

n 阶复线性微分方程的无穷 φ -级解

罗 洋*, 肖丽鹏

江西师范大学数学与统计学院, 江西 南昌

收稿日期: 2026年9月7日; 录用日期: 2026年10月10日; 发布日期: 2026年10月22日

摘 要

本文主要研究以下 n 阶复线性微分方程 $f^{(n)} + A_{n-1}(z)f^{(n-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z)$, 其中系数 $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, F(z)$ 均为整函数且 $A_0(z) \not\equiv 0$ 。基于 φ -级增长度量给出系数需要满足的判定条件, 证明该方程所有非常数整函数解均具有无穷 φ -级, 并建立了解的超 φ -级与方程主导系数 φ -级之间的关系, 推广了二阶复线性微分方程的已有相关结果。

关键词

φ -级, 超 φ -级, 整函数, 零点超 φ -收敛指数, n 阶复线性微分方程

Infinite φ -Order Solutions of n -Order Complex Linear Differential Equations

Yang Luo*, Lipeng Xiao

School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi

Received: September 7, 2026; accepted: October 10, 2026; published: October 22, 2026

Abstract

This paper mainly studies the following n -order complex linear differential equation $f^{(n)} + A_{n-1}(z)f^{(n-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z)$, where the coefficients $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, F(z)$ are all entire functions and $A_0(z) \not\equiv 0$. We find some appropriate conditions on the $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, F(z)$ in terms of the φ -order growth metric which guarantee that every non-constant entire solution f of the equation have infinite φ -order, along with an additional relationship between the hyper φ -order of f and the φ -order of dominating coefficient in the equation, this generalizes the already relevant results of the second order complex linear differential equation.

*通讯作者。

Keywords

φ -Order, Hyper φ -Order, Entire Function, Hyper- φ -Exponent of Convergence the Zero Sequence, n -Order Complex Linear Differential Equation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设整数 $n \geq 2$, 本文重点研究 n 阶线性微分方程

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z)f^{(n-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z) \quad (1.1)$$

及其对应的齐次线性微分方程

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z)f^{(n-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0 \quad (1.2)$$

其中 $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{n-1}(z), F(z)$ 均为复平面上的整函数, 且约定 $A_0(z) \neq 0$. 根据复微分方程基本理论, 当方程(1.1)的所有系数均为整函数时, 齐次方程(1.2)的解必然是整函数. 近几十年来, 众多学者结合 Navanlinn 值分布理论, 围绕复线性微分方程解的增长性、零点振荡性质开展了大量研究工作. 为刻画函数的增长快慢, 经典增长级、超级是最常用的度量工具, 但这类工具在处理零级整函数时存在明显局限, 难以精细区分慢增长整函数之间的增长差异. 为克服这一缺陷, 文献[1]引入了 φ -级的概念, 该度量通过选取合适的控制函数 $\varphi(r)$, 将对数级与经典增长级纳入统一分析框架.

定义 1.1 [1] 设函数 $\varphi(r): [R_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 为非减连续函数, 且满足

$$\log r \leq \varphi(r) \leq r, \quad r \geq R_0. \quad (1.3)$$

若 f 为复平面上的亚纯函数, 定义

$$\rho_{\varphi}(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log \varphi(r)}$$

为 f 的 φ -级, 其中 $T(r, f)$ 为 f 的 Nevanlinna 特征函数.

定义 1.2 [2] 设函数 $\varphi(r)$ 对任意 $a, b \geq R_0$, 有 $\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$, 其中 R_0 是存在某个比较大的正数, 则称 $\varphi(r)$ 满足次可加性.

定义 1.3 [3] 设集合 $S \subset [0, \infty)$, 且满足

$$\overline{\text{dens}} S = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(S \cap [0, r])}{r} > 0,$$

其中 $\text{mes}(S \cap [0, r])$ 是集合 $(S \cap [0, r])$ 的 Lebesgue 测度, 则称 S 为正上线性密度的集合.

