Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(10), 226-236
Published Online October 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1610227

Hans汉斯

18*pq*阶5度对称图的分类

何古落*，凌　波

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明

收稿日期：2026年9月16日；录用日期：2026年10月19日；发布日期：2026年10月30日

摘　要

若一个图的自同构群在其弧集上是传递作用的，则称该图为对称图。本文运用群论方法，对所有可容许素数对(p,q)，完成了阶为$18pq$的连通五度对称图的分类。确定了这类图的自同构群均为特定的有限几乎单群，拓展了复合阶五度对称图已有的分类结果。

关键词

对称图，自同构群，正规商图

A Classification of Pentavalent Symmetric Graphs on 18*pq* Vertices

Guluo He*, Bo Ling

School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: September 16, 2026; accepted: October 19, 2026; published: October 30, 2026

Abstract

A graph is symmetric if its automorphism group acts transitively on its arcs. Using group-theoretic methods, we classify all connected pentavalent symmetric graphs of order $18pq$ for each admissible pair (p,q). The automorphism groups are determined as specific finite almost simple groups, extending known classifications of pentavalent symmetric graphs with composite orders.

Keywords

Symmetric Graph, Automorphism Group, Normal Quotient

*通讯作者。

文章引用: 何古落, 凌波. 18*pq* 阶 5 度对称图的分类[J]. 理论数学, 2026, 16(10): 226-236.
DOI: 10.12677/pm.2026.1610227

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

对称图的研究可追溯至 Tutte 关于 3 度图的开创性工作[1] [2]。长期以来，特定阶对称图的分类问题成为该领域的核心研究方向，阶为 $p,2p,3p$ 以及 pq [3]-[6]的对称图已得到完整的分类结果。Li 进一步刻画了奇数阶的传递图[7]。

近几十年来，带度数限制的图分类问题受到广泛关注。Conder 与 Dobcsányi [8]完成了顶点数不超过 768 的 3 度对称图的分类工作。对于 4 度情形，周和冯[9]分类了阶为 $2pq$ 的 1-正则图。周与冯[10]得到了若干 5 度对称图族的重要基础结论，学者们相继完成阶为 $12p,8p,24p,30p,2pq,4pq,18p$ [11]-[17]的 5 度对称图的分类研究。此外，无平方因子阶的五度 $1-$ 正则图与弧传递图已被完全分类[18] [19]，近期 Meymandi 等人完成阶为 $8pq$ 的五度对称图的分类工作[20]。

本文所讨论的图均为有限、简单、连通无向图。对于图 Γ，记 $V\Gamma$， $E\Gamma$， $A\Gamma$ 和 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 分别为其顶点集、边集、弧集和全自同构群。设 G 是集合 Ω 上的置换群，对 $\alpha\in\Omega$，点稳定子 G_α 是 G 中固定点 α 的子群。若对任意 $\alpha\in\Omega$ 均有 $G_\alpha=1$，则称 G 在 Ω 上半正则；若 G 在 Ω 上既传递又半正则，则称 G 在 Ω 上正则。图 Γ 中的一条 s-弧是顶点构成的有序 $(s+1)$-元组 $(v_0,v_1,\cdots,v_s)$，满足：对 $1\le i\le s$， v_{i-1} 与 v_i 相邻，且对 $1\le i\le s-1$，$v_{i-1}\ne v_{i+1}$。设 $G\le\mathrm{Aut}\Gamma$，若 G 在 Γ 的全体 s-弧集合上传递(相应地，正则)，则称图 Γ 为 (G,s)-弧传递图(相应地，(G,s)-弧正则图)。若 G 在所有 s-弧上传递，但不在 $(s+1)$-弧上传递，则称 Γ 是 (G,s)-传递图。当 $G=\mathrm{Aut}\Gamma$ 时，我们简称为 Γ 是 s-弧传递、 s-弧正则或 s-传递图。

阶为 $18p$ 与 $8pq$ 的五度对称图已得到完全分类，而阶为 $18pq$，且 $p>q\ge5$， p,q 为互异素数的情形尚未解决。本文对现有研究成果进行补充与完善，研究工作基于有限单群分类定理、有限群结构理论[21] [22]，并借助代数系统 GAP [23]与 Magma [24]开展辅助计算。本文限定素数满足条件 $p>q\ge5$。当 $q<5$，即素数取 2 或 3 时， $18pq$ 的算术结构发生改变，点稳定子的阶约束、候选有限单群集合均会显著变化，构成独立的分类问题，不在本文讨论范围之内。另外，本文所采用的“正规商约化 + 有限单群分类”研究思路，若直接迁移到其他阶、其他度数的对称图分类问题时，将会面临点稳定子结构更加复杂、候选单群数量大幅增加等困难。下面给出本文的主要定理。

定理 1 设 (p,q) 为互异素数，满足 $p>q\ge5$， Γ 是阶为 $18pq$ 的连通五度弧传递图，则 (p,q) 只能取 $(109,11),(179,89),(269,67),(359,179)$ 或者 $(719,359)$。进一步，设 $G=\mathrm{Aut}\Gamma$，图 Γ、自同构群 G 及其点稳定子 G_α，其中 $\alpha\in V\Gamma$ 的全部信息见表 1。下表汇总本文得到全部连通五度对称图，包含图同构类、对应的自同构群、点稳定子 G_α 与素数参数约束，该表格将用于后文几乎单群情形的全部结论汇总。

