

广义四元数群与二面体群之间同态数量的讨论

王 凯

连云港师范学院数学与信息工程学院, 江苏 连云港

收稿日期: 2026年9月12日; 录用日期: 2026年10月12日; 发布日期: 2026年10月23日

摘 要

本文讨论广义四元数群的生成关系、元素的阶、构造其与二面体群之间的同态数量, 其同态数量满足T. Asai & T. Yoshida猜想。

关键词

同态, 广义四元数群, 二面体群, T. Asai & T. Yoshida猜想

Discussion on the Number of Homomorphisms between Generalized Quaternion Groups and Dihedral Groups

Kai Wang

College of Mathematics and Information Technology, Lianyungang Normal College, Lianyungang Jiangsu

Received: September 12, 2026; accepted: October 12, 2026; published: October 23, 2026

Abstract

This article discusses the generation relationship of the generalized quaternion group, the order of its elements, and the construction of the number of homomorphisms between it and the dihedral group, where the number of homomorphisms satisfies T Asai & T. Yoshida conjecture.

Keywords

Homomorphism, Congruence Relation, Generalized Quaternion Group, Conjecture of T. Asai & T. Yoshida



1. 引言

Frobenius 定理[1]证明: n 为自然数, C_n 为 n 阶循环群, K 为有限群, 则

$$|\text{Hom}(C_n, K)| \equiv 0 \pmod{(n, |K|)}.$$

T. Yoshida [2]把 Frobenius 定理中的循环群 C_n 换成有限交换群 H , 证明

$$|\text{Hom}(H, K)| \equiv 0 \pmod{(|H|, |K|)} \text{ 成立}.$$

在文献[3]中, T. Asai 和 T. Yoshida 进一步提出如下猜想: 设为 H, K 有限群, 则

$$|\text{Hom}(H, K)| \equiv 0 \pmod{(|H/H'|, |K|)}.$$

在计算同态个数方面, 在文献[4][5]中, 张良等人从亚循环群的结构入手以及生成关系入手, 具体计算了亚循环群与亚循环群之间的同态个数。在文献[6][7]中谢伟、赖吉娜分别计算了中心二面体群与二面体群之间的同态数量, 和一类 $10p^n$ 阶非交换群与二面体群的同态数量。文献[8]中郝延芹计算了拟二面体群到拟二面体群的同态数量, 在文献[9]中 J. Johnson 计算了 $2m$ 阶二面体群到 $2n$ 阶二面体群的同态个数, 作为推论, 给出了二面体群的自同态数量, 在文献[10]中尚博讨论了同余下的某类群之间的同态个数, R. Rajkumar 在文献[11][12]中计算了拟二面体群和二面体群到四元数群、模群等之间的同态数量, 本文将继续这方面的讨论。

四元数群在群论的理论研究和实际应用中占有重要地位, 在文献[13]中, 徐明耀将具有 p^{n-1} 阶循环子群的 p^n 阶有限 p -群分成了七类群, 而广义四元数群就是其中的一类, 为了便于叙述, 现先给出二面体群与广义四元数群的结构:

二面体群 $D_{2m} = \langle x, y \mid x^m = y^2 = 1, xy = yx^{-1} \rangle$, 其中 $m \geq 3$ 为正整数;

广义四元数群 $G = \langle a, b \mid a^{2^{n-1}} = 1, b^2 = a^{2^{n-2}}, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, 其中 $n \geq 3$ 为正整数; 本文在上述理论基础上, 基于广义四元数群的结构及元素性质, 运用代数学及数论的相关知识, 分别它们与二面体群 D_{2m} 之间的所有同态, 从而验证上述群满足 T. Asai & T. Yoshida 猜想。

2. 预备知识

引理 1.1 [14] 设 H, K 为有限群, σ 是群 H 到 K 的一个同态映射, 任取 $h \in H$, 有 $o(h^\sigma) \mid o(h)$ 。

