f_j &= \nabla_i (\Delta f_j) \\ &= \nabla_i (\nabla_j \Delta f) + \nabla_i (R_{jk} f_k) \\ &= \nabla_i \nabla_j \Delta f + \nabla_i R_{jk} f_k + R_{jk} f_{ik}, \end{aligned}$$

将其代入(1.6)中可得

$$\begin{aligned} \Delta f_{ij} &= \nabla_i \nabla_j \Delta f + R_{ik} f_{kj} + R_{jk} f_{ik} + 2R_{kijl} f_{kl} \\ &\quad + \nabla_i R_{jk} f_k + \nabla_k R_{kijl} f_l, \end{aligned} \quad (1.8)$$

根据缩并的第二 Bianchi 恒等式

$$\nabla_k R_{kijl} = \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij}$$

可得

$$(\nabla_k R_{kijl}) f_l = (\nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij}) f_l,$$

将其代入到(1.8)式可得

$$\begin{aligned}\Delta f_{ij} &= \nabla_i \nabla_j \Delta f + R_{ik} f_{kj} + R_{jk} f_{ki} - 2R_{ikjl} f_{kl} \\ &\quad + (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_k R_{ij}) f_k.\end{aligned}$$

证明完毕。 $\square$

引理 A.3 设 (M^n, g, f, λ) 是梯度 R-B 孤立子, 则有

$$\Delta_f R_{ij} = 2(\rho R + \lambda) R_{ij} - 2R_{ikjl} R_{kl} + \rho(n-2) \nabla_i \nabla_j R + \rho \Delta R \delta_{ij} \quad (1.9)$$

证明 对梯度 R-B 孤立子方程两边同时作用加权 Laplacian 算子, 有

$$\Delta_f R_{ij} = \rho \Delta_f R \delta_{ij} - \Delta_f f_{ij}.$$

由引理 2 可得

$$\begin{aligned}\Delta f_{ij} &= \nabla_i \nabla_j \Delta f + R_{ik} f_{kj} + R_{jk} f_{ki} - 2R_{ikjl} f_{kl} \\ &\quad + (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_k R_{ij}) f_k.\end{aligned} \quad (1.10)$$

对(1.2)连续求两次协变导数, 可得

$$\nabla_i \nabla_j \Delta f = (n\rho - 1) \nabla_i \nabla_j R. \quad (1.11)$$

梯度 R-B 孤立子方程在局部正交标架场下可表示为

$$f_{ij} = (\rho R + \lambda) \delta_{ij} - R_{ij}. \quad (1.12)$$

将(1.11)和(1.12)式代入(1.10)式得

$$\begin{aligned}\Delta f_{ij} &= (n\rho - 1) \nabla_i \nabla_j R + R_{ik} (\rho R + \lambda) \delta_{kj} - R_{ik} R_{jk} + R_{jk} (\rho R + \lambda) \delta_{ki} - R_{jk} R_{ki} \\ &\quad - 2R_{ikjl} (\rho R + \lambda) \delta_{kl} + 2R_{ikjl} R_{kl} + (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_k R_{ij}) f_k \\ &= (n\rho - 1) \nabla_i \nabla_j R - 2R_{ik} R_{jk} + 2R_{ikjl} R_{kl} + (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_k R_{ij}) f_k.\end{aligned}$$

对梯度 R-B 孤立子方程求协变导数再与 f_k 沿 k 指标缩并得

$$\nabla_{\nabla f} f_{ij} = \rho \nabla_{\nabla f} R \delta_{ij} - \nabla_{\nabla f} R_{ij},$$

结合加权 Laplacian 算子的定义, 得到

$$\begin{aligned}\Delta_f R_{ij} &= \rho \Delta_f R \delta_{ij} - (n\rho - 1) \nabla_i \nabla_j R + 2R_{ik} R_{jk} - 2R_{ikjl} R_{kl} \\ &\quad - (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_k R_{ij}) f_k + \rho \nabla_{\nabla f} R \delta_{ij} - \nabla_{\nabla f} R_{ij} \\ &= \rho \Delta_f R \delta_{ij} - (n\rho - 1) \nabla_i \nabla_j R + 2R_{ik} R_{jk} - 2R_{ikjl} R_{kl} - (\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik}) f_k\end{aligned} \quad (1.13)$$

对(1.3)式求协变导数

$$(1 - 2(n-1)\rho) \nabla_i \nabla_j R = 2\nabla_i R_{jk} + 2R_{jk} f_{ki},$$

交换 i, j 指标得

$$(1 - 2(n-1)\rho) \nabla_i \nabla_j R = 2\nabla_j R_{ik} + 2R_{ik} f_{kj},$$

两式相加可得

$$\begin{aligned}(\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ik}) f_k &= (1 - 2(n-1)\rho) \nabla_i \nabla_j R - (R_{ik} f_{kj} + R_{jk} f_{ki}) \\ &= (1 - 2(n-1)\rho) \nabla_i \nabla_j R - 2(\rho R + \lambda) R_{ij} + 2R_{ik} R_{kj}\end{aligned} \quad (1.14)$$

将(1.14)式代入(1.13)式可得

$$\begin{aligned}\Delta_f R_{ij} &= \rho \Delta_f R \delta_{ij} - (n\rho - 1) \nabla_i \nabla_j R + 2R_{ik} R_{jk} - 2R_{ikjl} R_{kl} \\ &\quad - (1 - 2(n-1)\rho) \nabla_i \nabla_j R + 2(\rho R + \lambda) R_{ij} \\ &= 2(\rho R + \lambda) R_{ij} - 2R_{ikjl} R_{kl} + \rho(n-2) \nabla_i \nabla_j R + \rho \Delta R \delta_{ij}\end{aligned}$$

即完成了(1.9)式的证明。

□