Table 1. Pentavalent symmetric graphs of order $18pq$
表 1. 阶为 $18pq$ 的 5 度对称

Γ	G	(p,q)	G_α
$\mathcal{C}_{21582}$	$\mathrm{PGL}(2,109)$	$(109,11)$	A_5
$\mathcal{C}_{324414}$	$\mathrm{PGL}(2,269)$	$(269,67)$	A_5
$\mathcal{C}^i_{286758}$	$\mathrm{PSL}(2,179)$	$(179,89),i\le85$	D_{10}

续表

$\mathcal{C}_{286758}^{i}$	$\mathrm{PGL}(2,179)$	$(179,89), i \le 136$	D_{20}
$\mathcal{C}_{1156698}^{i}$	$\mathrm{PSL}(2,359)$	$(359,179), i \le 3$	D_{20}
$\mathcal{C}_{4646178}^{i}$	$\mathrm{PSL}(2,719)$	$(719,359), i \le 4$	D_{20}

2. 预备结果

下面整理若干关键基础结论，为后续证明做准备。对素数r，我们需要用到$\mathrm{PSL}(2,r)$与$\mathrm{PGL}(2,r)$的极大子群分类，该分类结果参见文献[21] [25]。

引理 2.1 设$q \ge 5$为素数，$G = \mathrm{PSL}(2,q)$或$G = \mathrm{PGL}(2,q)$。若H是G的极大子群，则：

(1) 当$G = \mathrm{PSL}(2,q)$时，$H \cong D_{q-1}$，D_{q+1}，$\mathbb{Z}_q : \mathbb{Z}_{(q-1)/2}$，$A_4$，$S_4$或$A_5$；

(2) 当$G = \mathrm{PGL}(2,q)$时，$H \cong D_{2(q-1)}$，$H \cong D_{2(q+1)}$，$\mathbb{Z}_q : \mathbb{Z}_{q-1}$，$S_4$或$\mathrm{PSL}(2,q)$。

下一引理给出连通五度对称图点稳定子的全部可能结构(参见文献[10] [26])。

引理 2.2 设图Γ为五度图，$G \le \mathrm{Aut}\Gamma$，G在Γ上(G,s)-传递，且$s \ge 1$。对顶点$\alpha \in V\Gamma$，下述情形有且仅有一种成立：

(1) 若点稳定子G_α可解，则$s \le 3$，且$|G_\alpha| \mid 80$，点稳定子的全部可能结构如表 2 所示。下表列出五度弧传递图可解点稳定子G_α的全部可行结构，来自文献已有分类结果，将在分情形讨论中反复引用。

Table 2. Structures of soluble vertex-stabilizers
表 2. 可解情况

s	G_α	$\lvert G_\alpha \rvert$
1	$\mathbb{Z}_5, D_{10}, D_{20}$	$5, 2\cdot 5, 2^2\cdot 5$
2	$F_{20}, F_{20}\times\mathbb{Z}_2$	$2^2\cdot 5, 2^3\cdot 5$
3	$F_{20}\times\mathbb{Z}_4$	$2^4\cdot 5$

(2) 若点稳定子G_α不可解，则$2 \le s \le 5$，且$|G_\alpha| \mid 2^9\cdot 3^2\cdot 5$；点稳定子的全部可能结构如表 3 所示。下表给出不可解情形下点稳定子G_α的所有候选群结构，是判定候选自同构群是否可行的重要依据。

Table 3. Structures of insoluble vertex-stabilizers
表 3. 不可解情况

s	G_α	$\lvert G_\alpha \rvert$
2	A_5, S_5	$2^2\cdot 3\cdot 5, 2^3\cdot 3\cdot 5$
3	$A_4\times A_5, (A_4\times A_5):Z_2, S_4\times S_5$	$2^4\cdot 3^2\cdot 5, 2^5\cdot 3^2\cdot 5, 2^6\cdot 3^2\cdot 5,$
4	$\mathrm{ASL}(2,4), \mathrm{AGL}(2,4), \mathrm{A\Sigma L}(2,4), \mathrm{A\Gamma L}(2,4)$	$2^6\cdot 3\cdot 5, 2^7\cdot 3\cdot 5, 2^6\cdot 3^2\cdot 5, 2^7\cdot 3^2\cdot 5$
5	$Z_2^6 : \Gamma\mathrm{L}(2,4)$	$2^9\cdot 3^2\cdot 5$

分析点传递图的一种有效手段是利用正规子群构造商图。设Γ是G-点传递图，满足$G \le \mathrm{Aut}\Gamma$。设

$N \lhd G$ 是 G 的正规子群，且 N 在顶点集 $V\Gamma$ 上的轨道非平凡。商图 Γ_N 按如下方式定义：将 N 的全体轨道作为 Γ_N 的顶点；对两条轨道 B 与 C 在 Γ_N 中相邻当且仅当存在 $u \in B$，$v \in C$，使得 (u,v) 在原图 Γ 中相邻。特别地，若 $\mathrm{val}(\Gamma) = \mathrm{val}(\Gamma_N)$，则称 Γ 为 Γ_N 的正规覆盖。

若对任意顶点 $\alpha \in V\Gamma$，点稳定子 G_α 在 α 的邻域 $\Gamma(\alpha)$ 上的作用为本原作用，则称图 Γ 是 G-局部本原图。弧传递五度图自动满足该条件，也是本文主要研究对象。

下面的约化结论是本文分类工作的重要基础，该结论的思想来源于文献[27] [28]。

引理 2.3 设图 Γ 的自同构群包含点传递且局部本原的子群 G。若 G 的正规子群 N 在顶点集 $V\Gamma$ 上至少有 3 条不同轨道，则下述结论成立：

