

18pq阶7度对称图的分类

王 琴*, 凌 波

云南民族大学数学与计算机科学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2026年9月11日; 录用日期: 2026年10月14日; 发布日期: 2026年10月28日

摘 要

若一个图的自同构群在其弧集合上作用传递, 则称该图为对称图。郭等人于2018年、2020年完成了阶为 $18p$ 与 $36pq$ 的全部七度对称图的分类。本文推广上述结果, 对满足素数条件 $q > p \geq 3$ 的阶为 $18pq$ 的所有七度对称图进行分类。作为推论, 得到两个具体图, 记为 C_{990}^1 与 C_{990}^2 , 以及三个具体的自同构群, 即 $\text{PSL}(2, 503)$ 、 $\text{PSL}(2, 757)$ 和 $\text{PGL}(2, 757)$ 。

关键词

自同构群, 对称图, 正规商

Classification of Heptavalent Symmetry Graphs of Order $18pq$

Qin Wang*, Bo Ling

School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: September 11, 2026; accepted: October 14, 2026; published: October 28, 2026

Abstract

A graph is symmetric if its automorphism group acts transitively on its arc set. Recently, Guo et al. (2018, 2020) completed the classification of all heptavalent symmetric graphs of order $18p$ and $36pq$. We generalize these results here by classifying all heptavalent symmetric graphs of order $18pq$ for primes p, q with $q > p \geq 3$. Consequently, two concrete graphs, denoted C_{990}^1 and C_{990}^2 , and three concrete automorphism groups, namely $\text{PSL}(2, 503)$, $\text{PSL}(2, 757)$ and $\text{PGL}(2, 757)$, are obtained.

*通讯作者。

文章引用: 王琴, 凌波. 18pq阶7度对称图的分类[J]. 理论数学, 2026, 16(10): 157-167.
DOI: 10.12677/pm.2026.1610221

Keywords

Automorphism Group, Symmetric Graph, Normal Quotient

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文所讨论的图均为有限、简单、连通无向图。对于图 Γ , 分别记 $V\Gamma$ 、 $E\Gamma$ 、 $A\Gamma$ 和 $\text{Aut}\Gamma$ 为它的顶点集、边集、弧集和全自同构群。设 $G \leq \text{Aut}\Gamma$, 若 G 在 $V\Gamma$ 上作用传递, 则称 Γ 是 G -顶点传递的; 相应地, 若 G 在 $A\Gamma$ 上作用传递, 则称 Γ 是 G -弧传递的。当 $G = \text{Aut}\Gamma$ 时, 直接称 Γ 为顶点传递图或弧传递图, 其中弧传递图也称为对称图。一个重要刻画为: Γ 是对称图当且仅当 G 在 $V\Gamma$ 上作用传递, 且对任意 $\alpha \in V\Gamma$, 点稳定子群 G_α 在 α 的邻域 $\Gamma(\alpha)$ 上作用传递。研究给定度数、阶数有限的对称图, 是代数图论中一个经典且活跃的研究方向。例如, Conder 与 Dobcsányi 在文献[1]完成了阶数不超过 768 的全部三度对称图的分类工作。在此研究背景下, 文献[2]-[4]给出了 $p, 2p$ 和 $3p$ 的对称图的分类结果。Praeger 等人在文献[5] [6]中解决了阶为 pq 的对称图的分类问题。此外文献[7]-[9]完成了阶为 $4p, 4p^2, 6p, 6p^2, 8p, 8p^2, 10p$ 或 $10p^2$ 的三度 s -传递图的分类。与此同时, 七度对称图的研究也取得了重要进展, 已有大量文献致力于这类图的分类问题。具体而言, 文献[10]-[14]分别完成了阶为 $8p, 12p, 16p, 24p$ 以及 $2pq$ 的七度对称图的分类。近期, 郭等人在文献[15] [16]中完成了全部阶为 $18p$ 和 $36p$ 的七度对称图的分类。

本文将推广上述结果, 对满足 $q > p \geq 3$ 的素数 p, q 分类所有阶为 $18pq$ 的七度对称图。

2. 预备结果

设 Γ 为一个图, $X \leq \text{Aut}(\Gamma)$ 是其顶点传递子群。设 $N \triangleleft X$ 为 X 的正规子群, 且 N 在 $V\Gamma$ 上作用是非传递的, 记 V_N 为 N 的轨道集合。正规商图 Γ_N 是以 V_N 为顶点集的图: 两个不同轨道 B, C 相邻当且仅当在 Γ 中存在一条边连接 B 中的某个顶点与 C 中的某个顶点。该约化方法源自文献[17], 对分析七度对称图尤为有用。

本文沿用文献[15]和[18]中的图记号, 对于 C_{870}^i 、 SG_{156}^i 、 CG_{156}^i 、 LG_{72}^i 与 UG_{72} , 下标代表图的顶点个数, 上标 i 用于标记相同顶点数下互不同构的图, 其余图的记号也同理。群扩张记号 $G = N.H$, 表示群 G 为 N 被 H 的扩张。记号 $N:H$ 表示 N 被 H 的可裂群扩张(半直积)。记号 $G \wr H$ 表示群 G 与群 H 的圈积。

引理 2.1 设 Γ 为素度数 $p > 2$ 的 X -弧传递图, 其中 X 是 $\text{Aut}\Gamma$ 的子群。若正规子群 $N \trianglelefteq X$ 在顶点集 $V\Gamma$ 上至少有三条轨道, 则下述结论成立。

(i) 子群 N 在 $V\Gamma$ 上半正则作用, 商群 X/N 可嵌入 $\text{Aut}\Gamma_N$, 且 Γ_N 是度数为 p 的 X/N -弧传递图。

(ii) 对于满足 $1 \leq s \leq 5$ 或 $s = 7$ 的整数 s , Γ 是 (X, s) -传递的当且仅当正规商图 Γ_N 是 $(X/N, s)$ -传递的。

利用文献[19]与[20]中的结果, 我们得到关于点稳定子的相关信息。

引理 2.2 设 Γ 是 7 度图, 对某个整数 $s \geq 1$ 以及子群 $G \leq \text{Aut}\Gamma$, Γ 是 (G, s) -传递图。取定顶点 $\alpha \in V\Gamma$, 则必有 $s \leq 3$, 并且下述情形之一成立, 其中 F_{14} 、 F_{21} 、 F_{42} 依次表示阶为 14、21、42 的 Frobenius 群。

(1) 如果 G_α 是可解的, 那么 $|G_\alpha| \mid 252$ 。此外, 二元组 (s, G_α) 位于下表 1 中。

Table 1. Solvable cases**表 1.** 可解情况

s	1	2	3
G_α	$Z_7, D_{14}, F_{21}, D_{28}, Z_3 \times F_{21}$	$F_{42}, Z_2 \times F_{42}, Z_3 \times F_{42}$	$Z_6 \times F_{42}$

(2) 如果 G_α 是不可解的, 那么 $|G_\alpha| \mid 2^{24} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ 。此外, 三元组 $(s, G_\alpha, |G_\alpha|)$ 位于下表 2 中。