引理 1.2 [13] 设 A, G 为群, X 为 A 的生成元集且 $X \neq \emptyset$ 。令 $\varphi, \theta \in \text{Hom}(A, G)$,

如果对任意的 $x \in X$, 有 $x^\varphi = x^\theta$, 则 $\varphi = \theta$ 。

引理 1.3 [13] 设 $H = \langle h \rangle$, $o(h) = n$, 若 $m \mid n$, 则 H 存在唯一的 m 阶子群。

引理 1.4 [7] D_{2m} 中, 有

- (1) m 为奇数, 则 $\{x^i y \mid 1 \leq i \leq m\}$ 为 D_{2m} 所有的二阶元;
- (2) m 为偶数, 则 $\{x^i \mid o(x^i) \mid 2\} \cup \{x^i y \mid 1 \leq i \leq m\}$ 为 D_{2m} 所有的二阶元;
- (3) D_{2m} 的换位子群 $D'_{2m} = \langle x^2 \mid x^m = 1 \rangle$ 。

引理 1.5 G 中, 有

- (1) $\{b, a^{2^{n-2}}, a^{2^{n-2}}b\}$ 为 G 所有的二阶元;
- (2) G 的换位子群 $G' = \langle a^2 \mid a^{2^{n-1}} = 1 \rangle$ 。

3. 主要定理及其证明

定理 2.1 设 n, m 为正整数且 $n, m \geq 3$, 有

- (1) 若 $(2, m) = 1$, 则 $\text{Hom}(G, D_{2m}) = 3m + 1$;
- (2) 若 $(2, m) \neq 1$, 则 $\text{Hom}(G, D_{2m}) = 6m + 2^{k+2}$, 其中 $2 \leq k \leq n-1$ 。

证明 任取 $\theta \in \text{Hom}(G, D_{2m})$ 。因为 $(a^{2^{n-1}})^\theta = (a^\theta)^{2^{n-1}} = 1$, 所以 $o(a^\theta) \mid 2^{n-1}$; 此外, $a^\theta \in D_{2m}$, 所以 $o(a^\theta) \mid 2m$, 得到 $o(a^\theta) \mid (2^{n-1}, 2m)$ 。同理, 由 $(b^4)^\theta = (b^\theta)^4 = 1$, $b^\theta \in D_{2m}$, 得到 $o(b^\theta) \mid (4, 2m)$ 。令 $m = 2^r l$, $k = \min\{r+1, n-1\}$, 其中 $(2, l) = 1, 1 \leq k \leq n-1$ 。当 $(2, m) = 1$, 有 $(2^{n-1}, 2m) = 2, (4, 2m) = 2$, 即有 $o(a^\theta) \mid 2, o(b^\theta) \mid 2$, 此时有

$$\begin{aligned} a^\theta &\in \{x^i y \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{x^i \mid o(x^i) \mid 1, 1 \leq i \leq m\}, \\ b^\theta &\in \{x^j y \mid 1 \leq j \leq m\} \cup \{x^j \mid o(x^j) \mid 1, 1 \leq j \leq m\}; \end{aligned}$$

当 $(2, m) \neq 1$, 有 $(2^{n-1}, m) \neq 1$, 故 $(2^{n-1}, 2m) = 2^k, (4, 2m) = 4$, 其中 $2 \leq k \leq n-1$, 即 $o(a^\theta) \mid p^k, o(b^\theta) \mid 4$, 此时有

$$\begin{aligned} a^\theta &\in \{x^i y \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{x^i \mid o(x^i) \mid 2^k, 1 \leq i \leq m, 2 \leq k \leq n-1\}, \\ b^\theta &\in \{x^j y \mid 1 \leq j \leq m\} \cup \{x^j \mid o(x^j) \mid 4, 1 \leq j \leq m\}. \end{aligned}$$

分以下四个断言证明定理 2.1。

断言 1 设 $\theta: G \rightarrow D_{2m} (a \mapsto x^i y, b \mapsto x^j)$, 其中 $o(x^i) \mid 4, 1 \leq i, j \leq m$, 则 θ 为群同态的充要条件是 $o(x^j) \mid 2$ 。