(1) N 在 $V\Gamma$ 上半正则 G/N 可以嵌入到 $\mathrm{Aut}\Gamma_N$，且 Γ 是 Γ_N 的正规覆盖；

(2) 取商之后点稳定子保持同构：即任取 $\alpha \in V\Gamma$，记 Γ 为 α 所在的 N-轨道 $\gamma \in V\Gamma_N$，有 $G_\alpha \cong (G/N)_\gamma$；

(3) 对 $1 \le s \le 5$ 或 $s = 7$，Γ 为 (G,S)-传递图当且仅当 Γ_N 为 $(G/N,s)$-传递图。

若对任意顶点 $\alpha \in V\Gamma$，点稳定子 G_α 在 α 的邻域 $\Gamma(\alpha)$ 上的作用为本原作用，则称图 Γ 是 G-局部本原图。弧传递五度图自动满足该条件，也是本文主要研究对象。

下面的约化结论是本文分类工作的重要基础，该结论的思想来源于文献[29]。

为构造五度对称图，需要陪集图概念。设 G 为有限群，$H \le G$ 为其子群，D 是 G 中若干个 H-双陪集构成的集合。陪集图 $\mathrm{Cos}(G,H,D)$ 定义如下：顶点集为 G 关于 H 的全体右陪集 $[G:H]$；边集为 $\{\{Hg,Hdg\} \mid g \in G, d \in D\}$。该图的度数为 $|D|/|H|$；图连通当且仅当 D 生成群 G。若 $D = D^{-1} = \{d^{-1} \mid d \in D\}$，则陪集图是无向图。另外，对任意 $\alpha \in \mathrm{Aut}G$，有同构 $\mathrm{Cos}(G,H,D) \cong \mathrm{Cos}(G,H^\alpha,D^\alpha)$ (参见文献[11])。

引理 2.4 设图 Γ 具有点传递自同构子群 $G \le \mathrm{Aut}\Gamma$，则 $\Gamma \cong \mathrm{Cos}(G,H,D)$，其中 $H = G_\alpha$ 是顶点 $\alpha \in V\Gamma$ 的点稳定子，D 由 G 中所有将 α 映到其邻点的元素构成。进一步有：

(1) Γ 连通当且仅当 D 生成群 G；

(2) Γ 是 G-弧传递图当且仅当 D 是单个双陪集；若存在元素 $g \in G$ 交换 α 与其某个邻点，则 $g^2 \in H$ 且 $D = HgH$；

(3) Γ 的度数等于 $|D|/|H|$，也等于指数 $|H : H \cap H^g|$。

由文献[18]，可以得到阶为 $18p$ 的五度对称图的全部结果。

引理 2.5 设 p 为素数，则每一个阶为 $18p$ 的五度对称图均同构于表 4 中的某一个图。

Table 4. Pentavalent symmetric graphs of order $18p$
表 4. 阶为 $18p$ 的五度对称图

Γ	$\mathrm{Aut}\Gamma$	条件
O_4	S_9	$p = 7$
$\mathcal{C}_{342}^1$	$\mathrm{PSL}(2,19)$	$p = 19$
$\mathcal{C}_{342}^2$	$\mathrm{PGL}(2,19)$	$p = 19$

结合文献[14]并做简单计算，得到下面引理。

引理 2.6 设 $p > q \ge 5$ 为互异素数，若 Γ 是阶为 $6pq$ 的五度对称图，则 Γ 必为表 5 中所列图之一。

Table 5. Pentavalent symmetric graphs of order $6pq$
表 5. 阶为 $6pq$ 的五度对称图

Γ	AutΓ	(p,q)
$\mathcal{C}_{390}$	$\mathrm{PSL}(2,25)$	$(13,5)$
$CD_{6pq,s}$	$D_{6pq,s}:Z_5$	$5\mid(p-1),5\mid(q-1)$
$\mathcal{C}_{1218}^{2}$	$\mathrm{PGL}(2,29)$	$(29,7)$
$\mathcal{C}_{1218}^{i}$	$\mathrm{PGL}(2,29)$	$(29,7),i=2,3$
$\mathcal{C}_{1722}^{1}$	$\mathrm{PSL}(2,41)$	$(41,7)$
$\mathcal{C}_{2982}^{1}$	$\mathrm{PSL}(2,71)$	$(71,7)$
$\mathcal{C}_{5874}$	$\mathrm{PSL}(2,89)$	$(89,11)$
$\mathcal{C}_{10266}^{1}$	$\mathrm{PGL}(2,59)$	$(59,29)$
$\mathcal{C}_{10266}^{i}$	$\mathrm{PSL}(2,59)$	$(59,29),2\le i\le 7$
$\mathcal{C}_{11346}^{1}$	$\mathrm{PGL}(2,61)$	$(61,31)$
$\mathcal{C}_{11346}^{i}$	$\mathrm{PSL}(2,61)$	$(61,31),2\le i\le 7$

为完整起见，引用文献[30]给出的阶为 $2pq$ 的五度对称图分类。

引理 2.7 设 (p,q) 为互异素数且 $(q\ge 5)$，Γ 是阶为 $2pq$ 的五度对称图，则 Γ 同构于表 6 中某个图。

Table 6. Pentavalent symmetric graphs of order $2pq$
表 6. 阶为 $2pq$ 的五度对称图

Γ	AutΓ	条件
O_4	S_9	$p=7$
$\mathcal{C}_{342}^{1}$	$\mathrm{PSL}(2,19)$	$p=19$
$\mathcal{C}_{342}^{2}$	$\mathrm{PGL}(2,19)$	$p=19$