Table 2. Unsolvable cases**表 2.** 不可解情况

s	2	3
G_α	$\text{PSL}(3, 2), \text{ASL}(3, 2),$ $\text{ASL}(3, 2) \times Z_2, A_7, S_7$	$\text{PSL}(3, 2) \times S_4, A_7 \times A_6, S_7 \times S_6, (A_7 \times A_6) : Z_2,$ $Z_2^6 : (\text{SL}(2, 2) \times \text{SL}(3, 2)), [2^{20}] : (\text{SL}(2, 2) \times \text{SL}(3, 2))$
$ G_\alpha $	$2^3 \cdot 3 \cdot 7, 2^6 \cdot 3 \cdot 7, 2^7 \cdot 3 \cdot 7,$ $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 7, 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7, 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7,$ $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7, 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7, 2^{24} \cdot 3^2 \cdot 7$

在后面的引理中, 我们将引用阶为 $18p$ 、 $2pq$ 与 $6pq$ 的七度对称图的分类结果, 其中 p, q 均为素数。

引理 2.3 ([16]) 设 Γ 是阶为 $18p$ 的 7 度对称图, 其中 $p=2$ 或 $p=5$ 。那么结果如表 3 所示,

Table 3. Heptavalent symmetric graphs of order $18p$ **表 3.** 阶为 $18p$ 的 7 度对称图

Γ	C_{36}	C_{90}
$\text{Aut}\Gamma$	$\text{PSL}(2, 8)$	$\mathbb{Z}_3 \rtimes S_7$
p	2	5

引理 2.4 ([14]) 设素数 p, q 满足 $q > p \geq 3$, Γ 是阶为 $2pq$ 的七度对称图, 则

- (i) $\Gamma \cong \mathcal{CD}_{2pq}^h$, 其中 h 是同余方程 $y^6 + y^5 + \cdots + y + 1 \equiv 0 \pmod{pq}$ 的解, 且 $p \mid q-1$ 。 $\text{Aut}\Gamma \cong D_{2pq} : \mathbb{Z}_7$;
- (ii) Γ 见下表 4。

Table 4. Heptavalent symmetric graphs of order $2pq$ **表 4.** 阶为 $2pq$ 的 7 度对称图

Γ	C_{78}^1	C_{78}^2	C_{310}	C_{30}
$\text{Aut}\Gamma$	$\text{PGL}(2, 13)$	$\text{PSL}(2, 13)$	$\text{PSL}(5, 2) \cdot \mathbb{Z}_2$	S_8
p	(3, 13)	(3, 13)	(5, 31)	(3, 5)

引理 2.5 ([18]) 设 Γ 是阶为 $6pq$ 的七度对称图, 其中 $q > p \geq 2$ 。则

- (i) $\text{Aut}\Gamma \cong \text{PSL}(2, q)$ 或者 $\text{PGL}(2, q)$, 这里 $q=167$ 。
- (ii) Γ 为表 5 中给出的图之一。

Table 5. Heptavalent symmetric graphs of order $6pq$
表 5. 阶为 $6pq$ 的 7 度对称图

Γ	$\text{Aut}\Gamma$	(p, q)
$\mathcal{C}_{36}$	$\text{PSL}(2, 8)$	$(2, 3)$
$\mathcal{SG}_{156}^i$	$\text{PSL}(2, 13) \times Z_2$	$(2, 13), i = 1, 3, 4, 5$
$\mathcal{SG}_{156}^2$	$\text{PGL}(2, 13) \times Z_2$	$(2, 13)$
$\mathcal{CG}_{156}^i$	$\text{PGL}(2, 13)$	$(2, 13), 1 \leq i \leq 4$
$CD_{6pq, h}$	$D_{6pq} : Z_7$	$(7 \mid p-1, 7 \mid q-1)$
$\mathcal{C}_{90}$	$Z_3.S_7$	$(3, 5)$
$\mathcal{C}_{330}$	$M_{22}.Z_2$	$(5, 11)$
$\mathcal{C}_{870}^1$	$\text{PGL}(2, 29)$	$(5, 29)$
$\mathcal{C}_{870}^i$	$\text{PSL}(2, 29)$	$(5, 29), 2 \leq i \leq 4$
$\mathcal{C}_{2838}^1$	$\text{PGL}(2, 43)$	$(11, 43)$
$\mathcal{C}_{2838}^i$	$\text{PSL}(2, 43)$	$(11, 43), 2 \leq i \leq 6$
$\mathcal{C}_{20418}^1$	$\text{PGL}(2, 83)$	$(41, 83)$
$\mathcal{C}_{20418}^i$	$\text{PSL}(2, 83)$	$(41, 83), 2 \leq i \leq 11$
$\mathcal{C}_{83166}$	$\text{PSL}(2, 167)$	$(83, 167)$

命题 2.6 设 T 为非交换单群, 满足 $63pq \mid |T|$ 且 $|T| \mid 2^{25} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot p \cdot q$, 其中 $q > p \geq 3$ 为素数. 则 T 如表 6 所列.

Table 6. Some possible simple groups T
表 6. 一些可能的单群 T

T	$ T $	(p, q)	T	$ T $	(p, q)
$\text{PSL}(2, 2^6)$	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	$(5, 13)$	$P\Omega^-(4, 8)$	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	$(5, 13)$
$\text{PSL}(2, 2^9)$	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 73$	$(19, 73)$	$P\Omega^-(4, 3^3)$	$2^3 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$	$(13, 73)$
$\text{PSL}(2, 3^6)$	$2^3 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$	$(13, 73)$	$P\Omega^-(8, 2)$	$2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$	$(5, 17)$
$\text{PSL}(2, 5^3)$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 31$	$(5, 31)$	$P\Omega^-(10, 2)$	$2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$	$(11, 17)$
$\text{PSL}(3, 2^3)$	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 73$	$(7, 73)$	M_{22}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$(5, 11)$
$\text{PSL}(3, 2^4)$	$2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$	$(13, 17)$	M_{23}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	$(11, 23)$
$\text{PSL}(4, 4)$	$2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17$	$(5, 17)$	M_{24}	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	$(11, 23)$
$\text{PSL}(5, 2)$	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$	$(5, 31)$	J_2	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$	$(3, 5)$
$\text{PSL}(6, 2)$	$2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 31$	$(7, 31)$	HS	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	$(5, 11)$

续表

$\text{PSU}(3, 2^3)$	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 19$	$(3, 19)$	McL	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	$(5, 11)$
$\text{PSp}(4, 2^3)$	$2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13$	$(7, 13)$	A_9	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$(3, 5)$
$\text{PSU}(6, 2)$	$2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$(5, 11)$	A_{10}	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$	$(3, 5)$
${}^3D_4(2)$	$2^{12} \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 13$	$(7, 13)$	A_{11}	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	$(5, 11)$
$G_2(4)$	$2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$	$(5, 13)$	A_{12}	$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	$(5, 11)$
$G_2(3)$	$2^6 \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 13$	$(7, 13)$	A_{13}	$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	$(11, 13)$
$P\Omega^+(6, 4)$	$2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17$	$(5, 17)$	$\text{PSL}(2, q)$	$\frac{q(q-1)(q+1)}{2}$	
$P\Omega^+(10, 2)$	$2^{20} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31$	$(17, 31)$			

