Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(11), 12-17
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1611230

Hans汉斯

矩阵的行等价及其应用

李贝贝，王玉雷*

河南工业大学数学与统计学院，河南 郑州

收稿日期：2026年9月15日；录用日期：2026年10月18日；发布日期：2026年11月3日

摘　要

矩阵是线性代数的核心研究工具，探究矩阵等价关系、挖掘对应不变量，是完成矩阵化简、简化运算分析的重要基础。在众多矩阵等价关系里，行等价应用最为广泛，且任意矩阵在初等行变换下都存在唯一的行最简形，这一性质为矩阵理论分析提供了重要支撑。本文以矩阵初等行变换为切入点，依托行最简形的唯一性，从矩阵的秩、线性方程组解的结构、矩阵乘法运算以及线性变换构造等多个维度，系统梳理矩阵行等价的不同表达形式。文章重点研讨初等行变换下线性方程组的同解特性、矩阵构造规律，同时结合实例分析行等价关系在求解矩阵秩、搭建线性变换、解析方程组解空间等典型问题中的实际应用，进一步阐明行等价理论在线性代数体系中的实用价值与理论意义。

关键词

矩阵，等价关系，初等行变换，行最简形

On Row Equivalence of Matrices and Its Applications

Beibei Li, Yulei Wang*

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Technology, Zhengzhou Henan

Received: September 15, 2026; accepted: October 18, 2026; published: November 3, 2026

Abstract

Matrices are the core research tools of linear algebra. Exploring the equivalence relations of matrices and studying their corresponding invariants serves as an important foundation for matrix simplification and operational analysis. Among various matrix equivalence relations, row equivalence enjoys the most extensive applications. Notably, any matrix has a unique reduced row echelon form under elementary row transformations, a property that provides crucial support for the theoretical

*通讯作者。

文章引用: 李贝贝, 王玉雷. 矩阵的行等价及其应用[J]. 理论数学, 2026, 16(11): 12-17.
DOI: 10.12677/pm.2026.1611230

analysis of matrices. Taking elementary row transformations as the starting point and based on the uniqueness of the reduced row echelon form, in this paper, the diverse expressions of matrix row equivalence are systematically sorted out from multiple perspectives, including matrix rank, the solution structure of linear systems, matrix multiplication and the construction of linear transformations. It focuses on discussing the equivalence of solutions to linear systems and the rules of matrix construction under elementary row transformations. Combined with examples, in this paper, the practical applications of row equivalence are analyzed in calculating matrix rank, constructing linear transformations and resolving the solution spaces of linear systems, and further elucidating the practical value and theoretical significance of row equivalence theory in the framework of linear algebra.

Keywords

Matrix, Equivalence Relation, Elementary Row Transformation, Reduced Row Echelon Form

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

矩阵是线性代数的核心研究对象，也是工程运算、数据分析、数学建模等领域处理复杂问题的核心工具，依托矩阵理论求解各类线性问题，已成为数学领域的主流研究手段。但在实际应用与理论推导中，高维高阶矩阵、元素结构复杂的矩阵十分常见，这类矩阵形式烦琐、特征隐蔽，不仅难以直接精准刻画其秩、解空间、变换规律等核心特殊性质，还会大幅增加线性方程组求解、矩阵分解、线性变换分析等问题的求解难度，制约了矩阵理论的落地应用。因此，矩阵化简是线性代数研究中不可或缺的关键环节。矩阵化简并非对矩阵元素进行随意改写，必须依托等价关系开展变换，在保留矩阵核心固有性质的前提下，将复杂矩阵转化为简洁的标准形式，以此简化运算、明晰矩阵本质特征。