若无特殊说明, 下文均假定 $\varphi(r)$ 满足定义 1.1 的条件. 亚纯函数的 φ -级实现了对数级与经典增长级的统一推广: 取 $\varphi(r) = \log r$ 可得对数级 $\rho_{\log}(f)$, 取 $\varphi(r) = r$ 则退化为经典增长级 $\rho(f)$. 进一步, 对整函数 f , 若 $\varphi(r)$ 满足次可加性, 则可将 Nevanlinna 特征函数 $T(r, f)$ 替换为 $\log M(r, f)$ [4], 此时

$$\rho_{\varphi}(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log \varphi(r)}$$

经典级无法区分零级整函数, 对数级仅适用于慢增长函数, 二者相互割裂。引入上述 φ -级度量之后, 借助不同 $\varphi(r)$, 既可以统一包含经典级与对数级, 又能精细刻画零级系数间的增长强弱以判定方程主导项, 还可以进一步建立超 φ -级、不同零点的超 φ -收敛指数等整套概念, 从而将解的增长速度、零点振荡特征与系数增长置于同一分析框架。比如可以用 $\varphi(r) = (\log r)^\alpha, \alpha \in [1, 2]$ 来精细区分慢增长零级函数; 还可以取 $\varphi(r) = e^{(\log r)^\beta}, \beta \in (0, 1]$ 用来区分介于对数增长与多项式增长之间的函数。

对于二阶复线性微分方程

$$f'' + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z) \quad (1.4)$$

和

$$f'' + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0, \quad (1.5)$$

Gundersen、Chen Zong-Xuan 和 Yang Chung-Chun 在文献[5]和文献[6]中得到一系列关于解增长性与零点分布的经典结论。

定理 A [5] 设 A_1, A_0 为整函数, 满足 $\rho(A_1) < \rho(A_0)$ (或 A_1 为多项式、 A_0 为超越整函数), 则二阶齐次方程(1.5)的任意非零解 f 均满足 $\rho(f) = \infty$ 。

定理 B [6] 设二阶齐次方程(1.5)的系数 A_1, A_0 满足 $\rho(A_1) < \rho(A_0) < \infty$ 且 $\rho(A_0) > 0$ 。若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $C > 0$, 使得在具有正上线性密度的集合 $S \subset [0, \infty)$ 上有

$$|A_1(z)| \leq \exp\{o(1)|z|^{\rho(A_0)-\varepsilon}\}, \quad |A_0(z)| \geq \exp\{(1+o(1))C|z|^{\rho(A_0)-\varepsilon}\}, \quad |z| = r \in S, \quad r \geq R_0,$$

则二阶齐次方程(1.5)的任意非零整函数解 f 满足 $\rho(f) = \infty$ 且 $\rho_2(f) = \rho(A_0)$ 。

针对复平面亚纯函数 f , 定义“超 φ -级”和不同零点的“超 φ -收敛指数”[1]分别为:

$$\rho_{2,\varphi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log \varphi(r)}, \quad \bar{\lambda}_{2,\varphi}(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log \bar{N}(r, 1/f)}{\log \varphi(r)}$$

其中 $\bar{N}(r, 1/f)$ 表示 f 的不同零点的计数函数。分别取 $\varphi(r) = \log r$ 与 $\varphi(r) = r$ 上述定义便还原为函数 f 的超对数级、超级、不同零点的超对数收敛指数和不同零点的超收敛指数。

定理 C [6] 设集合 S 、整函数 A_1, A_0 满足定理 B 的条件, $F \neq 0$ 为有限级整函数, 则非齐次方程(1.4)的所有整函数解 f 满足 $\bar{\lambda}_{2,\varphi}(f) = \rho_2(f) = \rho(A_0)$, 至多存在一个例外解 f_0 使得 $\rho_2(f_0) < \rho(A_0)$ 。