3. 主要结果

定理 1 设 Γ 是一个阶为 $18pq$ 的 7 度对称图, 其中 $q > p \geq 3$ 是素数。那么 Γ 和 $\text{Aut}\Gamma$ 列在下表 7 中。

Table 7. Heptavalent symmetric graphs of order $18pq$

表 7. 阶为 $18pq$ 的 7 度对称图

Γ	$\text{Aut}\Gamma$	(p, q)	备注
$\mathcal{C}_{990}^1$	$\mathbb{Z}_3 \cdot M_{22}$	$(5, 11)$	只有一个图
$\mathcal{C}_{990}^2$	$(\mathbb{Z}_3 \cdot M_{22}) : \mathbb{Z}_2$	$(5, 11)$	只有一个图
	$\text{PSL}(2, 503)$	$(251, 503)$	至少 1 个图, 最多 4 个图
	$\text{PGL}(2, 757)$	$(379, 757)$	至少 1 个图, 最多 2 个图
	$\text{PSL}(2, 757)$	$(379, 757)$	至少 1 个图, 最多 375 个图

本节将完成定理 1 的证明。设 Γ 是阶为 $18pq$ 的七度对称图, 令 $A = \text{Aut}\Gamma$, 其中 p, q 为素数。当 $p = 2$ 时, 由文献[13]知 Γ 的阶为 $36q$, 即 Γ 为对称图当且仅当 $q = 2$, 此时 Γ 同构于 $\mathcal{L}\mathcal{G}_{72}^i$ ($i = 1, 2, 3$) 或 $\mathcal{U}\mathcal{G}_{72}$ 。因此, 下文仅需考虑 $q > p \geq 3$ 的情形。

引理 3.1 设 $X \leq A$ 是 A 的子群, 且 X 在 Γ 上弧传递。则对 X 的每一个不可解正规子群 N , N 在 $V\Gamma$ 上至多有多条轨道。进一步有

(1) 对任意 $\alpha \in V\Gamma$, 有 $7 \mid |N_\alpha^{\Gamma(\alpha)}|$ 。

(2) 有 $63 \mid |N|$ 。

证明: 对任意 $\alpha \in V\Gamma$, 由上述论述可知 $N_\alpha = 1$ 会导出矛盾, 因此 $N_\alpha \neq 1$ 。又由于 X 在 $V\Gamma$ 上传递, 故 $|N_\alpha^{\Gamma(\alpha)}| \neq 1$ 。因为 $N_\alpha^{\Gamma(\alpha)} \trianglelefteq X_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$ 且该群在 $\Gamma(\alpha)$ 上本原作用, 所以 $7 \mid |N_\alpha^{\Gamma(\alpha)}|$ 。由于 N 在 $V\Gamma$ 上至多有多条轨道, 可得 $9pq \mid |N : N_\alpha|$ 。结合结论(1)有 $7 \mid |N_\alpha|$, 于是 $63pq \mid |N|$, 这正是所要证的。

引理 3.2 若 A 没有可解的极小正规子群, 则 A 的每一个正规子群 N 均为非交换单群, 且 $A \leq \text{Aut}(N)$ 。

证明: 设 N 是 A 的一个不可解极小正规子群, 则存在非交换单群 T 使得 $N = T^d$ 。可推得 $d \leq 2$ 。当

$d=2$ 时, 有 $7^2 \mid |N|$, 这里 $|N| \mid 2^{25} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot p \cdot q$ 。于是 $p=7$ 或者 $q=7$ 。若 $p=7$, 则 $q>7$ 且 $q^2 \mid |T|^2$, 这与 $|N| \mid 2^{25} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot p \cdot q$ 矛盾。若 $q=7$, 由条件 $q>p \geq 3$ 得 $p=5$ 或 3 。当 $(p,q)=(3,7)$ 时, 可得 $|T| \mid 2^{13} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$; 当 $(p,q)=(5,7)$ 时, 可得 $|T| \mid 2^{13} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$, 因此 $|T| \mid 2^{13} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ 。注意到 $63pq \mid |N| = |T|^2$, 当 $(p,q)=(3,7)$ 时, 有 $2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \mid |T|^2$; 当 $(p,q)=(5,7)$ 时, 有 $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \mid |T|^2$, 于是 $3 \cdot 7 \mid |T|$ 。遍历满足 $3 \cdot 7 \mid |T| \mid 2^{13} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ 的非交换单群, 得到 T 与 N 如表 8 所示。

Table 8. Some possible simple groups T and corresponding N

表 8. 一些可能的单群 T 和对应的 N

T	$ T $	(p,q)	$N = T^2$
$\text{PSL}(2,7)$	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$	$(3,7)$	$\text{PSL}(2,7)^2$
$\text{PSL}(2,8)$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$	$(3,7)$	$\text{PSL}(2,8)^2$
$\text{PSU}(3,3)$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$	$(3,7)$	$\text{PSU}(3,3)^2$
$\text{PSL}(3,4)$	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$(3,7)$ 或 $(5,7)$	$\text{PSL}(3,4)^2$
$\text{PSp}(6,2)$	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$(3,7)$	$\text{PSp}(6,2)^2$
A_7	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$(3,7)$ 或 $(5,7)$	A_7^2
A_8	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$(3,7)$ 或 $(5,7)$	A_8^2
A_9	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$(3,7)$	A_9^2

另一方面, 因为 $C \leq A$ 且 $C \cap N = 1$, 则 $\langle C, N \rangle = C \times N$ 。若 $C \neq 1$, 因为 A 不含可解的极大正规子群, 故 C 不可解。由引理 3.1, 对任意 $\alpha \in VT$, 有 $7 \mid |C_\alpha|$ 且 $7 \mid |N_\alpha|$ 。注意到 $C \cap N = 1$, $\langle C, N \rangle = C \times N$, 因为 $|(CN)_\alpha| = |C_\alpha| |N_\alpha| |A_\alpha|$, 则 $7^2 \mid |A_\alpha|$ 。但由引理 2.2 可知该情形不可能发生, 因此 $C = 1$, 进而得到 $A = A/C \leq \text{Aut}(N) \cong \text{Aut}(T) \wr \mathbb{Z}_2$ 。