目前，国内外学者针对矩阵等价标准形及各类等价关系，已从不同理论维度开展了大量系统性研究，形成了丰富的理论成果。文献[1]与[2]以集合二元等价关系及分类理论为基础，围绕线性方程组、向量组与矩阵的对应关系，系统梳理并划分了矩阵的各类基础等价关系，明确了不同等价关系的适用场景。对于矩阵三类核心关系，即矩阵等价、相似与合同关系的定义、性质差异及内在关联，也都有比较完善的理论辨析研究[3]-[10]。文中的记号都是标准的，可以参考文献[11] [12]。

现有研究虽已初步构建矩阵等价关系的理论框架，但针对细分的特殊等价关系，仍缺乏系统化、精细化的归纳与刻画，尤其是矩阵行等价关系，贯穿线性代数核心知识点，具备极强的理论价值与实用性。为此，本文系统化梳理知识，深化概念理解，基于行等价判定形式多元、应用场景广泛的特点，对其核心性质、统一表述及应用方法进行系统归纳，具有重要的研究意义。

2. 矩阵的等价标准形

对于矩阵(若无特别说明，均指数域上的数字矩阵)，存在 3 种初等行变换：

(1) 对换两行；

(2) 以非零数 k 乘某一行中的所有元素；

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去。

如果矩阵 A 经过有限次初等行变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 和 B 行等价。

假设 S 是数域 F 上全体 $n\times m$ 矩阵构成的集合，二元关系“ R ”为行等价关系，则在此等价关系下的标准形 H 满足以下条件：

(1) H 的前 r 行中，每一行至少含有一个非零元素，且第一个非零元素为 1；后 $m-r$ 行元素均为 0；

(2) 若 H 中第 i 行的第一个非零元素 1 位于第 j_i 列($i=1,2,\cdots,r$)，则 $j_1<j_2<\cdots<j_r$；

(3) H 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列为 m 阶单位矩阵的前 r 列，即

$$H=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}\left.\begin{matrix}\\\\\\\\\\\\\end{matrix}\right\} r\text{ 行}.$$

其中， r 为相应矩阵的秩。该标准形亦称为矩阵的行最简形，且在初等行变换下具有唯一性。

定理 1 设 A 和 B 均为 $m\times n$ 矩阵，则下列命题等价：

(1) A 和 B 具有相同的行最简形；

(2) 存在 m 阶可逆矩阵 P，使得 $B=PA$；

(3) $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$，且 $A\vec{x}=0$ 的解均为 $B\vec{x}=0$ 的解；

(4) 齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 与 $B\vec{x}=0$ 同解；

(5) A 和的行向量组等价；

(6) 存在 m 阶矩阵 U 和 V，使得 $A=UB$ 和 $B=VA$。

证明：(1) $\Rightarrow$ (2)。由于 A 和 B 具有相同的行最简形，故矩阵 A 可经有限次初等行变换化为矩阵 B，即 A 与 B 行等价。根据初等变换与初等矩阵的关系，存在可逆矩阵 P，使得 $B=PA$。

(2) $\Rightarrow$ (3)。由于 $B=PA$ 和 P 均为可逆矩阵，故 A 的秩 $\mathrm{rank}(A)$ 等于 B 的秩 $\mathrm{rank}(B)$。对于齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 的任意解 $\vec{\xi}$，有 $B\vec{\xi}=PA\vec{\xi}=0$，因此 $\vec{\xi}$ 也是齐次线性方程组 $B\vec{x}=0$ 的解，从而 $A\vec{x}=0$ 的解均为 $B\vec{x}=0$ 的解。

(3) $\Rightarrow$ (4)。由于 n 元齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 的解均为 $B\vec{x}=0$ 的解，故 $A\vec{x}=0$ 的基础解系均包含于 $B\vec{x}=0$ 的解空间中。由于 $A\vec{x}=0$ 的基础解系所含向量个数 $n-\mathrm{rank}(A)$ 等于 $B\vec{x}=0$ 的基础解系所含向量个数 $n-\mathrm{rank}(B)$，因此 $A\vec{x}=0$ 的基础解系也是 $B\vec{x}=0$ 的基础解系，由此可得 $A\vec{x}=0$ 与 $B\vec{x}=0$ 同解。