定理 D [6] 设整函数 $A_1, A_0 \neq 0$ 满足 $\rho(A_0) < \rho(A_1) < 1/2$ (或 A_1 为零级超越整函数、 A_0 为多项式), 则二阶齐次方程(1.5)的任意非零整函数解 f 满足 $\rho(f) = \infty$ 且 $\rho_2(f) = \rho(A_1)$ 。

定理 E [6] 设 A_1, A_0 满足定理 D 的条件, $F \neq 0$ 为整函数。

(a) 若 $\rho(F) < \rho(A_1)$ (或 A_1 为零级超越整函数时 F, A_0 均为多项式), 则非齐次方程(1.4)的所有非常数整函数解 f 满足 $\bar{\lambda}_{2,\varphi}(f) = \rho_2(f) = \rho(A_1)$;

(b) 若 $\rho(A_1) < \rho(F) < \infty$, 则非齐次方程(1.4)的所有整函数解 f 满足 $\bar{\lambda}_{2,\varphi}(f) = \rho_2(f) = \rho(A_1)$, 至多存在一个例外解 f_0 使得 $\rho_2(f_0) < \rho(A_1)$ 。

将上述二阶情形的结果推广到 φ -级框架下, 得到如下结论。

定理 F [1] 设 $\varphi(r)$ 为满足(1.3)的非减连续次可加函数, 整函数 A_1, A_0 满足 $\rho(A_1) < \rho(A_0) < \infty$ 且 $\rho_\varphi(A_0) > 0$ 。若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在仅与 ε 有关的正常数 $C = C(\varepsilon)$, 使得在具有正上线性密度的集合 $S \subset [0, \infty)$ 上有

$$|A_1(z)| \leq \exp\{o(1)\varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)-\varepsilon}\}, \quad |z| = r \in S, \quad r \geq R_0,$$

$$|A_0(z)| \geq \exp\left\{(1+o(1))C\varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)-\varepsilon}\right\}, \quad |z|=r \in S, r \geq R_0,$$

则齐次方程(1.5)的任意非零整函数解 f 满足 $\rho_\varphi(f) = \infty$ 且 $\rho_{2,\varphi}(f) = \rho_\varphi(A_0)$ 。

定理 G [1] 设 $\varphi(r), A_1, A_0, S$ 满足定理 F 的条件, $F \neq 0$ 为有限 φ -级整函数, 则非齐次方程(1.4)的所有整函数解 f 满足 $\bar{\lambda}_{2,\varphi}(f) = \rho_2(f) = \rho(A_0)$, 至多存在一个例外解 f_0 使得 $\rho_{2,\varphi}(f_0) < \rho_\varphi(A_0)$ 。

上述经典结论均针对二阶线性微分方程。本文将推广至 n 阶线性微分方程, 并利用 φ -级建立对应的增长性判定定理。

定理 1 设 $\varphi(r)$ 为满足(1.3)的非减连续次可加函数, 整函数 $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ 满足

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} \{\rho_\varphi(A_k)\} \leq \rho_\varphi(A_0) < \infty, \quad \rho_\varphi(A_0) > 0.$$

若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在仅与 ε 有关的正常数 $C = C(\varepsilon)$, 使得在具有正上线性密度的集合 $S \subset [0, \infty)$ 上有

$$|A_k(z)| \leq \exp\left\{o(1)\varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)-\varepsilon}\right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad |z|=r \in S, r \geq R_0, \quad (1.6)$$

$$|A_0(z)| \geq \exp\left\{(1+o(1))C\varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)-\varepsilon}\right\}, \quad |z|=r \in S, r \geq R_0, \quad (1.7)$$

则 n 阶齐次方程(1.2)的任意非零整函数解 f 满足 $\rho_\varphi(f) = \infty, \rho_{2,\varphi}(f) = \rho_\varphi(A_0)$ 。

定理 2 设 $\varphi(r), A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, S$ 满足定理 1 的条件, $F \neq 0$ 为有限 φ -级整函数, 则非齐次方程(1.1)的所有整函数解 f 满足 $\bar{\lambda}_{2,\varphi}(f) = \rho_2(f) = \rho(A_0)$, 至多存在一个例外解 f_0 使得 $\rho_{2,\varphi}(f_0) < \rho_\varphi(A_0)$ 。