事实上, G 的生成组为 $\{a, b\}$, 故 $g \in G$, 都有 $a^s b^t = g$; 由引理可知 G 中生成元有 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1, b^2 (= a^{2^{n-2}})\}$; 现构造映射 θ , 使得该映射是 G 到 D_{2m} 的同态映射。由于 $a^s b^t \in G$, 带余除法知存在唯一的 u, v 与 s', t' , 使得 $a^{2^{n-2}u+s'} b^{2v+t'} = a^s b^t$, 其中 $0 \leq s' \leq 2^{n-1}-1, 0 \leq t' \leq 1$, 令 $\theta(a^s b^t) = \theta(a^{s'} b^{t'}) = \theta(a^{s'}) \theta(b^{t'})$; 下证明 θ 是映射: 任取 $a^{s_1} b^{t_1}, a^{s_2} b^{t_2} \in G$, 其中 $1 \leq s_1, s_2 \leq 2^{n-1}, 0 \leq t_1, t_2 \leq 4$; 若 $a^{s_1} b^{t_1} = a^{s_2} b^{t_2}$, 则有

$$a^{2^{n-1}u_1+s'_1} b^{2v_1+t'_1} = a^{2^{n-1}u_2+s'_2} b^{2v_2+t'_2},$$

从而

$$a^{2^{n-1}(u_1-u_2)+(s'_1-s'_2)} = b^{2(v_2-v_1)+(t'_2-t'_1)},$$

其中 $0 \leq s'_1, s'_2 \leq 2^{n-1}-1, 0 \leq t'_1, t'_2 \leq 1$; 此时有 $s'_1 = s'_2, t'_1 = t'_2$ 。事实上, 若 $t'_1 \neq t'_2$, 则由上式可得 $b \in \langle a \rangle$, 与 G 中 a, b 的关系矛盾; 若 $s'_1 \neq s'_2$, 推出 $s'_1 - s'_2 \neq 0 \pmod{2^{n-2}}$, 由上式可推出矛盾, 故 θ 是映射。

$\theta \in \text{Hom}(G, D_{2m})$, 有 $\theta(b^{-1}ab) = \theta(a^{-1})$, 即 $(x^j)^{-1}(x^i y)(x^j) = (x^i y)^{-1}$, 注意到 $(x^i y) = (x^i y)^{-1}$, 得到 $o(x^j) | 2$; 反之, 一方面:

$$\theta(a^{s_1} b^{t_1} a^{s_2} b^{t_2}) = \theta(a^{s_1 + (-1)^{t_1} s_2} b^{t_1 + t_2}) = (x^i y)^{s_1 + (-1)^{t_1} s_2} (x^j)^{t_1 + t_2},$$

注意到 $o(x^i y) | 2$, 故 $\theta(a^{s_1} b^{t_1} a^{s_2} b^{t_2}) = (x^i y)^{s_1 + s_2} (x^j)^{t_1 + t_2}$; 另一方面:

$$\theta(a^{s_1} b^{t_1}) \theta(a^{s_2} b^{t_2}) = (x^i y)^{s_1} (x^j)^{t_1} (x^i y)^{s_2} (x^j)^{t_2};$$

注意到 $o(x^j) | 2$, 于是 $\theta(a^{s_1} b^{t_1}) \theta(a^{s_2} b^{t_2}) = (x^i y)^{s_1 + s_2} (x^j)^{t_1 + t_2} = (x^i y)^{s_1 + s_2} (x^j)^{t_1 + t_2}$, 即 θ 为同态。

此时群同态 θ 有 $2m$ 种。

断言 2 设 $\theta: G \rightarrow D_{2m} (a \mapsto x^i y, b \mapsto x^j y)$, 其中 $1 \leq i, j \leq m$, 则 θ 为群同态的充要条件是 $x^i y$ 与 $x^j y$ 可交换。