(4) $\Rightarrow$ (5)。由于 n 元齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 与 $B\vec{x}=0$ 同解，故 n 元齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\vec{x}=0$ 同解。同解的齐次线性方程组的解空间相同，因此有相同的基，该基是相应齐次线性方程组的基础解系，从而 $A\vec{x}=0$ 的基础解系所含向量个数 $n-\mathrm{rank}(A)$ 等于 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\vec{x}=0$ 的基础解系所含向量个数 $n-\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$。由此可得 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$，这意味着 A 的行向量组的极大线性无关组也是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 的极大线性无关组，故 B 的行向量组可由 A 的行向量组线性表示。因为 $B\vec{x}=0$ 与 $\begin{pmatrix}B\\A\end{pmatrix}\vec{x}=0$ 同解，所以同理可得 A 的行向量组可由 B 的行向量组线性表示。因此， A 和 B 的行向量组等价。

(5) $\Rightarrow$ (6)。将矩阵 A 和 B 按行分块为：

$$A=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_1\\ \vdots\\ \vec{\alpha}_m\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\vec{\beta}_1\\ \vdots\\ \vec{\beta}_m\end{pmatrix} \tag{1}$$

由于 A 和 B 的行向量组等价，故 A 的行向量组 $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m$ 可由 B 的行向量组 $\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_m$ 线性表示，即存在 $u_{ij},i,j=1,2,\cdots,m$，使得

$$\vec{\alpha}_i=u_{i1}\vec{\beta}_1+\cdots+u_{im}\vec{\beta}_m,i=1,2,\cdots,m \tag{2}$$

由(2)式可得 $A=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_1\\ \vdots\\ \vec{\alpha}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{11} & \cdots & u_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ u_{m1} & \cdots & u_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\beta}_1\\ \vdots\\ \vec{\beta}_m\end{pmatrix}$，取 $U=\left(u_{ij}\right)$ 即可。

同理，存在 m 阶矩阵 V，使得 $B=VA$。

(6)$\Rightarrow$(1)。由于存在 m 阶矩阵 U 和 V，使得 $A=UB$ 和 $B=VA$，因此 A 与 B 具有相同的秩 r，且 A 与 B 的行向量组可相互线性表示，即 A 与 B 的行向量组等价。设

$$\left(\vec{\zeta}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\vec{\zeta}_r^{\mathrm{T}},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}\text{和}\left(\vec{\xi}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\vec{\xi}_r^{\mathrm{T}},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}$$

分别为矩阵 A 和 B 的行最简形。从而 A 的行向量组与 $\vec{\zeta}_1,\cdots,\vec{\zeta}_r$ 等价，B 的行向量组与 $\vec{\xi}_1,\cdots,\vec{\xi}_r$ 等价。由此可知 $\vec{\zeta}_1,\cdots,\vec{\zeta}_r$ 与 $\vec{\xi}_1,\cdots,\vec{\xi}_r$ 等价，故存在 r 阶可逆矩阵 Q，使得 $\left(\vec{\zeta}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\vec{\zeta}_r^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=Q\left(\vec{\xi}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\vec{\xi}_r^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$，则

$$\left(\vec{\zeta}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\vec{\zeta}_r^{\mathrm{T}},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}Q & O\\ O & E_{m-r}\end{pmatrix}\left(\vec{\xi}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\vec{\xi}_r^{\mathrm{T}},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

即 $\left(\vec{\zeta}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\vec{\zeta}_r^{\mathrm{T}},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}$ 可经初等行变换化为 $\left(\vec{\xi}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\vec{\xi}_r^{\mathrm{T}},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}$。根据行最简形的唯一性，可得 $\left(\vec{\zeta}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\vec{\zeta}_r^{\mathrm{T}},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}=\left(\vec{\xi}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\vec{\xi}_r^{\mathrm{T}},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}$。