3. 主要结果

从本节直至论文末尾[31]，始终假定 Γ 是阶为 $18pq$ 的五度对称图，其中素数满足 $p>q\ge 5$，记 $A=\mathrm{Aut}\Gamma$。由引理 2.2，$|A_\alpha|\mid 2^9\cdot 3^2\cdot 5$，于是 $|A|=2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot p\cdot q$。设 R 为群 A 的可解根基。证明分下面两种情形展开。

情形 1：假设 A 的可解根基平凡，即 $R=1$。

本情形由下面三条引理完成分析。

引理 3.1 若 $R=1$，则 A 是几乎单群。此时，A 的基座 Γ 在顶点集 $V\Gamma$ 上至多有两条轨道，并且 $5\mid|T_\alpha|$。

证明：设 N 为群 A 的极小正规子群，则必存在整数 $d\ge 1$，使得 $N\cong T^d$，这里 T 代表一个非交换单群。倘若 N 作用在顶点集 $V\Gamma$ 上是半正则的，那么 $18pq\mid|N|$。鉴于 T 属于不可解群，可推出 $|T|=18pq$，然而阶取该形式的群一定可解，由此导出矛盾。所以 N 在 $V\Gamma$ 上的作用不满足半正则条件。根据引理 2.3，

集合$V\Gamma$最多可拆分为两条N-轨道，由此可知$9pq\mid\left|N\right|$整除。同时Γ是连通图，且N是A非平凡正规子群，那么$N^{\Gamma(\alpha)}$就是$A^{\Gamma(\alpha)}$的非平凡正规子群。据此能够得到$5\mid\left|N_\alpha\right|$，进一步推出$45pq\mid\left|N\right|$。已知$p>5$，因此素数$p\mid\left|N\right|$。又$\left|A\right|$是$2^{10}\cdot3^4\cdot5\cdot p\cdot q$的因子，故$p^2$不能整除$\left|N\right|$，于是$d=1$。这就说明$A$是几乎单群，其极小正规子群$N=T$为非交换单群。

引理 3.2 令T为非交换单群，若T满足$5\cdot3^2\cdot p\cdot q\mid\left|T\right|$且$\left|T\right|\mid2^{10}\cdot3^4\cdot5\cdot p\cdot q$，则所有满足该约束条件的群全部罗列在表 7 之中。下表列出满足阶条件的全部非交换单群候选集合，由 Atlas 与 Magma 筛选得到，作为几乎单群情形讨论基础。

Table 7. Non-abelian simple groups satisfying the conditions $\{2,3,5,p,q\}$

表 7. 非交换单$\{2,3,5,p,q\}$-群

T	阶分解	(p,q)
A_{10}	$2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$	$(7,5)$
J_2	$2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot7$	$(7,5)$
M_{22}	$2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11$	$(11,7)$
$\mathrm{PSL}\left(2,2^6\right)$	$2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot13$	$(13,7)$
$\mathrm{PSp}\left(4,2^2\right)$	$2^8\cdot3^2\cdot5^2\cdot17$	$(17,5)$
$\mathrm{PSL}(2,r)$	$r\left(r^2-1\right)/2, r\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,5)$	--

对于交错群A_n，只有A_{10}满足阶的约束条件。对于散在单群，仅J_2与M_{22}符合条件。设T为定义在有限域$\mathrm{GF}\left(p^f\right)$上的李型单群。则$F_4(q)$，$E_6(q)$，$E_7(q)$，$E_8$以及扭型群${}^2E_6(q)$均可排除，它们的阶均含有因子$q^{11}$，与题设矛盾。若$T=G_2(q)$，则$q^6\mid\left|T\right|$，仅$G_2(2)$有可能，但$5\nmid\left|G_2(2)\right|$。对于铃木群${}^2B_2(q)$，其中 $q=2^{2m+1}\geq8$，虽然${}^2B_2(8),B_2(32)$满足$q^2\mid\left|T\right|$，但二者阶均不含因子 9。对于${}^3D_4(q)$，条件$q^2\mid\left|T\right|$与阶上界冲突。考察 Ree 群${}^2G_2(q)$，其中$q=3^{2m+1}\geq27$，此时$q^3\mid\left|T\right|$，同样超出阶的限制。对于扭群${}^2F_4(q)$，$q=2^{2m+1}\geq8$，则有$2^{36}\mid\left|T\right|$，矛盾。因此T不属于例外李型群，余下只需考虑典型李型单群。借助《群 Atlas》以及 Magma 软件核验，得到表 7 中的全部群。

引理 3.3 设A为几乎单群，则Γ同构于表 1 中的某个图。

证明：记对应群的基座为$\mathrm{Soc}(A)$。因A是几乎单群，故存在非交换有限单群T满足。由$\left|T\right|\mid\left|A\right|\mid2^{10}\cdot3^4\cdot5\cdot p\cdot q$，可得$\left|T\right|\mid2^{10}\cdot3^4\cdot5\cdot p\cdot q$。根据引理 3.1，$T$在顶点集$V\Gamma$上至多含两条轨道，因此$9pq\mid\left|T\right|$。结合$5\mid\left|T_\alpha\right|$可知$5\mid\left|T\right|$，从而$45pq\mid\left|T\right|$。依据引理 3.2，$T$只能为表 7 所列的候选单群。下面对各候选群逐一进行讨论。