θ 是群同态, 则有 $\theta(b^{-1}ab) = \theta(a^{-1})$, 即得 $(x^i y)(x^j y) = (x^j y)(x^i y)$; 反之, 同断言 1 可构造出映射 θ , 一方面: $\theta(a^{s_1} b^{t_1} a^{s_2} b^{t_2}) = \theta(a^{s_1 + s_2} b^{t_1 + t_2}) = (x^i y)^{s_1 + s_2} (x^j y)^{t_1 + t_2}$; 另一方面:

$$\theta(a^{s_1} b^{t_1}) \theta(a^{s_2} b^{t_2}) = (x^i y)^{s_1} (x^j y)^{t_1} (x^i y)^{s_2} (x^j y)^{t_2} = (x^i y)^{s_1 + s_2} (x^j y)^{t_1 + t_2},$$

易知 $x^i y$ 与 $x^j y$ 可交换等价于 $m | 2(i-j)$ 。故当 $(2, m) = 1$ 时, 得 $m | (i-j)$, 考虑到 i, j 的范围, 此时仅当 $i = j$ 时成立, 故群同态 θ 有 m 种; 当 $(p, m) \neq 1$ 时, $i = j$ 情况下有 m 种, $i \neq j$ 情况下也有 m 种, 故此时群同态 θ 有 $2m$ 种。

断言 3 设 $\theta: G \rightarrow D_{2m} (a \mapsto x^i, b \mapsto x^j)$, 其中 $o(x^i) | 2^k, o(x^j) | 4, 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq k \leq n-1$, 则 θ 是群同态。

同上可构造出映射 θ , 还有 $\theta(a^{s_1} b^{t_1} a^{s_2} b^{t_2}) = (x^i)^{s_1 + s_2} (x^j)^{t_1 + t_2} = \theta(a^{s_1} b^{t_1}) \theta(a^{s_2} b^{t_2})$, 故 θ 是群同态。此时群同态 θ 有 2^{k+2} 种。

断言 4 设 $\theta: G \rightarrow D_{2m} (a \mapsto x^i, b \mapsto x^j y)$, 其中 $o(x^i) | 2^k, 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq k \leq n-1$, 则 θ 为群同态充要条件是 $o(x^i) | 2$ 。

θ 是群同态, 则有 $\theta(ab) = \theta(ba^{-1})$, 即得 $(x^i)(x^j y) = (x^j y)(x^i)^{-1}$, 推 $(x^i)^2 = 1$; 反之, 同断言 2 的证明。

此时群同态 θ 有 $2m$ 种。

定理 2.2 设 n, m 为正整数且 $n, m \geq 3$, 有

- (1) 若 $(2, m) = 1$, 则 $\text{Hom}(D_{2m}, G) = 8$;
- (2) 若 $(2, m) \neq 1$, 则 $\text{Hom}(D_{2m}, G) = 32$ 。

证明 任取 $\theta \in \text{Hom}(D_{2m}, G)$, 因为 $(x^m)^\theta = (x^\theta)^m = 1$, 故 $o(x^\theta) | m$, 此外 $x^\theta \in G$, 所以 $o(x^\theta) | (2^n, m)$; 同理, $o(y^\theta) | (2^n, 4)$, 故可得 $o(y^\theta) | 4$ 。当 $(2, m) = 1$ 时, 可推得 $(2^n, m) = 1$, 即推出 $o(x^\theta) | 1$, 于是

$$\begin{aligned} x^\theta &\in \{a^{i_1} b^{j_1} \mid o(a^{i_1} b^{j_1}) | 1, 1 \leq i_1 \leq 2^n, 1 \leq j_1 \leq 4\}, \\ y^\theta &\in \{a^{i_2} b^{j_2} \mid o(a^{i_2} b^{j_2}) | 4, 1 \leq i_2 \leq 2^n, 1 \leq j_2 \leq 4\}; \end{aligned}$$