3. 应用

由定理 1 可知，同型矩阵的行最简形决定了矩阵的秩、线性方程组的同解性、矩阵的行等价关系以及矩阵乘法关系等。借助定理 1，可解决矩阵秩的关系及线性变换的构造等问题。以下通过实例展示定理 1 在这些方面的应用。

例 1 设 A 是 n 阶矩阵，证明：A^n 与 A^{n+1} 具有相同的行最简形。

证明：若 A 是可逆矩阵，则 A^n 与 A^{n+1} 均为可逆矩阵，故它们的行最简形均为 n 阶单位矩阵。

假设 A 是不可逆矩阵，考虑如下矩阵秩的序列：

$$n>\operatorname{rank}(A)\geq\operatorname{rank}\left(A^2\right)\geq\cdots\geq\operatorname{rank}\left(A^n\right)\geq\operatorname{rank}\left(A^{n+1}\right) \tag{4}$$

若序列(4)中 $\operatorname{rank}\left(A^n\right)$ 之前均为严格小于号，则 $\operatorname{rank}\left(A^n\right)=0$，从而 $A^n=0=A^{n+1}$。此时结论成立。若序列(4)中 $\operatorname{rank}\left(A^n\right)$ 之前存在等号，则设存在小于 n 的自然数 k，使得

$$\operatorname{rank}\left(A^k\right)=\operatorname{rank}\left(A^{k+1}\right) \tag{5}$$

显然，齐次线性方程组 $A^k\vec{x}=0$ 的解均为 $A^{k+1}\vec{x}=0$ 的解。由定理 1 可知，$A^k\vec{x}=0$ 与 $A^{k+1}\vec{x}=0$ 同解。显然，齐次线性方程组 $A^n\vec{x}=0$ 的解均为 $A^{n+1}\vec{x}=0$ 的解。对于 $A^{n+1}\vec{x}=0$ 的任意解 $\vec{\alpha}$，有 $A^{n+1}\vec{\alpha}=0$，从而向量 $A^{n-k}\vec{\alpha}$ 是 $A^{k+1}\vec{x}=0$ 的解，因此 $A^{n-k}\vec{\alpha}$ 也是 $A^k\vec{x}=0$ 的解，即 $A^n\vec{\alpha}=0$。由此可得，齐次线性方程组 $A^n\vec{x}=0$ 与 $A^{n+1}\vec{x}=0$ 同解。由定理 1 可知，A^n 与 A^{n+1} 具有相同的行最简形。

例 2 设 A 和 B 均为 n 阶矩阵，且 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)$，证明：对于任意正整数 m，均有 $\mathrm{rank}(AB^m)=\mathrm{rank}(B^m)$。

证明：显然，齐次线性方程组 $B\vec{x}=0$ 的解均为 $AB\vec{x}=0$ 的解。又因 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)$，由定理 1 可知，$AB\vec{x}=0$ 与 $B\vec{x}=0$ 同解。注意到 $B^m\vec{x}=0$ 的解均为 $AB^m\vec{x}=0$ 的解。设 $\vec{\xi}$ 是 $AB^m\vec{x}=0$ 的任意解，则 $0=AB^m\vec{\xi}=AB\left(B^{m-1}\vec{\xi}\right)$，即 $B^{m-1}\vec{\xi}$ 是 $AB\vec{x}=0$ 的解，从而 $B^{m-1}\vec{\xi}$ 也是 $B\vec{x}=0$ 的解，即 $B^m\vec{\xi}=0$。由此可得，$AB^m\vec{x}=0$ 与 $B^m\vec{x}=0$ 同解。由定理 1 可知，$\mathrm{rank}(AB^m)=\mathrm{rank}(B^m)$。