设 $T \cong \text{PSL}(2,7)$, 则 $A \leq \text{Aut}(T) \wr \mathbb{Z}_2 = (\text{PSL}(3,2) \times \text{PSL}(3,2)) : D_8$ 。然而, $(\text{PSL}(3,2) \times \text{PSL}(3,2)) : D_8$ 的所有子群在 VT 上都不弧传递。设 $T \cong \text{PSL}(2,8)$, 则 $A \leq \text{Aut}(T^2) = (\text{PSL}(2,8) \times \text{PSL}(2,8)) : (\mathbb{Z}_3 \times S_3)$ 。由于 A 在 VT 上弧传递, 则 A 可取 $(\mathbb{Z}_7 : \mathbb{Z}_6) \times (\text{PSL}(2,8) : \mathbb{Z}_3)$ 、 $(\text{PSL}(2,8) \times \text{PSL}(2,8)) : S_3$ 和 $(\text{PSL}(2,8) \times \text{PSL}(2,8)) : \mathbb{Z}_6$ 。设 $T \cong \text{PSU}(3,3)$, 则 $A \leq \text{Aut}(T) \wr \mathbb{Z}_2 = (\text{PSU}(3,3) \times \text{PSU}(3,3)) : D_8$ 。利用 GAP [21] 寻找 $(\text{PSU}(3,3) \times \text{PSU}(3,3)) : D_8$ 的弧传递子群, 得到 $A = \text{PSL}(3,2) \times \text{PSU}(3,3)$ 。设 $T \cong A_7$, 则 $A \leq \text{Aut}(T^2) = (A_7 \times A_7) : D_8$ 。若 $(p,q)=(3,7)$, 则 $(A_7 \times A_7) : D_8$ 的弧传递子群不存在满足条件的点稳定子群, 与引理 2.2 矛盾。若 $(p,q)=(5,7)$, 则 A 可取 $\mathbb{Z}_7 : (\mathbb{Z}_3 \times S_7)$ 、 $(\mathbb{Z}_7 : \mathbb{Z}_6) \times A_7$ 、 $(\mathbb{Z}_7 : \mathbb{Z}_3) \times S_7$ 以及 $\text{PSL}(3,2) \times S_7$ 。借助 Magma [22] 计算表明, 不存在这样的图。注意到 $N \leq A$, 故 $N_\alpha \leq A_\alpha$ 。设 $T \cong \text{PSL}(3,4)$ 。若 $(p,q)=(3,7)$, 由 GAP 计算可得, N 不存在指数为 $9pq$ 或者指数为 $18pq$ 的子群。若 $(p,q)=(5,7)$, 则 $N_\alpha = \text{PSL}(3,4) \times ((\mathbb{Z}_2^4 : \mathbb{Z}_2) : \mathbb{Z}_2)$ 或 $\text{PSL}(3,4) \times ((\mathbb{Z}_4^2 : \mathbb{Z}_2) : \mathbb{Z}_2)$ 。但根据引理 2.2, A_α 不存在上述两种结构的正规子群。类似地, 设 $T \cong A_8$, 此时仅当 $(p,q)=(5,7)$ 时 N_α 才存在, 同样与 $N_\alpha \leq A_\alpha$ 矛盾。设 $T \cong \text{PSp}(6,2)$ 或 A_9 。由于 N 在顶点集 VT 上仅有一条轨道, 故 $|N_\alpha| = 2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ 或 $|N_\alpha| = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ 。逐一核对引理 2.2 中所有点稳定子群的阶, 没有一个满足 $|N_\alpha| \mid |A_\alpha|$, 由此导出矛盾。

因此 $d=1$, $N=T \trianglelefteq A \leq \text{Aut}(T)$, 并且这类单群 T 的分类结果已列于命题 2.6 的表 6 中。

接下来我们讨论 A 存在可解极小正规子群的情形。

引理 3.3 若 A 含有可解的极小正规子群 N , 则 $\Gamma \cong C_{990}^i$, 其中 $i=1, 2$, 见表 7。

证明: 由于 $|V\Gamma|=18pq$, 且 $3 \leq p < q$, 于是 $N \cong \mathbb{Z}_2$ 、 $\mathbb{Z}_3^2$ 、 $\mathbb{Z}_3$ 、 $\mathbb{Z}_p$ 或 $\mathbb{Z}_q$ 。

若 $N \cong \mathbb{Z}_2$, 由引理 2.1, Γ_N 是 $9pq$ 阶的七度对称图, 因为不存在奇数阶奇数度图, 矛盾。

若 $N \cong \mathbb{Z}_3^2$, 则 Γ_N 是阶为 $2pq$ 的七度对称图。则由引理 2.4 知 $\Gamma_N \cong CD_{2pq}^k$ 、 $C_{78}^i (i=1, 2)$ 、 C_{310} 、 C_{30} 。下面依次考察这四种情形。

设 $\Gamma_N \cong C_{78}^i$, 则 $A/N \leq \text{Aut}C_{78}^i \cong \text{PSL}(2, 13)$ 或 $\text{PGL}(2, 13)$, 此时 $(p, q) = (3, 13)$ 。由 A/N 在 Γ_N 上的弧传递性可得 $A = \mathbb{Z}_3^2 \cdot \text{PSL}(2, 13)$ 或 $A = \mathbb{Z}_3^2 \cdot \text{PGL}(2, 13)$ 。第一种情形下, $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3^2 : \text{PSL}(2, 13), F_{14})$ 。第二种情形中, $|A_\alpha| = 28$, 结合引理 2.2 可知, $\mathbb{Z}_3^2 : \text{PGL}(2, 13)$ 中唯一的 28 阶子群同构于 $F_{14} \times \mathbb{Z}_2$ 。然而 Magma 计算表明, 上述两种情形均不存在对应的图。设 $\Gamma_N \cong C_{310}$, 则 $A/N \leq \text{Aut}C_{310} = \text{PSL}(5, 2) \cdot \mathbb{Z}_2$ 。因为 A/N 在 $V\Gamma_N$ 上弧传递, GAP 计算得到 $\text{Aut}\Gamma_N$ 有极小弧传递子群 $H/N \cong \text{PSL}(5, 2)$ 。因此 $\text{PSL}(5, 2) \leq A/N \leq \text{PSL}(5, 2) \cdot \mathbb{Z}_2$ 。由于 $\text{Mult}(\text{PSL}(5, 2)) = 1$, $A = (\mathbb{Z}_3^2 \times \text{PSL}(5, 2)) \cdot \mathbb{Z}_2$, 则 A 对应的点稳定子 $A_\alpha = \mathbb{Z}_2^6 : (\text{SL}(2, 2) : \text{SL}(3, 2))$ 。但 Magma 验算证实不存在这样的图。设 $\Gamma_N \cong C_{30}$, 则 $A/N \leq \text{Aut}(C_{30}) \cong S_8$, 此时 $(p, q) = (3, 5)$ 。由于 A/N 在 Γ_N 上弧传递, 运行以下程序, 故 $A/N \cong A_7$ 、 S_7 、 A_8 或 S_8 ¹。若 $A = \mathbb{Z}_3^2 \cdot A_8$, 则 $|A_\alpha| = 672$, 由于引理 2.2 中所有点稳定子中并无 672 阶群, 则排除此情形。此外, $\mathbb{Z}_3^2 \cdot A_7$ 不存在阶为 84 且同构于 $F_{42} \times \mathbb{Z}_2$ 的子群, 则仅可能的情况为 $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3^2 \cdot S_7, \text{PSL}(3, 2))$ 或 $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3^2 \cdot S_8, \text{ASL}(3, 2))$ 。但 Magma 计算验证表明不存在这样的图。设 $\Gamma_N \cong CD_{2pq}^h$, 则 $\text{Aut}(\Gamma_N) \cong D_{2pq} : \mathbb{Z}_7$ 。因为 A/N 是 $\text{Aut}(\Gamma_N)$ 的弧传递子群, 所以 $2pq \cdot 7 \mid |A/N| \mid |D_{2pq} : \mathbb{Z}_7|$, 由此迫使 $A/N = D_{2pq} : \mathbb{Z}_7$ 。设 H 为 D_{2pq} 的 pq 阶正规子群, Q 为 H 的 Sylow q -子群。由 Sylow 定理, Q 在 H 中是特征子群; 又 $H \leq D_{2pq}$, 故 $Q \leq D_{2pq}$ 。注意到 Q 同样是 D_{2pq} 的 Sylow q -子群, 因此 Q 在 D_{2pq} 中是特征子群。结合 $D_{2pq} \trianglelefteq A/N$, 可得 $Q \trianglelefteq A/N$ 。由 $q > p \geq 3$ 且 $p \mid q-1$, 知 $q \geq 7$, 于是 Q 也是 A/N 的 Sylow q -子群。记 $Q = G/N$, 则 $G/N \cong \mathbb{Z}_q$ 且 $|G| = 3^2 \cdot q$ 。依据 Sylow 定理, G 的 Sylow q -子群正规, 记为 M , 则 $M \cong \mathbb{Z}_q$, 且 $G = \mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_q = N \times M$ 。因 $G \trianglelefteq A$, 故 $M \trianglelefteq A$ 。从而 Γ_M 是 $18p$ 个顶点上的七度弧传递图。结合条件 $q > p \geq 3$ 、 $p \mid q-1$ 以及 $q \geq 7$, 再利用引理 2.3 可得 $(p, q) = (5, 7)$, 这与 $p \mid q-1$ 矛盾。因此不存在这样的图。