2. 预备引理

本节给出证明主要定理所需的预备结论。文中记号 $g(r) \lesssim h(r)$ 表示: 存在常数 $C \geq 1$, 当 $r \geq R_0$ 时恒有 $g(r) \leq Ch(r)$ 。

设整函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 定义“最大项”与“中心指标”分别为:

$$\mu(r, f) := \max_{n \geq 0} \{|a_n| r^n\}, \quad \nu(r, f) := \max \{m | \mu(r, f) = |a_m| r^m\}.$$

引理 2.1 [7] 设 f 为超越整函数, $0 < \delta < 1/4$ 。若 $|z| = r$ 且 $f(z) > M(r, f)\nu(r, f)^{-1/4+\delta}$, 则存在对数测度有限的集合 $E \subset (1, +\infty)$, 当 $r \notin E$ 时, 对任意整数 $k \geq 0$, 有

$$f^{(k)}(z) = \left(\frac{\nu(r, f)}{z}\right)^k (1+o(1))f(z).$$

引理 2.2 [1] 设 $\varphi(r)$ 为满足(1.3)的次可加非减连续函数, f 为非常数整函数, 则

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log \log \mu(r, f)}{\log \varphi(r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log \nu(r, f)}{\log \varphi(r)} = \rho_{2,\varphi}(f).$$

引理 2.3 [8] 设 $0 < R < \infty$, $\alpha > 1$, f 为复平面亚纯函数, 整数满足 $k > j \geq 0$ 且 $f^{(j)} \neq 0$ 。则存在线性测度有限的集合 $E \subset [0, \infty)$, 当 $|z| = r \in (0, R) \setminus E$ 时, 有

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \lesssim \left\{ \frac{R}{R-r} \left(1 + \log^+ R + \log^+ \frac{1}{R-r} + T(R, f) \right) \right\}^{(1+\alpha)(k-j)}.$$

特别地, 当 $k=1, j=0$ 时, 上式中对数项可省略。

引理 2.4 设 $f(z)$ 为非常数整函数, 则 $\log r \lesssim T(r, f)$ 。

证明: 情形一: 若 $f(z)$ 为多项式, 则 $T(r, f) = O(\log r)$, 满足 $\log r \lesssim T(r, f)$; 情形二: 若 $f(z)$ 为超越整函数, 则

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty.$$

即对于任意 $M > 0$, 有 $T(r, f) > M \log r$, 因此满足 $\log r \lesssim T(r, f)$ 。

3. 定理的证明

3.1. 定理 1 的证明

由 $\rho_\varphi(A_0) > 0$ 可知 $A_0(z)$ 为非常数整函数, 根据引理 2.4 和 φ -级的定义得

$$\log r \lesssim T(r, A_0) \leq \varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)+\varepsilon}, \quad r \geq R_0. \quad (3.1)$$

设 $f \neq 0$ 为 n 阶齐次方程(1.2)的整函数解, 变形得

$$|A_0(z)| \leq \left| \frac{f^{(n)}}{f} \right| + \sum_{k=1}^{n-1} |A_k(z)| \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right|. \quad (3.2)$$

由于 $A_0(z) \neq 0$, 所以 f 为非常数整函数, 故根据引理 2.4 得 $\log r \lesssim T(r, f)$ 。取 $\alpha = 2$, $R = 2r$, 结合引理 2.3, 当 $r \notin E_1$ 时, 其中 $E_1 \subset [0, \infty)$ 是线性测度有限的集合, 对 $1 \leq k \leq n-1$ 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(k)}}{f} \right| &\lesssim \left\{ \frac{2r}{2r-r} \left(1 + \log^+(2r) + \log^+ \frac{1}{2r-r} + T(2r, f) \right) \right\}^{3k} \\ &= \left\{ 2 \left(1 + \log^+(2r) + \log^+ \frac{1}{r} + T(2r, f) \right) \right\}^{3k} \\ &\lesssim (\log r + T(2r, f))^{3k} \lesssim (T(2r, f))^{3k} \lesssim (T(2r, f))^{3n}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