例 3 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，且 $\mathrm{rank}(\mathscr{A})=\mathrm{rank}(\mathscr{A}^2)$，则存在线性变换 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$，使得 $\mathscr{B}\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$，$\mathscr{C}\mathscr{A}=\mathscr{A}^2$。

证明：设 $\vec{\varepsilon}_1,\ldots,\vec{\varepsilon}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，$\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为 A。因 $\mathrm{rank}(\mathscr{A})=\mathrm{rank}(\mathscr{A}^2)$，故 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^2)$。显然，齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$ 的解均为 $A^2\vec{x}=0$ 的解。由定理 1 可知，存在 n 阶矩阵 B 和 C，使得 $BA^2=A$ 和 $CA=A^2$。从而存在线性变换 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 满足

$$\mathscr{B}(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)B,\ \mathscr{C}(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)C \tag{6}$$

使得 $\mathscr{B}\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$，$\mathscr{C}\mathscr{A}=\mathscr{A}^2$。

例 4 设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是 n 维线性空间 V 上的两个线性变换。证明：$\mathrm{Ker}\mathscr{A}\subseteq\mathrm{Ker}\mathscr{B}$ 当且仅当存在线性变换 $\mathscr{C}$，使得 $\mathscr{B}=\mathscr{C}\mathscr{A}$。

证明：(充分性)假设存在线性变换 $\mathscr{C}$，使得 $\mathscr{B}=\mathscr{C}\mathscr{A}$。对于任意 $\vec{\alpha}\in\mathrm{Ker}\mathscr{A}$，有 $\mathscr{B}\vec{\alpha}=\mathscr{C}\mathscr{A}\vec{\alpha}=0$，因此 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}\subseteq\mathrm{Ker}\mathscr{B}$。

(必要性)设 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 在该基下的矩阵分别为 A 和 B。由 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}\subseteq\mathrm{Ker}\mathscr{B}$ 可知，$A\vec{x}=0$ 的解均为 $B\vec{x}=0$ 的解。由此可得，齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}A\\O\end{pmatrix}_{2n\times n}\vec{x}=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}_{2n\times n}\vec{x}=0$ 同解。根据定理 1，存在 $2n$ 阶可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{21}&P_{22}\end{pmatrix}$，使得

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}_{2n\times n}=P\begin{pmatrix}A\\O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{21}&P_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{11}A\\P_{21}A\end{pmatrix} \tag{7}$$

其中 P_{ij} 均为 n 阶方阵，$i,j=1,2$。因此 $B=P_{21}A$，从而存在线性变换 $\mathscr{C}$ 满足

$$\mathscr{C}(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)P_{21} \tag{8}$$

使得 $\mathscr{B}=\mathscr{C}\mathscr{A}$。

例 5 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的一个线性变换。证明：存在 V 上的线性变换 $\mathscr{B}$，使得 $\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{O}$，且 $\dim(\mathrm{Im}\mathscr{A})+\dim(\mathrm{Im}\mathscr{B})=n$。

证明：设 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n$ 为 n 维线性空间 V 的一组基，$\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为 A。设 A 的行阶梯形矩阵为 $\begin{pmatrix}B_{r\times n}\\O_{(n-r)\times n}\end{pmatrix}$，其中 r 为 A 的秩。由定理 1 可知，存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $PA=\begin{pmatrix}C_{r\times n}\\O_{(n-r)\times n}\end{pmatrix}$。令 $Q=\left(O_{n\times r},D_{n\times(n-r)}\right)$，其中 $D_{n\times(n-r)}=\begin{pmatrix}E_{n-r}\\O\end{pmatrix}$。取 $B=QP$，则 $\mathrm{rank}(B)=n-r$，且

$$BA=QPA=(O,D)\begin{pmatrix}C\\O\end{pmatrix}=O \tag{9}$$

显然，存在V上的线性变换$\mathscr{B}$满足$\mathscr{B}(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_n)B$及$\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{O}$，并且

$$\dim(\mathrm{Im}\,\mathscr{A})+\dim(\mathrm{Im}\,\mathscr{B})=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)=r+n-r=n. \tag{10}$$