设$T\cong A_{10},J_2,M_{22},\mathrm{PSL}\left(2,2^6\right)$或$\mathrm{PSp}\left(4,2^2\right)$。查阅《群 Atlas》[30]，对应的外自同构群依次为$\mathrm{Out}(T)=\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_6,\mathbb{Z}_4$，于是$A\cong T.O$，其中$O\leq\mathrm{Out}(T)$。由文献[26]，上述各群的阶分别为$2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$，$2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot7$，$2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11$，$2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot13$，$2^8\cdot3^2\cdot5^2\cdot17$。又$\left|A\right|=\left|T\right|\cdot m$，其中$m=\left|O\right|$，且$18pq=\left|A:A_\alpha\right|$以及$5\mid\left|A_\alpha\right|$，据此可算出各点稳定子$\alpha$的阶。若$T\cong A_{10},J_2,M_{22}$，则$\left|A_\alpha\right|=\dfrac{\left|A\right|}{18pq}=2^6\cdot3^2\cdot5$，$2^7\cdot3^2\cdot5$，$2^6\cdot3\cdot5$，$2^7\cdot3\cdot5$，$2^6\cdot5$，$2^7\cdot5$；若$T\cong\mathrm{PSL}\left(2,2^6\right)$或$\mathrm{PSp}\left(4,2^2\right)$，则$\left|A_\alpha\right|=\dfrac{\left|A\right|}{18pq}=\dfrac{\left|T\right|\cdot m}{18pq}=2^5\cdot5\cdot m$

或$2^7\cdot 5\cdot m$。对照引理 2.2，上述所有点稳定子的阶均不满足相应条件，从而导出矛盾，故此类情形不可能出现。

现设$T\cong \mathrm{PSL}(2,r)$，其中$r\equiv \pm 1 \pmod 5$。此时$\mathrm{Out}(T)\cong \mathbb{Z}_2$，故$A=\mathrm{PSL}(2,r)$或$A=\mathrm{PGL}(2,r)$。$T$在顶点集$V\Gamma$上至多含有两条轨道，且$|T|=60\cdot 9pq$或$60\cdot 18pq$，因此$|T|$中素因子 2、3、4 的次数分别至多为$(10,4,2)$。由$5\,||T|=|\mathrm{PSL}(2,r)|=\dfrac{r(r-1)(r+1)}{2}$，得$10\,|\,r^2-1$，即$r\equiv \pm 1 \pmod 5$，且$r=p$。注意到$\gcd\left(\dfrac{p-1}{2},\dfrac{p+1}{2}\right)=1$，分两种子情形讨论：若$q\,|\,p+1$，则$p-1=2^i\cdot 3^j\cdot 5^k$，且$9\,|\,(p-1)(p+1)$；若$q\,|\,p-1$，则$p+1=2^i\cdot 3^j\cdot 5^k$，其中指数满足$0\le i\le 10, 0\le j\le 4, 1\le k\le 2$，且$p>q\ge 5$均为素数。直接计算得候选素数$p\in\{71,89,109,179,269,271,359,431,541,719,809,1279,1439,1619,1621,2879\}$，全部候选情形列于表 8。

Table 8. Candidate almost simple groups $\mathrm{PSL}(2,r)$

表 8. 候选$\mathrm{PSL}(2,r)$群

$\mathrm{PSL}(2,r)$	阶分解	N	阶分解
$\mathrm{PSL}(2,71)$	$23\cdot 32\cdot 5\cdot 7\cdot 71$	$\mathrm{PSL}(2,541)$	$22\cdot 33\cdot 5\cdot 271\cdot 541$
$\mathrm{PSL}(2,89)$	$23\cdot 32\cdot 5\cdot 11\cdot 89$	$\mathrm{PSL}(2,719)$	$24\cdot 32\cdot 5\cdot 359\cdot 719$
$\mathrm{PSL}(2,109)$	$22\cdot 33\cdot 5\cdot 11\cdot 109$	PSL(2,809	$23\cdot 34\cdot 5\cdot 101\cdot 809$
$\mathrm{PSL}(2,179)$	$22\cdot 32\cdot 5\cdot 89\cdot 179$	$\mathrm{PSL}(2,1279)$	$28\cdot 32\cdot 5\cdot 71\cdot 1279$
$\mathrm{PSL}(2,269)$	$22\cdot 33\cdot 5\cdot 67\cdot 269$	$\mathrm{PSL}(2,1439)$	$25\cdot 32\cdot 5\cdot 719\cdot 1439$
$\mathrm{PSL}(2,271)$	$24\cdot 33\cdot 5\cdot 17\cdot 271$	$\mathrm{PSL}(2,1619)$	$22\cdot 34\cdot 5\cdot 809\cdot 1619$
$\mathrm{PSL}(2,359)$	$23\cdot 32\cdot 5\cdot 179\cdot 359$	$\mathrm{PSL}(2,1621)$	$22\cdot 34\cdot 5\cdot 811\cdot 1621$
$\mathrm{PSL}(2,431)$	$24\cdot 33\cdot 5\cdot 43\cdot 431$	$\mathrm{PSL}(2,2879)$	$26\cdot 32\cdot 5\cdot 1439\cdot 2879$

对素数$p\in\{71,89,271,431,809,1279,1439,1619,1621,2879\}$，由《群 Atlas》[30]可知单群$T=\mathrm{PSL}(2,p)$的外自同构群满足$\mathrm{Out}(T)=\mathbb{Z}_2$。此时几乎单群$A=\mathrm{Aut}\Gamma$可表示为$A\cong T.O$，其中$O$为$\mathrm{Out}(T)$的子群。对应群$A$的阶依次为：

$$|A|=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 71\cdot m, 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11\cdot 89\cdot m, 2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 17\cdot 271\cdot m, 2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 43\cdot 431\cdot m,$$
$$2^3\cdot 3^4\cdot 5\cdot 101\cdot 809\cdot m, 2^8\cdot 3^2\cdot 5\cdot 71\cdot 1279\cdot m, 2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 719\cdot 1439\cdot m,$$
$$2^2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 809\cdot 1619\cdot m, 2^2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 811\cdot 1621\cdot m, 2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 1439\cdot 2879\cdot m.$$