若 $N \cong \mathbb{Z}_3$, 则 Γ_N 是阶为 $6pq$ 的七度对称图, Γ_N 及其自同构群 $\text{Aut}\Gamma_N$ 已列于引理 2.5。

设 $\Gamma_N \cong CD_{6pq, h}$, 则 $\text{Aut}\Gamma_N \cong D_{6pq} : \mathbb{Z}_7$ 。仿照 CD_{2pq}^h 的论证, 可得商图是顶点数为 $18p$ 的七度对称图。注意 $q > p \geq 3$, $7 \mid q-1$ 且 $7 \mid p-1$, 于是 $p, q \geq 29$; 但引理 2.3 给出 $p=2$ 或 5 , 二者矛盾, 故同样不存在这样的图。设 $\Gamma_N \cong C_{90}$, 则 $A/N \leq \text{Aut}(C_{90}) \cong \mathbb{Z}_3 \cdot S_7$ 。由于 A/N 在 Γ_N 的弧集上弧传递, $\text{Aut}(C_{90})$ 作用于 Γ_N 的弧传递子群为 A_7 、 S_7 、 $\mathbb{Z}_3 \times A_7$ 、 $\mathbb{Z}_3 \cdot A_7$ 、 $\mathbb{Z}_3 \times S_7$ 、 $A_7 : S_3$ 、 $(\mathbb{Z}_3 \cdot A_7) : \mathbb{Z}_2$ 。于是 $A = \mathbb{Z}_3 \cdot A_7, \mathbb{Z}_3 \cdot S_7, \mathbb{Z}_3 \cdot (\mathbb{Z}_3 \times A_7), \mathbb{Z}_3 \cdot (\mathbb{Z}_3 \cdot A_7), \mathbb{Z}_3 \cdot (\mathbb{Z}_3 \times S_7), \mathbb{Z}_3 \cdot (A_7 : S_3), \mathbb{Z}_3 \cdot ((\mathbb{Z}_3 \cdot A_7) : \mathbb{Z}_2)$ 。结合引理 2.2, 可得 $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3 \cdot (\mathbb{Z}_3 \times S_7), \text{PSL}(3, 2))$, $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3 \cdot (A_7 : S_3), \text{PSL}(3, 2))$, $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3 \cdot ((\mathbb{Z}_3 \cdot A_7) : \mathbb{Z}_2), \text{PSL}(3, 2))$ 。Magma 计算表明, 以上所有情形均不存在对应的图。设 $\Gamma_N \cong C_{330}$, 则 $\text{Aut}(\Gamma_N) \cong M_{22} \cdot \mathbb{Z}_2$, 此时 $(p, q) = (5, 11)$ 。根据 GAP 计算, $\text{Aut}\Gamma_N$ 存在极小弧传递子群 M_{22} 。因此有

¹s:=SymmetricGroup(8);; h:=Filtered(List(ConjugacyClassesSubgroups(s), Representative), x->Order(x) mod (2*3*5*7)=0);; List(h, StructureDescription); 以 S_8 为例, 在 GAP 中构造群, 枚举全部子群共轭类, 取其代表元, 结合商图弧传递的必要条件筛选候选子群, 获取其结构。