当 $(2, m) \neq 1$ 时, 有

$$x^\theta \in \{a^{i_1} b^{j_1} \mid o(a^{i_1} b^{j_1}) \mid 4, 1 \leq i_1 \leq 2^n, 1 \leq j_1 \leq 4, 1 \leq k \leq n\},$$

$$y^\theta \in \{a^{i_2} b^{j_2} \mid o(a^{i_2} b^{j_2}) \mid 4, 1 \leq i_2 \leq 2^n, 1 \leq j_2 \leq 4\}.$$

分以下两个断言证明定理 2.2。

断言 1 设 $\theta: D_{2m} \rightarrow G(x \mapsto a^{i_1} b^{j_1}, y \mapsto a^{i_2} b^{j_2})$, 其中 $1 \leq i_1, i_2 \leq 2^{n-1}$, $1 \leq j_1, j_2 \leq 4$, 则 θ 为群同态的充要条件是 $o(a^{i_1} b^{j_1}) \mid 2$ 且 $o(a^{i_2} b^{j_2}) \mid 2$ 。

$x^s y^t \in D_{2m}$, 令 $\theta(x^s y^t) = (a^{i_1} b^{j_1})^s (a^{i_2} b^{j_2})^t$ 。若 θ 是群同态, 则有 $\theta(xy x) = \theta(y)$, 可得到关系式 $(a^{i_1} b^{j_1})(a^{i_2} b^{j_2})(a^{i_1} b^{j_1}) = (a^{i_2} b^{j_2})$, 下对 j_1 与 j_2 进行讨论。当 j_1 与 j_2 都是奇数时, 由关系式可得到 $o(a^{i_2})^2 = 1$; 当 j_1 与 j_2 都是偶数时, 由关系式可得到 $o(a^{i_1} b^{j_1}) \mid 2$; 当 j_1 是奇数, j_2 为偶数时, 由关系式可得到 $b^{2j_1} = a^{2i_2}$; 当 j_1 是偶数, j_2 为奇数时, 由关系式可得到 $b^{2j_1} = 1$, 故有 $o(a^{i_2}) \mid 2$ 。反之, 由引理 1.5 知道 G 中共有 3 个不同的二阶元, 于是 θ 可分为以下八种情况:

$$\theta_1: D_{2m} \rightarrow G(x \mapsto a^{2^{n-2}} b^2, y \mapsto a^{2^{n-2}} b^{j_2});$$

$$\theta_2: D_{2m} \rightarrow G(x \mapsto a^{2^{n-2}} b^2, y \mapsto b^{j_2});$$

$$\theta_3: D_{2m} \rightarrow G(x \mapsto a^{2^{n-2}}, y \mapsto a^{2^{n-2}} b^{j_2});$$

$$\theta_4: D_{2m} \rightarrow G(x \mapsto a^{2^{n-2}}, y \mapsto b^{j_2});$$

$$\theta_5: D_{2m} \rightarrow G(x \mapsto b^2, y \mapsto a^{2^{n-2}} b^{j_2});$$

$$\theta_6: D_{2m} \rightarrow G(x \mapsto b^2, y \mapsto b^{j_2});$$

$$\theta_7: D_{2m} \rightarrow G(x \mapsto 1, y \mapsto a^{2^{n-2}} b^{j_2});$$

$$\theta_8: D_{2m} \rightarrow G(x \mapsto 1, y \mapsto b^{j_2}); \text{ 其中 } 1 \leq j_2 \leq 4.$$

易验证 θ_7, θ_8 是同态。

验证 θ_1 , 一方面: $\theta_1(x^{s_1} y^{t_1} x^{s_2} y^{t_2}) = (x^{s_1 + (-1)^{t_1} s_2} y^{t_1 + t_2}) = (a^{2^{n-2}} b^2)^{s_1 + s_2} (a^{2^{n-2}} b^{j_2})^{t_1 + t_2}$, 另一方面:

$\theta_1(x^{s_1} y^{t_1}) \theta_1(x^{s_2} y^{t_2}) = (a^{2^{n-2}} b^2)^{s_1} (a^{2^{n-2}} b^{j_2})^{t_1} (a^{2^{n-2}} b^2)^{s_2} (a^{2^{n-2}} b^{j_2})^{t_2}$ 。 s_2 为偶数时显然成立。当 s_2 为奇数时, 若 t_1 是偶数, 则由 $(a^{2^{n-2}} b^{j_2})^2 = b^{2j_2}$, 得

$$\theta_1(x^{s_1} y^{t_1}) \theta_1(x^{s_2} y^{t_2}) = (a^{2^{n-2}} b^2)^{s_1} (b^{2j_2})^q (a^{2^{n-2}} b^2) (a^{2^{n-2}} b^{j_2})^{t_2} = (a^{2^{n-2}} b^2)^{s_1} (a^{2^{n-2}} b^2)^{s_1} (b^{2j_2})^q (a^{2^{n-2}} b^{j_2})^{t_2},$$

其中 q 是整数, 即有 $\theta_1(x^{s_1} y^{t_1}) \theta_1(x^{s_2} y^{t_2}) = \theta_1(x^{s_1} y^{t_1} x^{s_2} y^{t_2})$; 若 t_1 是奇数, 则

$$\theta_1(x^{s_1} y^{t_1}) \theta_1(x^{s_2} y^{t_2}) = (a^{2^{n-2}} b^2)^{s_1} (b^{2j_2})^q (a^{2^{n-2}} b^{j_2}) (a^{2^{n-2}} b^2) (a^{2^{n-2}} b^{j_2})^{t_2},$$

得到 $\theta_1(x^{s_1} y^{t_1}) \theta_1(x^{s_2} y^{t_2}) = (a^{2^{n-2}} b^2)^{s_1 + 1} (b^{2j_2})^q (a^{2^{n-2}} b^{j_2}) (a^{2^{n-2}} b^{j_2})^{t_2}$, 故 θ_1 是同态。

验证 θ_2 ，一方面： $\theta_2(x^{s_1}y^{t_1}x^{s_2}y^{t_2}) = (x^{s_1+(-1)^{t_1}s_2}y^{t_1+t_2}) = (a^{2^{n-2}}b^2)^{s_1+s_2} (b^{j_2})^{t_1+t_2}$ ，

另一方面： $\theta_2(x^{s_1}y^{t_1})\theta_2(x^{s_2}y^{t_2}) = (a^{2^{n-2}}b^2)^{s_1} (b^{j_2})^{t_1} (a^{2^{n-2}}b^2)^{s_2} (b^{j_2})^{t_2}$ 。由于 $o(a^{2^{n-2}}b^2) \mid 2$ ，

故 $\theta_2(x^{s_1}y^{t_1})\theta_2(x^{s_2}y^{t_2}) = (a^{2^{n-2}}b^2)^{s_1} (a^{2^{n-2}}b^2)^{s_2} (b^{j_2})^{t_1} (b^{j_2})^{t_2}$ ，即 θ_2 是同态。

θ_3 ， θ_5 ， θ_7 同 θ_1 讨论，可知皆为同态。

θ_4 ， θ_6 ， θ_8 同 θ_2 讨论，可知皆为同态。

综上所述， θ 为群同态有 32 种。

断言 2 设 $\theta: D_{2m} \rightarrow G(x \mapsto a^{i_1}b^{j_1}, y \mapsto a^{i_2}b^{j_2})$ ，其中 $o(a^{i_1}b^{j_1}) \mid 1$ ， $1 \leq i_1, i_2 \leq 2^{n-1}$ ， $1 \leq j_1, j_2 \leq 4$ ，则 θ 为群同态。