将(3.3)代入(3.2)可得

$$|A_0(z)| \lesssim \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} |A_k(z)| \right) (T(2r, f))^{3n}, \quad r \notin E_1. \quad (3.4)$$

结合条件(1.6), 在正上密度集 $S \setminus E_1$ 上, 得

$$\begin{aligned} |A_0(z)| &\lesssim \left\{ 1 + (n-1) \exp \left\{ o(1) \varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)-\varepsilon} \right\} \right\} (T(2r, f))^{3n} \\ &\lesssim \exp \left\{ o(1) \varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)-\varepsilon} \right\} (T(2r, f))^{3n}, \quad |z| = r \in S \setminus E_1. \end{aligned}$$

再根据(1.7), 对于任意 $\varepsilon > 0$, 当 $|z| = r \in S \setminus E_1$, 得

$$\exp \left\{ (1 + o(1)) C \varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)-\varepsilon} \right\} \leq |A_0(z)| \lesssim \exp \left\{ o(1) \varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)-\varepsilon} \right\} (T(2r, f))^{3n}.$$

上式两边取对数, 即

$$(1 + o(1)) C \varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)-\varepsilon} \lesssim o(1) \varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)-\varepsilon} + 3n \log(T(2r, f)).$$

对上式进行整理, 得

$$\varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)-\varepsilon} \lesssim \log(T(2r, f)), \quad |z| = r \in S \setminus E_1.$$

因为 $S \subset [0, \infty)$ 是上线性密度为正的集合, E_1 为线性测度有限集, 所以 $S \setminus E_1$ 是上线性密度为正的集合。由 $\varphi(r)$ 次可加性 ($\varphi(2r) \leq 2\varphi(r)$) 与 φ -级的定义, 推得

$$\begin{aligned} \rho_{\varphi}(A_0) - \varepsilon &\leq \overline{\lim}_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in S \setminus E_1}} \frac{\log \log T(2r, f)}{\log \varphi(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \log T(2r, f)}{\log \varphi(2r)} \frac{\log \varphi(2r)}{\log \varphi(r)} \right) \\ &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(2r, f)}{\log \varphi(2r)} \cdot \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(2\varphi(r))}{\log \varphi(r)} = \rho_{2, \varphi}(f). \end{aligned}$$

因为 $\varepsilon > 0$, $\rho_{\varphi}(A_0) > 0$, 有 $0 < \rho_{\varphi}(A_0) \leq \rho_{2, \varphi}(f)$, 因此 $\rho_{\varphi}(f) = \infty$ 。故 f 是方程(1.2)的超越整函数解。

另一方面, 由 $\rho_{\varphi}(A_k) \leq \rho_{\varphi}(A_0)$, 故 $\forall \varepsilon > 0$, 当 r 充分大时, 有

$$\max \{M(r, A_k), M(r, A_0)\} \leq \exp \left\{ \varphi(r)^{\rho_{\varphi}(A_0) + \varepsilon} \right\}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

对方程(1.2)两边同除 f , 得

$$\frac{f^{(n)}}{f} + A_{n-1}(z) \frac{f^{(n-1)}}{f} + \cdots + A_1(z) \frac{f'}{f} + A_0(z) = 0,$$

再应用引理 2.1: 当 $|z| = r \notin E_2$ 时(其中 $E_2 \subset [0, \infty)$ 是对数测度有限的集合), 有

$$\left(\frac{v(r, f)}{z} \right)^n (1 + o(1)) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(z) \left(\frac{v(r, f)}{z} \right)^k (1 + o(1)) + A_0(z) = 0.$$