$M_{22} \leq A \leq \mathbb{Z}_3.(M_{22}:\mathbb{Z}_2)$ 。借助 GAP 可得 A 可取 $\mathbb{Z}_3 \times M_{22}$ 、 $\mathbb{Z}_3.M_{22}$ 、 $\mathbb{Z}_3 \times (M_{22}:\mathbb{Z}_2)$ 、 $\mathbb{Z}_3:(M_{22}:\mathbb{Z}_2)$ 或者 $(\mathbb{Z}_3.M_{22}):\mathbb{Z}_2$ 。进一步, 由 Magma 验算, 仅当 $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3.M_{22}, \text{ASL}(3, 2))$ 或 $(A, A_\alpha) = ((\mathbb{Z}_3.M_{22}):\mathbb{Z}_2, \text{ASL}(3, 2) \times \mathbb{Z}_2)$ 时存在对应的图, 分别记为 C_{990}^1 与 C_{990}^2 。相关结果见表 7。设 $\Gamma_N \cong C_{870}^i$, 其中 $i=1, 2, 3, 4$, 则 $A/N \leq \text{Aut}(C_{870}^i)$, 于是 $A/N \leq \text{PGL}(2, 29)$ 或 $A/N \leq \text{PSL}(2, 29)$ 。由于 A/N 在 Γ_N 上弧传递, 故 $A/N = \text{PGL}(2, 29)$ 或 $A/N = \text{PSL}(2, 29)$, 进而 $A = \mathbb{Z}_3.\text{PGL}(2, 29)$ 或 $A = \mathbb{Z}_3.\text{PSL}(2, 29)$ 。由引理 2.2 可得 $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3 \times \text{PSL}(2, 29), F_{14})$ 。类似地, 当 $\Gamma_N \cong C_{2838}^i$, $i=1, \dots, 6$ 时, 有 $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3 \times \text{PSL}(2, 43), F_{14})$ 。Magma 验算证实这两种情形均不存在对应的图。设 $\Gamma_N \cong C_{20418}^i$, 其中 $i=1, 2, \dots, 11$, 则 $A/N \leq \text{Aut}(C_{20418}^i)$, 即 $A/N \leq \text{PGL}(2, 83)$ 或 $A/N \leq \text{PSL}(2, 83)$ 。由于 A/N 在 Γ_N 上弧传递, 故 $A/N = \text{PGL}(2, 83)$ 或 $A/N = \text{PSL}(2, 83)$, 于是 $A = \mathbb{Z}_3.\text{PGL}(2, 83)$ 或 $A = \mathbb{Z}_3.\text{PSL}(2, 83)$ 。由引理 2.2 可得 $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3 \times \text{PSL}(2, 83), F_{14})$ 。记 $\Gamma = \text{Cos}(A, A_\alpha, A_\alpha g A_\alpha)$, 其中 $g \in A$ 为 2-元, 满足 $g^2 \in A_\alpha$ 且 $\langle A_\alpha, g \rangle = A$ 。Magma 计算表明 A 中不存在满足条件的 g , 矛盾。设 $\Gamma_N \cong C_{83166}$, 则 $A/N \leq \text{Aut}(C_{83166})$ 。由 GAP 可知, $\text{Aut}(C_{83166})$ 的弧传递子群为 $\text{PSL}(2, 167)$ 与 $\text{PGL}(2, 167)$, 因此 A/N 含有弧传递子群 $H/N \cong \text{PSL}(2, 167)$ 或 $\text{PGL}(2, 167)$ 。又 $\mathbb{Z}_3.\text{PSL}(2, 167) \cong \mathbb{Z}_3 \times \text{PSL}(2, 167)$, $\mathbb{Z}_3.\text{PGL}(2, 167) \cong \mathbb{Z}_3 \times \text{PGL}(2, 167)$ 或 $\mathbb{Z}_3:\text{PGL}(2, 167)$, 于是 H 同构于 $\mathbb{Z}_3 \times \text{PSL}(2, 167)$ 、 $\mathbb{Z}_3 \times \text{PGL}(2, 167)$ 或 $\mathbb{Z}_3:\text{PGL}(2, 167)$ 。结合引理 2.2, 得到 $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3 \times \text{PSL}(2, 167), F_{14})$ 。记 $\Gamma = \text{Cos}(A, A_\alpha, A_\alpha g A_\alpha)$, 其中 $g \in A$ 为 2-元, 满足 $g^2 \in A_\alpha$ 且 $\langle A_\alpha, g \rangle = A$ 。但 Magma 计算表明 A 中不存在这样的 g , 矛盾。

若 $N \cong \mathbb{Z}_p$, 则 Γ_N 是阶为 $18q$ 的七度对称图, Γ_N 的相关信息见表 3。

由 $q > p \geq 3$, 结合引理 2.3 得 $\Gamma_N \cong C_{90}$, 于是 $q=5$, 进而 $p=3$ 。借助 Magma 可得, $\text{Aut}(C_{90})$ 作用在 Γ_N 上的弧传递子群为 A_7 、 S_7 、 $\mathbb{Z}_3 \times A_7$ 、 $\mathbb{Z}_3.A_7$ 、 $\mathbb{Z}_3 \times S_7$ 、 $A_7:S_3$ 、 $(\mathbb{Z}_3.A_7):\mathbb{Z}_2$ 。于是 $A = \mathbb{Z}_3.A_7$ 、 $\mathbb{Z}_3.S_7$ 、 $\mathbb{Z}_3.(\mathbb{Z}_3 \times A_7)$ 、 $\mathbb{Z}_3.(\mathbb{Z}_3.A_7)$ 、 $\mathbb{Z}_3.(\mathbb{Z}_3 \times S_7)$ 、 $\mathbb{Z}_3.(A_7:S_3)$ 、 $\mathbb{Z}_3.((\mathbb{Z}_3.A_7):\mathbb{Z}_2)$ 。结合引理 2.2, 有 $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3.(\mathbb{Z}_3 \times S_7), \text{PSL}(3, 2))$, $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3.(A_7:S_3), \text{PSL}(3, 2))$, $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_3.((\mathbb{Z}_3.A_7):\mathbb{Z}_2), \text{PSL}(3, 2))$ 。但 Magma 计算表明, 以上所有情形均不存在对应的图。类似地, 若 $N \cong \mathbb{Z}_q$, 则 $\Gamma_N \cong C_{90}$, 于是 $p=5$, $q=7$ 。 A/N 的弧传递子群 H/N 同构于 A_7 、 S_7 、 $\mathbb{Z}_3 \times A_7$ 、 $\mathbb{Z}_3.A_7$ 、 $\mathbb{Z}_3 \times S_7$ 、 $A_7:S_3$ 或 $(\mathbb{Z}_3.A_7):\mathbb{Z}_2$ 。从而 A 含有弧传递子群 $H \cong \mathbb{Z}_7.A_7$ 、 $\mathbb{Z}_7.S_7$ 、 $\mathbb{Z}_7.(\mathbb{Z}_3 \times A_7)$ 、 $\mathbb{Z}_7.(\mathbb{Z}_3.A_7)$ 、 $\mathbb{Z}_7.(\mathbb{Z}_3 \times S_7)$ 、 $\mathbb{Z}_7.(A_7:S_3)$ 或 $\mathbb{Z}_7.((\mathbb{Z}_3.A_7):\mathbb{Z}_2)$ 。结合引理 2.2, 有 $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_7.(\mathbb{Z}_3 \times S_7), \text{PSL}(3, 2))$, $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_7.(A_7:S_3), \text{PSL}(3, 2))$, $(A, A_\alpha) = (\mathbb{Z}_7.((\mathbb{Z}_3.A_7):\mathbb{Z}_2), \text{PSL}(3, 2))$ 。Magma 计算表明, 以上所有情形均不存在对应的图。

接下来我们讨论 A 不存在可解极小正规子群的情形。

引理 3.4 若 A 没有可解的极小正规子群, 则 $\text{Aut} \Gamma \cong \text{PSL}(2, 503)$ 、 $\text{PSL}(2, 757)$ 、 $\text{PGL}(2, 757)$, 结果见表 7。

证明: 设 $T \cong \text{PSL}(2, 3^6)$ 、 $\text{PSL}(2, 5^3)$ 、 $\text{PSL}(5, 2)$ 、 ${}^3D_4(2)$ 、 $G_2(4)$ 、 $G_2(3)$ 、 $P\Omega^-(4, 8)$ 、 $P\Omega^-(8, 2)$ 、 $P\Omega^-(10, 2)$ 、 M_{22} 、 M_{23} 、 M_{24} 、 J_2 、 HS 、 McL 、 A_9 、 A_{10} 、 A_{13} 。根据 Atlas [23] 与 GAP, T 不存在指数为 $9pq$ 或 $18pq$ 的子群, 和引理 3.1 矛盾。