同上可证。 θ 为群同态有 8 种。

根据前面的结论可验证 G 满足 T. Asai & T. Yoshida 猜想

定理 2.3 设 n, m 为正整数且 $n, m \geq 3$ ，则

$$|\text{Hom}(G, D_{2m})| \equiv 0 \pmod{(|G/G'|, |D_{2m}|)}。$$

证明 由引理得 $G' = a^2$ ，即有 $|G/G'| = 4$ ，故

$$(|G/G'|, |D_{2m}|) = (4, 2m)。$$

根据定理 2.1 得 $(2, m) = 1$ 时，有 $|\text{Hom}(G, D_{2m})| = 3m + 1$ ， $(4, 2m) = 2$ ，于是 $3m + 1 \equiv 0 \pmod{2}$ ； $(2, m) \neq 1$ 时，有 $|\text{Hom}(G, D_{2m})| = 6m + 2^{k+1}$ ， $(4, 2m) = 4$ ，于是 $6m + 2^{k+1} \equiv 0 \pmod{4}$ ，其中 $2 \leq k \leq n-1$ 。

定理 2.4 设 n, m 为正整数且 $n, m \geq 3$ ，则

$$|\text{Hom}(D_{2m}, G)| \equiv 0 \pmod{(|D_{2m}/D'_{2m}|, |G|)}。$$

证明 根据引理 1.4 可知，当 $(2, m) = 1$ 时， $|D_{2m}/D'_{2m}| = 2$ ，即有

$$(|D_{2m}/D'_{2m}|, |G|) = 2；$$

当 $(2, m) \neq 1$ 时， $|D_{2m}/D'_{2m}| = 4$ ，即有 $(|D_{2m}/D'_{2m}|, |G|) = 4$ 。

根据定理 2.2， $(2, m) = 1$ 时，有 $|\text{Hom}(D_{2m}, G)| = 8$ ，满足等式； $(2, m) \neq 1$ 时，有 $|\text{Hom}(D_{2m}, G)| = 32$ ，满足等式。

参考文献

- [1] Frobenius, G. (1903) Über Einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie. Springer-Verlag, 330-334.
- [2] Yoshida, T. (1993) $|\text{Hom}(A, G)|$. *Journal of Algebra*, **156**, 125-156. <https://doi.org/10.1006/jabr.1993.1066>
- [3] Asai, T. and Yoshida, T. (1993) $|\text{Hom}(A, G)|$, II. *Journal of Algebra*, **160**, 273-285. <https://doi.org/10.1006/jabr.1993.1188>
- [4] 张良, 海进科. 亚循环群到亚循环群之间的同态个数[J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(6): 17-22.
- [5] 张良, 海进科. 一类亚循环群同态个数的计算[J]. 吉林大学学报(理学版), 2018, 56(5): 1045-1048.
- [6] 赖吉娜, 郭继东. 一类非交换群与二面体群之间的同态个数[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(12): 30-36.
- [7] 谢伟, 郭继东. 中心二面体群与二面体群之间的同态个数[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(8): 80-86.
- [8] 郝延芹, 海进科. Asai 和 Yoshida 猜想的一个注记[J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(6): 1473-1476.
- [9] Johnson, J.W. (2013) The Number of Group Homomorphisms from D_m into D_n . *The College Mathematics Journal*, **44**,

190-192. <https://doi.org/10.4169/college.math.j.44.3.190>

- [10] 尚博. 关于某些群之间群同态个数的同余问题研究[D]: [硕士学位论文]. 青岛: 青岛大学, 2018.
- [11] Rajkumar, R., Gayathri, M. and Anitha, T. (2015) Counting Homomorphisms from Quasi-Dihedral Group into Some Finite Groups. *International Journal of Mathematics and Its Applications*, **3**, 9-13.
- [12] Rajkumar, R., Gayathri, M. and Anitha, T. (2015) The Number of Homomorphisms from Dihedral Group into Some Finite Groups. *Mathematical Sciences International Research Journal*, **4**, 161-165.
- [13] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [14] John, S. (1978) A Course on Group Theory. Cambridge University Press.