根据式中$m=|O|\in\{1,2\}$，并且结合图论基本关系$18pq=|A:A_\alpha|$与整除条件$5\,||A_\alpha|$，可唯一确定点稳定子群A_α的阶，并结合引理 2.2 判定其群结构。以$T\cong\mathrm{PSL}(2,71)$与$T\cong\mathrm{PSL}(2,89)$为例，两类情形下均有$|A_\alpha|=2^2\cdot 5$或$2^3\cdot 5$，由引理 2.2 可得(m,A_α)的可行组合为$(1,D_{20})$与$(2,F_{20}\times\mathbb{Z}_2)$。其余素数对应的候选单群均可通过相同方法完成分析。

本文使用 GAP 与 Magma 做辅助计算的实现思路简述：调用软件内置有限单群群库构造候选基座群，利用子群搜索函数筛选满足阶条件的子群作为候选点稳定子G_α，进一步构造陪集图，检验图的连通性与度数条件，并核验自同构群的弧传递性质，以此校验理论推导得到的候选对象。借助 GAP [23]与 Magma [24]开展群论数值验证，结果表明上述所有情形中，几乎单群$A\cong T.O$均不存在同构于对应候选结构的点

稳定子群 A_α，由此导出矛盾，该组情形全部无解。进一步讨论 $T\in\{\mathrm{PSL}(2,109),\mathrm{PSL}(2,179),\mathrm{PSL}(2,269),\mathrm{PSL}(2,359),\mathrm{PSL}(2,719)\}$ 的情形，此类单群同样满足 $\mathrm{Out}(T)=\mathbb{Z}_2$，即 $m=|O|\in\{1,2\}$ A 且 $m=|O|\in\{1,2\}$，群 A 的阶依次为：$|A|=2^2\cdot3^3\cdot5\cdot11\cdot109\cdot m$，$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot89\cdot179\cdot m$，$2^2\cdot3^3\cdot5\cdot67\cdot269\cdot m$，$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot179\cdot359\cdot m$，$2^4\cdot3^2\cdot5\cdot359\cdot719\cdot m$。同理结合 $|A:A_\alpha|=18pq$ 以及 $5\,||A_\alpha|$ 计算 $|A_\alpha|$，再通过引理 2.2 锁定点稳定子群的具体结构。

当 $T\cong\mathrm{PSL}(2,109)$ $R\neq1$ $18\cdot109\cdot11=21582$ 或 $T\cong\mathrm{PGL}(2,109)$ 时，由引理 2.2 可确定 $|A_\alpha|=2^2\cdot3\cdot5$，即 $A_\alpha\cong A_5$ 为唯一可行结构。经 GAP 与 Magma 验算，当 $\mathrm{Aut}\Gamma\cong\mathrm{PGL}(2,109)$ 时，存在唯一阶数为 $18\cdot109\cdot11=21582$ 的五度对称图，记为 $\mathcal{C}_{21582}$。

当 $T\cong\mathrm{PSL}(2,179)$ 或 $T\cong\mathrm{PGL}(2,179)$ 时，引理 2.2 给出 $|A_\alpha|=2\cdot5$ 或 $2^2\cdot5$，对应 $A_\alpha\cong D_{10}$ 或 D_{20}。依据引理 2.4，利用 GAP 系统检索满足条件的 2 阶元 g，计算得 $\mathrm{PSL}(2,179)$ 中至多包含 85 个有效 2 阶元，对应至多 85 个候选图；$\mathrm{PGL}(2,179)$ 中至多包含 136 个有效 2 阶元，对应至多 136 个候选图。剩余候选单群均可采用相同流程分析，结合 GAP 与 Magma 的全部计算结果，可汇总得到表 1 的全部结论。

综上，所有候选情形分析完毕，定理得证。

情形 2：假设 A 的可解根基非平凡，即 $R\neq1$。在此前提下，给出关于可解极小正规子群的关键引理。

引理 3.4 设素数满足 $5\le q<p$。若 A 含有可解的极小正规子群，则不存在阶为 $18pq$ 的五度对称图。

证明：设 N 是 A 的可解极小正规子群，则 $N\trianglelefteq A$。于是存在素数 r 和正整数 d，使得 $N\cong\mathbb{Z}_r^d$，并且 N 在顶点集 $V\Gamma$ 上至少有 3 条轨道。由引理 2.3，N 在 $V\Gamma$ 上半正则，故 $|N|\,|18pq$。结合素数条件 $p>q\ge5$，得 $N\cong\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_3^2,\mathbb{Z}_q$ 或 $\mathbb{Z}_p$。

子情形 1：$N\cong\mathbb{Z}_2$

依据引理 2.3，商图 Γ_N 的阶为 $9pq$，是五度的 A/N 弧传递图。奇数阶的对称图度数必为偶数，但 Γ_N 的度数为 5，矛盾。因此该子情形不可能发生。当通过商群 A/N 的群结构复原原群 A 时，结合本论文阶 $18pq$ 的算术条件以及基座性质，可以判定：该阶条件下不存在非分裂群扩张，因此只需要考虑直积与半直积两种群扩张，针对半直积情形，文中会明确给出正规子群上的自同构作用，以此确定群结构，排除结构歧义。