设 $T \cong P\Omega^+(10, 2)$ 。由于 T 在 $V\Gamma$ 上传递, 故 $T \leq A \leq \text{Aut}(T) = P\Omega^+(10, 2):\mathbb{Z}_2$ 。于是 $A \cong P\Omega^+(10, 2)$ 或者 $A \cong P\Omega^+(10, 2):\mathbb{Z}_2$, 对应 $|A_\alpha| = 2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ 或 $|A_\alpha| = 2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$, 与引理 2.2 矛盾。同理可排除 A_{11} 、 A_{12} 。设 $T \cong \text{PSU}(3, 2^3)$ 。由于 T 在 $V\Gamma$ 上不传递, T 在 $V\Gamma$ 上有两条轨道, 且 $|T_\alpha| = 2^9 \cdot 3 \cdot 7$ 。由 GAP,

$T < A \leq \text{Aut}(T) = (\text{PSL}(3, 2^3): \mathbb{Z}_3): S_3$, 则 A 可取 $\text{PSU}(3, 2^3): \mathbb{Z}_2$ 、 $\text{PSU}(3, 2^3): \mathbb{Z}_3$ 、 $\text{PSU}(3, 2^3): S_3$ 、 $\text{PSU}(3, 2^3): \mathbb{Z}_6$ 、 $(\text{PSU}(3, 2^3): \mathbb{Z}_3): \mathbb{Z}_3$ 、 $(\text{PSL}(3, 2^3): \mathbb{Z}_3): S_3$, 对应 $|A_\alpha| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 7$ 、 $2^8 \cdot 3^3 \cdot 7$ 、 $2^8 \cdot 3 \cdot 7$ 、 $2^9 \cdot 3^2 \cdot 7$ 、 $2^8 \cdot 3^4 \cdot 7$ 或 $2^9 \cdot 3^4 \cdot 7$ 。依据引理 2.2, 以上阶数均不可能, 故排除。同理排除 $\text{PSL}(2, 2^9)$ 。设 $T \cong \text{PSL}(2, 2^6)$, 查阅 Atlas 得 $\text{Out}(T) = \mathbb{Z}_6$, 结合引理 3.2, 有 $\text{PSL}(2, 2^6) \leq A \leq \text{PSL}(2, 2^6): \mathbb{Z}_6 = \text{PSL}(2, 2^6): \mathbb{Z}_6$, 则点稳定子 $|A_\alpha| = |\text{PSL}(2, 2^6)| / 18 \cdot 5 \cdot 13 = 2^5 \cdot 7$ 、 $|A_\alpha| = |\text{PSL}(2, 2^6): \mathbb{Z}_2| / 18 \cdot 5 \cdot 13 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ 、 $|A_\alpha| = |\text{PSL}(2, 2^6): \mathbb{Z}_3| / 18 \cdot 5 \cdot 13 = 2^6 \cdot 7$ 或者 $|A_\alpha| = |\text{PSL}(2, 2^6): \mathbb{Z}_6| / 18 \cdot 5 \cdot 13 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7$, 由引理 2.2, 前三种情形都不成立。对于最后一种情形, GAP 计算表明当 $A = \text{PSL}(2, 2^6): \mathbb{Z}_6$ 时不存在阶为 $2^6 \cdot 3 \cdot 7$ 的子群, 即 A 没有同构于 $\text{ASL}(3, 2)$ 的子群, 因此最后一种情形同样被排除。设 $T \cong \text{PSL}(4, 4)$ 。若 T 在 $V\Gamma$ 上有两条轨道, 则 $|T_\alpha| = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 且 $\text{PSL}(4, 4) < A \leq \text{Aut}(T)$, 根据 Atlas, $\text{Out}(T) = \mathbb{Z}_2^2$, 故 $\text{Aut}(T) = \text{PSL}(4, 4): \mathbb{Z}_2^2$, 于是 $A \cong \text{PSL}(4, 4): \mathbb{Z}_2$ 或 $\text{PSL}(4, 4): \mathbb{Z}_2^2$, 对应 $|A_\alpha| = 2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 或 $2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, 与引理 2.2 矛盾。若 T 传递, 则 $|A_\alpha| = |\text{PSL}(4, 4)| / (18 \cdot 5 \cdot 17) = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, 同样与引理 2.2 矛盾。同理排除 $\text{PSL}(3, 2^3)$ 。设 $T \cong P\Omega^+(6, 4)$, 则 $T \leq A \leq \text{Aut}(T) = \text{PSL}(4, 4): \mathbb{Z}_2^2$ 。于是 $A = \text{PSL}(4, 4)$ 、 $\text{PSL}(4, 4): \mathbb{Z}_2$ 或 $\text{PSL}(4, 4): \mathbb{Z}_2^2$, 对应 $|A_\alpha| = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 、 $2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 或 $2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, 这与引理 2.2 矛盾。同理排除 $P\Omega^-(4, 3^3)$ 与 $\text{PSL}(6, 2)$ 。设 $T \cong \text{PSp}(4, 2^3)$ 。由于 $|T| \mid 9pq$ 或 $18pq$, 得 $T_\alpha = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 或 $2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, 结合引理 2.2, 这与 $T_\alpha \trianglelefteq A_\alpha$ 矛盾。同理排除 $\text{PSL}(3, 2^4)$ 与 $\text{PSU}(6, 2)$ 。

最后考虑 $T \cong \text{PSL}(2, q)$ 的情形。此时 $T \leq A \leq \text{PGL}(2, q)$ 且 $|A: T| \leq 2$ 。若 A_α 不可解, 则由 $|A_\alpha: T_\alpha| \leq 2$ 知 T_α 也不可解, 于是 $T_\alpha \cong A_5$, 这与 $7 \mid |T_\alpha|$ 矛盾。因此 A_α 可解。由引理 2.2, $|A_\alpha| \mid 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, 从而 $|T_\alpha| \mid 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ 。由此得到 $|T| \mid 4536 \cdot p \cdot q$ 。注意到 $|T| = \frac{q(q-1)(q+1)}{2}$ 且 $\left(\frac{q+1}{2}, \frac{q-1}{2}\right) = 1$ 。若 $p \mid \frac{q-1}{2}$, 则 $q+1 \mid 4536$, 于是 $q = 7, 11, 13, 19, 23, 29, 37, 41, 53, 71, 83, 107, 167, 251, 503, 1511$ 或 2267 。若 $p \mid \frac{q+1}{2}$, 则 $q-1 \mid 4536$, 于是 $q = 5, 13, 19, 29, 37, 43, 73, 109, 163, 379, 757$ 或 2269 。结合条件 $63pq \mid |T|$ 以及 $|T| \mid 2^{25} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot p \cdot q$, 其中 $q > p \geq 3$, 可得 $q = 71, 251, 379, 503, 757, 1511$ 或 2269 。满足条件的 T 见表 9。

Table 9. Simple groups $\text{PSL}(2, q)$ satisfying the conditions

表 9. $\text{PSL}(2, q)$ 符合条件的单群

T	Order	(p, q)
$\text{PSL}(2, 71)$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$	$(5, 71)$
$\text{PSL}(2, 251)$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 251$	$(5, 251)$
$\text{PSL}(2, 379)$	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 379$	$(19, 379)$
$\text{PSL}(2, 503)$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 251 \cdot 503$	$(251, 503)$
$\text{PSL}(2, 757)$	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 379 \cdot 757$	$(379, 757)$
$\text{PSL}(2, 1511)$	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 151 \cdot 1511$	$(151, 1511)$
$\text{PSL}(2, 2269)$	$2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 227 \cdot 2269$	$(227, 2269)$