移项, 得

$$\left(\frac{v(r, f)}{z} \right)^n (1 + o(1)) = - \sum_{k=1}^{n-1} A_k(z) \left(\frac{v(r, f)}{z} \right)^k (1 + o(1)) - A_0(z). \quad (3.5)$$

(3.5)两边取模, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{v(r, f)}{r} \right)^n &\leq \left| \left(\frac{v(r, f)}{z} \right)^n (1 + o(1)) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |A_k(z)| \left| \left(\frac{v(r, f)}{r} \right)^k (1 + o(1)) \right| + |A_0(z)| \\ &\leq \left[(n-1) \left(\frac{v(r, f)^{n-1}}{r} \right) + 1 \right] \exp \left\{ \varphi(r)^{\rho_{\varphi}(A_0) + \varepsilon} \right\}. \end{aligned}$$

对上式进行整理, 得

$$\begin{aligned} (v(r, f))^n &\leq 2r^n \left[(n-1) \left(\frac{v(r, f)^{n-1}}{r} \right) + 1 \right] \exp \left\{ \varphi(r)^{\rho_{\varphi}(A_0) + \varepsilon} \right\} \\ &\leq \left[2(n-1)r^{n-1} (v(r, f))^{n-1} + 2r^n \right] \exp \left\{ \varphi(r)^{\rho_{\varphi}(A_0) + \varepsilon} \right\} \\ &\lesssim \left[r^{n-1} (v(r, f))^{n-1} + r^n \right] \exp \left\{ \varphi(r)^{\rho_{\varphi}(A_0) + \varepsilon} \right\} \\ &\lesssim r^n (v(r, f))^{n-1} \exp \left\{ \varphi(r)^{\rho_{\varphi}(A_0) + \varepsilon} \right\}, \quad r \notin E_2. \end{aligned}$$

因此,

$$v(r, f) \lesssim r^n \cdot \exp\{\varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)+\varepsilon}\}, \quad r \notin E_2.$$

两边取对数, 再根据引理 2.4, 得

$$\log v(r, f) \lesssim n \log r + \varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)+\varepsilon} \lesssim \varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)+\varepsilon}, \quad r \notin E_2.$$

再根据去例外集引理[7]和引理 2.2, 有

$$\rho_{2,\varphi}(f) \leq \rho_\varphi(A_0) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 有 $\rho_{2,\varphi}(f) \leq \rho_\varphi(A_0)$, 故

$$\rho_{2,\varphi}(f) = \rho_\varphi(A_0).$$

综上, 定理 1 得证。

3.2. 定理 2 的证明

设非零整函数 f 是方程(1.1)的解, 易知 f 为非常数整函数解。若 z_0 为 f 的 k ($k \geq n+1$) 重零点, 由方程(1.1)得, z_0 为 F 的零点, 故

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = N_n\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_{(n+1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq n\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right), \quad (3.6)$$

其中 $N_n\left(r, \frac{1}{f}\right)$ 表示 f 在圆盘 $|z| \leq r$ 内零点的重数不超过 n 的计数函数, $N_{(n+1)}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ 表示 f 在圆盘 $|z| \leq r$ 内零点的重数不少于 $n+1$ 的计数函数。

根据 $F \neq 0$, 由方程(1.1)可得

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} \left(\frac{f^{(n)}}{f} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \frac{f^{(k)}}{f} + A_0 \right).$$

两边取均值函数, 根据对数导数引理, 进而推出

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} m(r, A_k) + O(\log T(r, f) + \log r), \quad r \notin E_3. \quad (3.7)$$

其中 $E_3 \subset [0, \infty)$ 是线性测度有限的集合, 由条件 $\rho_\varphi(A_0) > 0$ 可得到(3.1)。结合(3.1)、(3.6)、(3.7), 条件 $\rho_\varphi(A_k) \leq \rho_\varphi(A_0)$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) 以及 Nevanlinna 第一基本定理, 当 $|z|=r \notin E_3$ 时, 有