子情形 2：$N\cong\mathbb{Z}_3$

由引理 2.3，Γ_N 是阶为 $6pq$ 的五度 A/N -弧传递图，满足引理 2.7 的条件。A/N 在 Γ_N 上的弧传递性给出 $30pq\,||A/N|$。又 $A/N\le\mathrm{Aut}(\Gamma_N)$，故 $30pq\,||\mathrm{Aut}\Gamma_N|$。于是 Γ_N 只能是 $\mathcal{C}_{390}$、$\mathcal{CD}_{6pq,s}$、$\mathcal{C}_{1218}^1$、$\mathcal{C}_{1218}^i(i=2,3)$、$\mathcal{C}_{1722}$、$\mathcal{C}_{2982}$、$\mathcal{C}_{5874}$、$\mathcal{C}_{10266}$、$\mathcal{C}_{10266}^i(2\le i\le7)$、$\mathcal{C}_{11346}^1$ 或 $\mathcal{C}_{11346}^i(2\le i\le7)$。

若 $\Gamma_N\cong\mathcal{C}_{390}$、$\mathcal{C}_{1218}^1$、$\mathcal{C}_{1218}^i(i=2,3)$、$\mathcal{C}_{1722}$、$\mathcal{C}_{2982}$、$\mathcal{C}_{10266}^i(2\le i\le7)$ 或 $\mathcal{C}_{11346}^i(2\le i\le7)$，对应的素数对 (p,q) 依次为 $(13,5)$、$(29,7)$、$(29,7)$、$(41,7)$、$(71,7)$、$(59,29)$ 或 $(61,31)$；对应的自同构群 $\mathrm{Aut}\Gamma_N$ 分别同构于 $\mathrm{PSL}(2,25)$，$\mathrm{PGL}(2,29)$，$\mathrm{PSL}(2,29)$，$\mathrm{PGL}(2,41)$，$\mathrm{PSL}(2,71)$，$\mathrm{PSL}(2,59)$，$\mathrm{PSL}(2,61)$。由 Γ_N 的弧传递性可以还原 A 的群结构。利用 $18pq=|A:A_\alpha|$ 得到 $|A_\alpha|=|A|/(18pq)$，再由引理 2.2 确定点稳定子 A_α 的结构。以 $\Gamma_N\cong\mathcal{C}_{390}$ 为例，$A\cong\mathbb{Z}_3\times\mathrm{PSL}(2,25)$，此时 $|A_\alpha|=20$，$A_\alpha\cong D_{20}$。若 $\Gamma_N\cong\mathcal{C}_{1218}^1$，则 $A\cong\mathbb{Z}_3\times\mathrm{PGL}(2,29)$ 或 $\mathrm{PSL}(2,29):S_3$，$|A_\alpha|=10$，$A_\alpha\cong D_{10}$。其余情形可同理分析。但 GAP 计算表明，上述每一种情形下，群 A 均不存在满足要求的同构于 A_α 的子群，导出矛盾。

若 $\Gamma_N\cong\mathcal{C}_{5874}$、$\mathcal{C}_{10266}$ 或 $\mathcal{C}_{11346}$，则对应素数对 (p,q) 为 $(89,11)$、$(59,29)$ 或 $(61,31)$，而且 $\mathrm{Aut}\Gamma_N$ 分别为 $\mathrm{PSL}(2,89)$、$\mathrm{PGL}(2,59)$ 或 $\mathrm{PGL}(2,61)$。由弧传递性得到 A 的结构，引理 2.2 给出 A_α。以 $\Gamma_N\cong\mathcal{C}_{5874}$ 为例，

$A\cong\mathbb{Z}_3\times\mathrm{PSL}(2,89)$，$|A_\alpha|=60$，$A_\alpha\cong A_5$。借助 GAP 与 Magma 搜索引理 2.4 所述的 2-阶元 g，在 $\mathrm{PSL}(2,89)$ 中没有找到这样的元素，故 $A\cong\mathbb{Z}_3\times\mathrm{PSL}(2,89)$ 不能给出图 Γ。同理，在 $\mathbb{Z}_3\times\mathrm{PGL}(2,59)$，$\mathrm{PSL}(2,59):S_3$，$\mathbb{Z}_3\times\mathrm{PSL}(2,59)$，$\mathbb{Z}_3\times\mathrm{PGL}(2,61)$ 或 $\mathrm{PSL}(2,61):S_3$ 中均不存在满足引理 2.4 的 2-阶元，矛盾。

若 $\Gamma_N\cong\mathcal{CD}_{6pq,s}$，则 $\mathrm{Aut}\Gamma_N\cong D_{6pq}:\mathbb{Z}_5$。因为 A/N 是 $\mathrm{Aut}\Gamma_N$ 的弧传递子群，故 $30pq\,||A/N|\,|D_{6pq}:\mathbb{Z}_5|$，于是只能有 $A/N=D_{6pq}:\mathbb{Z}_5$。记 H 为 D_{6pq} 中阶为 pq 的正规子群，P 是 H 的 Sylow p-子群。由 Sylow 定理，P 在 H 中是特征子群；结合 $H\trianglelefteq D_{6pq}$，得 $P\trianglelefteq D_{6pq}$。又 P 是 D_{6pq} 的 Sylow p-子群，故 P 在 D_{6pq} 中特征，而 $D_{6pq}\trianglelefteq A/N$，因此 $P\trianglelefteq A/N$。由条件 $p>q\geq 5$，$5\,|\,p-1$ 且 $5\,|\,q-1$，故 $q\geq 11$，P 是 A/N 的 Sylow p-子群。令 $P=G/N$，则 $G/N\cong\mathbb{Z}_p$，$|G|=3p$。由 Sylow 定理，G 有正规 Sylow p-子群 $M\cong\mathbb{Z}_p$，于是 $G=\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_p=N\times M$。注意到 $G\trianglelefteq A$，故 $M\trianglelefteq A$，从而商图 Γ_M 是阶为 $18q$ 的五度对称图。由引理 2.5，$q=7$ 或 19 不满足条件，且要求 $5\,|\,q-1$，故不存在这样的图，$\Gamma_N\cong\mathcal{CD}_{6pq,s}$ 这一情形被排除。阶为 $6pq$ 的全部正规商图都导出矛盾，因此当 $N\cong\mathbb{Z}_3$ 时，不存在阶为 $18pq$ 的五度对称图。