上述例子主要体现在矩阵的行等价在具体解题中的应用，其实在一些实际问题中也有许多应用，下面我们考虑矩阵行等价在编码理论中的应用。

在数字通信中，为了对抗传输过程中的噪声干扰，需要对原始信息进行信道编码——即在信息位后附加冗余的校验位，形成更长的码字。线性分组码是最基础的一类纠错码，其编码过程可以用一个生成矩阵G来描述。设信息向量为$\vec{v}$，长度是k，码字$\vec{w}$，长度是n，则编码过程为：$\vec{w}=\vec{v}\cdot G\pmod 2$，其中$G$是一个$k\times n$矩阵，其行向量构成码空间的一组基。

对于(n,k)汉明码的生成矩阵为非系统码矩阵，可以对汉明码的生成矩阵进行初等行变换和列置换，那么生成等价的码。因此只需对非系统码矩阵进行初等行变换化成行最简形，那么行最简形中靠阶梯的列都是k维单位向量，把这些k维单位向量进行列调整后，行最简形变为前k列就是k阶单位矩阵，此时的生成矩阵就是系统码，方便译码。

4. 结束语

矩阵初等行变换是线性代数中最为基础且核心的运算工具，在线性方程组求解、矩阵性质分析等核心问题中有着极为广泛的应用。借助初等行变换对系数矩阵与增广矩阵进行化简，能够通过二者秩的对应关系精准判定线性方程组的解态，区分无解、唯一解与无穷多解等不同情况，同时该分析方法可有效推广至矩阵方程组的解结构讨论中。在矩阵理论体系中，矩阵行等价、线性方程组同解性与矩阵行向量组等价性三者存在紧密的内在关联，是刻画矩阵本质特征的重要依托。因此，系统归纳梳理各类等价概念的内在联系与表达形式，能够从多维度完整刻画矩阵行等价的核心性质，不仅完善了矩阵等价相关理论体系，也为线性方程组求解、矩阵秩判定、线性变换构造等问题提供了规范的理论依据与求解方法。后续可继续探究矩阵行等价的延伸性质，进一步丰富其在线性代数理论中的应用场景。

基金项目

2025 年度河南省高等学校重点科研项目(25A110006)，河南工业大学数智筑基大学数学教学创新团队项目。

参考文献

[1] 孙晓霞. 论等价关系在线性代数学习中的重要性[J]. 教育教学论坛, 2016(5): 172-173.
[2] 李斐, 郭卉. 线性代数中的几个等价关系[J]. 课程教育研究, 2013(22): 144.
[3] 金晶. 基于三种等价关系的矩阵分类[J]. 汉口学院学报, 2013(3): 68-70.
[4] 蔡鸣晶. 矩阵的三个等价关系辨析[J]. 考试周刊, 2014(68): 62.
[5] 张姗梅, 刘耀军. 矩阵标准形的应用[J]. 忻州师范学院学报, 2016, 32(2): 8-12.
[6] 黄述亮. 矩阵的三种等价关系及其分类[J]. 武夷学院学报, 2018, 37(3): 7-9.
[7] 杨琳. 浅谈线性代数中几类等价关系[J]. 当代教育实践与教学研究, 2019(7): 59-60.
[8] 张丽娟. 等价关系在代数教学中的简化作用[J]. 教育教学论坛, 2020(15): 281-283.
[9] 尹小艳, 杨丹丹. 矩阵的几种关系浅析[J]. 高等数学研究, 2020, 23(4): 61-64.
[10] 安晓虹. 工科线性代数中的几种变换[J]. 高等数学研究, 2021, 24(6): 19-22.
[11] 同济大学数学科学学院. 工程数学线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.
[12] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 王萼芳, 石生明, 王立中, 修订. 北京: 高等教育出版社, 2025.