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) = m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) \\ &\leq n\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} m(r, A_k) + O(\log T(r, f) + \log r) \\ &\lesssim n\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r, F) + \sum_{k=0}^{n-1} T(r, A_k) + O(\log T(r, f) + \log r) \\ &\lesssim \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \varphi(r)^{\rho_\varphi(F)+\varepsilon} + \varphi(r)^{\rho_\varphi(A_0)+\varepsilon} + \frac{1}{2}T(r, f). \end{aligned}$$

由去例外集引理[7], 可推得

$$T(r, f) \lesssim \bar{N}\left(2r, \frac{1}{f}\right) + \varphi(2r)^{\rho_{\varphi}(F)+\varepsilon} + \varphi(2r)^{\rho_{\varphi}(A_0)+\varepsilon}.$$

由于 $\varphi(r)$ 的次可加性和 ε 的任意性, 根据超 φ -级和不同零点的超 φ -收敛指数的定义, 由上式得到 $\rho_{2,\varphi}(f) \leq \bar{\lambda}_{2,\varphi}(f)$ 。再结合

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r, f) + O(1),$$

即 $\bar{\lambda}_{2,\varphi}(f) \leq \rho_{2,\varphi}(f)$, 最终得到 $\rho_{2,\varphi}(f) = \bar{\lambda}_{2,\varphi}(f)$ 。

接下来设 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 为方程(1.2)的 n 个线性无关解。根据定理 1 可知, $f_1, f_2, \dots, f_n$ 均为超越整函数, 满足

$$\rho_{2,\varphi}(f_j) = \rho_{\varphi}(A_0), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

已知非常数整函数 f 是方程(1.1)的解, 根据常数变易法 (先求对应齐次微分方程的通解, 再把通解里的常数替换成未知函数, 代回原非齐次方程求出这个函数, 从而得到非齐次方程的通解) 得

$$f = D_1 f_1 + D_2 f_2 + \dots + D_n f_n, \quad (3.9)$$

其中 $D_1, D_2, \dots, D_n$ 为整函数, 且

$$D'_m(z) = \frac{W_m(z)}{W(z)} F(z), \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

$$W(z) = W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \dots & f'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$W_m(z)$ 是将 $W(z)$ ($W(z) \neq 0$) 第 m 列替换为 $(0, 0, \dots, F)^T$ 得到的行列式。将(3.9)结合文献[9]第 35 页结论和引理 2.4, 可得当 $|z| = r \notin E_4$ 时, 有

$$\begin{aligned} T(r, f) &\lesssim \sum_{j=1}^n (T(r, f_j) + T(r, D_j)) \\ &\lesssim \sum_{j=1}^n (T(r, f_j) + T(2r, D'_j)) + \log r \\ &\lesssim \sum_{j=1}^n \left(T(2r, f_j) + \sum_{k=1}^{n-1} T(2r, f_j^{(k)}) \right) + T(2r, F) \\ &\lesssim \sum_{j=1}^n \left(T(2r, f_j) + O(\log T(2r, f_j) + \log(2r)) \right) + T(2r, F) \\ &\lesssim \sum_{j=1}^n T(2r, f_j) + T(2r, F), \end{aligned}$$

其中 $E_4 \subset [0, \infty)$ 是线性测度有限的集合。联立(3.8)、 $\rho_{\varphi}(F) < \infty$ 、 $\varphi(r)$ 的次可加性与去例外集引理[7], 可得 $\rho_{2,\varphi}(f) \leq \rho_{\varphi}(A_0)$ 。

最后证明方程(1.1)至多存在一个例外解 f_0 使得 $\rho_{2,\varphi}(f_0) < \rho_{\varphi}(A_0)$ 。采用反证法: 假设存在 f_{11}, f_{12} 为方程(1.1)的两个线性无关解, 满足 $\rho_{2,\varphi}(f_{1i}) < \rho_{\varphi}(A_0)$ ($i=1, 2$)。由定理 1 可知 $f_{11} - f_{12}$ 是方程(1.2)的非零