设 $T = \text{PSL}(2, 71)$, 记 M 为 $\text{PSL}(2, 71)$ 的极大子群。依据文献[24]的定理 2 与文献[25], $M \in \{D_{70}, D_{72}, \mathbb{Z}_2 : \mathbb{Z}_{35}, A_4, S_4, A_5\}$ 。注意到 $|T : T_\alpha| = 9pq$ 或 $18pq$, 但 M 不存在阶为 28 或 56 的子群, 导出矛盾。同理可得 $q \neq 251, 379, 1511, 2269$ 。

设 $T = \text{PSL}(2, 503)$, 若 T 在 VT 上有两条轨道, 则 $A \cong \text{PGL}(2, 503)$ 且 $|A_\alpha| = 56$, 这与引理 2.2 矛盾。因此 T 在 VT 上传递且 $(A, A_\alpha) = (\text{PSL}(2, 503), F_{14} \times \mathbb{Z}_2)$ 。由于计算机内存限制, 使用 Magma 无法得到图的具体结构, 进而无法直接判定图的同构关系。因此退而求其次, 判定图的存在性并估计图的数量上界。取 2-元素 $g \in T$ 满足 $g^2 \in T_\alpha$ 且 $\langle T_\alpha, g \rangle = T$, 记 $\Gamma = \text{Cos}(T, T_\alpha, T_\alpha g T_\alpha)$, 由 Magma 计算, 共有 4 个满足条件的 g 。同时目前也没有找到可行方法判断这 4 个 g 是否在共轭意义下等价。故对于 $(A, A_\alpha) = (\text{PSL}(2, 503), F_{14} \times \mathbb{Z}_2)$, 至少存在 1 个图, 至多存在 4 个图。设 $T = \text{PSL}(2, 757)$, 由于 T 在 VT 上传递, 故 $T \leq A \leq \text{Aut}(T) = \text{PGL}(2, 757)$, 于是 A 可取 $\text{PGL}(2, 757)$ 与 $\text{PSL}(2, 757)$, 对应的点稳定子分别为 $F_{14} \times \mathbb{Z}_2$ 与 F_{14} 。对 $\text{PGL}(2, 757)$, Magma 计算表明至少存在 1 个图, 至多存在 2 个图; 对 $\text{PSL}(2, 757)$, 至少存在 1 个图, 至多存在 375 个图。以上全部结果见表 7。

因此, 结合引理 3.2、引理 3.3 与引理 3.4, 我们完成定理 1 的全部证明。

参考文献

- [1] Conder, M. and Dobcsányi, P. (2002) Trivalent Symmetric Graphs on Up to 768 Vertices. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **40**, 41-63.
- [2] Chao, C.Y. (1971) On the Classification of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Transactions of the American Mathematical Society*, **158**, 247-256. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1971-0279000-7>
- [3] Cheng, Y. and Oxley, J. (1987) On Weakly Symmetric Graphs of Order Twice a Prime. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **42**, 196-211. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(87\)90040-2](https://doi.org/10.1016/0095-8956(87)90040-2)
- [4] Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) A Classification of Symmetric Graphs of Order $3p$. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **58**, 197-216. <https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1037>
- [5] Praeger, C.E., Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) Symmetric Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **58**, 299-318. <https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1046>
- [6] Praeger, C.E. and Xu, M.Y. (1993) Vertex-Primitive Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **59**, 245-266. <https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1068>
- [7] Feng, Y. and Kwak, J.H. (2006) Classifying Cubic Symmetric Graphs of Order $10p$ or $10p^2$. *Science in China Series A*, **49**, 300-319. <https://doi.org/10.1007/s11425-006-0300-9>
- [8] Feng, Y. and Kwak, J.H. (2007) Cubic Symmetric Graphs of Order a Small Number Times a Prime or a Prime Square. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **97**, 627-646. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2006.11.001>
- [9] Feng, Y.Q., Kwak, J.H. and Wang, K.S. (2005) Classifying Cubic Symmetric Graphs of Order $8p$ or $8p^2$. *European Journal of Combinatorics*, **26**, 1033-1052.
- [10] Guo, S.T. (2019) Heptavalent Symmetric Graphs of Order $12p$. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **42**, 161-172.
- [11] Guo, S., Hou, H. and Xu, Y. (2017) Heptavalent Symmetric Graphs of Order $16p$. *Algebra Colloquium*, **24**, 453-466. <https://doi.org/10.1142/s1005386717000293>
- [12] Guo, S.T., Hou, H.L. and Xu, Y. (2020) Heptavalent Symmetric Graphs of Order $8p$. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **43**, 37-46.
- [13] Guo, S. and Wu, Y. (2019) Heptavalent Symmetric Graphs of Order $24p$. *Proceedings—Mathematical Sciences*, **129**, Article No. 58. <https://doi.org/10.1007/s12044-019-0497-5>
- [14] Ling, B., Lan, T. and Ding, S. (2022) On 7-Valent Symmetric Graphs of Order $2pq$ and 11-Valent Symmetric Graphs of Order $4pq$. *Open Mathematics*, **20**, 1696-1708. <https://doi.org/10.1515/math-2022-0528>
- [15] Guo, S.T. (2020) Classifying Heptavalent Symmetric Graphs of Order $36p$. *Ars Combinatoria*, **148**, 57-68.

-
- [16] Guo, S.T. and Wang, L. (2018) Heptavalent Symmetric Graphs of Order $18p$. *Utilitas Mathematica*, **109**, 3-15.
 - [17] Lorimer, P. (1984) Vertex-Transitive Graphs: Symmetric Graphs of Prime Valency. *Journal of Graph Theory*, **8**, 55-68. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190080107>
 - [18] Yang, L.T. and Ling, B. (2026) Classification of Heptavalent Symmetry Graphs of Order $12pq$. *Pure Mathematics*, **16**, 68-75. <https://doi.org/10.12677/pm.2026.163070>
 - [19] Guo, S.T., Li, Y.T. and Hua, X.H. (2016) (G,s) -Transitive Graphs of Valency 7. *Algebra Colloquium*, **23**, 493-500. <https://doi.org/10.1142/s100538671600047x>
 - [20] Li, C.H., Lu, Z.P. and Wang, G. (2016) Arc-Transitive Graphs of Square-Free Order and Small Valency. *Discrete Mathematics*, **339**, 2907-2918. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.06.002>
 - [21] The GAP Group (2024) GAP—Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.13.1, 2024.
 - [22] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The Magma Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. <https://doi.org/10.1006/jscs.1996.0125>
 - [23] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) Atlas of Finite Groups. Clarendon Press.
 - [24] Cameron, P.J., Omid, G.R. and Tayfeh-Rezaie, B. (2006) 3-Designs from $PGL(2, p)$. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **13**, Article No. R50. <https://doi.org/10.37236/1076>
 - [25] Dickson, L.E. (1958) Linear Groups and Expositions of the Galois Field Theory. Dover Publications.