解, 且

$$\rho_{\varphi}(A_0) = \rho_{2,\varphi}(f_{11} - f_{12}) \leq \max\{\rho_{2,\varphi}(f_{11}), \rho_{2,\varphi}(f_{12})\} < \rho_{\varphi}(A_0).$$

这是一个矛盾。至此定理 2 证明完毕。

4. 结论与讨论

本文针对 n 阶线性微分方程在 φ -级理论框架下得到定理 1 与定理 2, 将二阶线性微分方程的结果推广到高阶, 其中要求 $\varphi(r)$ 满足(1.3)主要为叙述方便, 更好地将对数级与经典增长级统一起来, 保证方程系数的 φ -级可以取有限正值。定理 1 研究齐次方程解的增长性质。在 $\varphi(r)$ 满足次可加性, 系数 $A_0(z)$ 处于主导地位且 $\rho_{\varphi}(A_0) > 0$ 的前提下, 若存在具有正上线性密度的集合 S , 使得系数在 $|z| = r \in S$ 上满足指定的指数型模估计, 则齐次方程的任意非零整函数解 f 均具有无穷 φ -级, 且 $\rho_{2,\varphi}(f) = \rho_{\varphi}(A_0)$ 。定理 2 进一步将上述齐次结论拓展到非齐次情形, 在定理 1 的系数条件基础上, 假设非齐次项 $F(z)$ 为有限 φ -级整函数, 则非齐次方程的所有整函数解 f 满足 $\bar{\lambda}_{2,\varphi}(f) = \rho_2(f) = \rho(A_0)$, 至多存在一个例外解 f_0 使得 $\rho_{2,\varphi}(f_0) < \rho_{\varphi}(A_0)$ 。从适用范围来看, 定理 1 与定理 2 仅要求系数模的估计在正上密度集合上成立, 在一定程度上放宽了约束。

后续可进一步思考的方向:

1. 减弱 $\varphi(r)$ 次可加性的限制, 研究次可加条件失效时方程解的 φ -级;
2. 当 $A_0(z)$ 不处于主导地位, 尝试去掉 $\rho_{\varphi}(A_0) > 0$ 的约束, 研究此时方程解的 φ -级;
3. 本文的两个定理均建立在系数与解均为整函数的前提之下, 可尝试将整函数推广到亚纯函数, 放宽条件, 得到更一般的结论。

参考文献

- [1] Yu, H. and Li, X. (2025) On the Infinite φ -Order Solutions of Second Order Linear Differential Equations. *Computational Methods and Function Theory*, **25**, 645-662. <https://doi.org/10.1007/s40315-024-00548-1>
- [2] Heittokangas, J., Wang, J., Wen, Z.T. and Yu, H. (2021) Meromorphic Functions of Finite φ -Order and Linear q -Difference Equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, **27**, 1280-1309. <https://doi.org/10.1080/10236198.2021.1982919>
- [3] Zheng, J.H. (2010) Value Distribution of Meromorphic Functions. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-12909-4>
- [4] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon.
- [5] Gundersen, G.G. (1988) Finite Order Solutions of Second Order Linear Differential Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **305**, 415-429. <https://doi.org/10.2307/2001061>
- [6] Chen, Z.X. and Yang, C.C. (1999) Some Further Results on the Zeros and Growths of Entire Solutions of Second Order Linear Differential Equations. *Kodai Mathematical Journal*, **22**, 273-285. <https://doi.org/10.2996/kmj/1138044047>
- [7] Laine, I. (1993) Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. Walter de Gruyter. <https://doi.org/10.1515/9783110863147>
- [8] Heittokangas, J., Yu, H. and Zemirni, M.A. (2021) On the Number of Linearly Independent Admissible Solutions to Linear Differential and Linear Difference Equations. *Canadian Journal of Mathematics*, **73**, 1556-1591. <https://doi.org/10.4153/s0008414x20000607>
- [9] Yi, H.X. and Yang, C.C. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Kluwer. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-3626-8>