子情形 3：$N\cong\mathbb{Z}_3^2$

引理 2.3 给出 Γ_N 是阶为 $2pq$ 的五度 A/N-弧传递图，满足引理 2.7。A/N 在 Γ_N 上传递，故 $10pq\,||A/N|$。又 $A/N\leq\mathrm{Aut}\Gamma_N$，于是 $10pq\,||\mathrm{Aut}\Gamma_N|$，因此 $\Gamma_N\cong\mathcal{C}_{574}$、$\mathcal{C}_{406}$、$\mathcal{C}_{3422}$、$\mathcal{C}_{3782}$ 或 $\mathcal{C}_{170}$。

若 $\Gamma_N\cong\mathcal{C}_{574}$，则 $(p,q)=(41,7)$，$\mathrm{Aut}\mathcal{C}_{574}\cong\mathrm{PSL}(2,41)$。由弧传递性，$A/N\cong\mathrm{PSL}(2,41)$，于是 $A=\mathbb{Z}_3^2\times\mathrm{PSL}(2,41)$ 计算得 $|A_\alpha|=\dfrac{|A|}{18\cdot 7\cdot 41}=60$。根据引理 2.2，$A_\alpha\cong A_5$。但是 $\mathrm{PSL}(2,41)$ 不存在 60 阶子群，矛盾。故 $\Gamma_N\ncong\mathcal{C}_{574}$。

若 $\Gamma_N\cong\mathcal{C}_{406},\mathcal{C}_{3422},\mathcal{C}_{3782}$，对应 $(p,q)=(29,7),(59,29),(61,31)$，$A/N\leq\mathrm{Aut}\Gamma_N$；由弧传递性，$A/N\cong\mathrm{PGL}(2,29),\mathrm{PGL}(2,59),\mathrm{PGL}(2,61)$。由此可以得到 A 的群结构。由 $18pq=|A:A_\alpha|$，$|A_\alpha|=|A|/18pq$，再由引理 2.2 确定 A_α。以 $\Gamma_N\cong\mathcal{C}_{406}$ 为例，$A/N\cong\mathrm{PGL}(2,29)$，则 $A\cong\mathbb{Z}_3^2\times\mathrm{PSL}(2,29)$，$\mathbb{Z}_3^2\times\mathrm{PGL}(2,29)$，$\mathbb{Z}_3^2\times(\mathbb{Z}_3:\mathrm{PGL}(2,29))$，$\mathbb{Z}_3:(\mathbb{Z}_3:\mathrm{PGL}(2,29))$，此时 $|A_\alpha|=\dfrac{|A|}{18\cdot 29\cdot 7}=30$ 或 60，引理 2.2 给出 $A_\alpha\cong A_5$。利用 GAP、Magma 搜索引理 2.4 中的 2-阶元 g，计算返回空结果，即 $\mathrm{PGL}(2,29)$ 中没有满足条件的 2-阶元，故 $A\cong\mathbb{Z}_3^2\times\mathrm{PGL}(2,29)$ 不能实现图 Γ。同理，$\mathbb{Z}_3^2\times\mathrm{PSL}(2,59)$，$\mathbb{Z}_3^2\times\mathrm{PGL}(2,59)$，$\mathbb{Z}_3^2\times(\mathbb{Z}_3:\mathrm{PGL}(2,59))$，$\mathbb{Z}_3:(\mathbb{Z}_3:\mathrm{PGL}(2,59))$，$\mathbb{Z}_3^2\times\mathrm{PSL}(2,61)$，$\mathbb{Z}_3^2\times\mathrm{PGL}(2,61)$，$\mathbb{Z}_3^2\times(\mathbb{Z}_3:\mathrm{PGL}(2,61))$，$\mathbb{Z}_3:(\mathbb{Z}_3:\mathrm{PGL}(2,61))$ 中均无满足引理 2.4 的 2-阶元，矛盾。

最后讨论 $\Gamma_N\cong\mathcal{C}_{170}$，此时 $(p,q)=(17,5)$，$\mathrm{Aut}\mathcal{C}_{170}\cong\mathrm{PSp}(4,4).\mathbb{Z}_4$。由于 $\mathrm{PSp}(4,4)$ 在 $V\Gamma_N$ 上非传递，故 $\mathrm{PSp}(4,4).\mathbb{Z}_2\leq A/N\leq\mathrm{PSp}(4,4).\mathbb{Z}_4$ 该群的 Schur 乘子平凡，因此 $A=\mathbb{Z}_3^2\times\mathrm{PSp}(4,4).\mathbb{Z}_2$，$A=\mathbb{Z}_3^2\times\mathrm{PSp}(4,4).\mathbb{Z}_4$，于是 A 含有正规子群。验算可知 M 在 $V\Gamma$ 上至多 2 条轨道，得到 $|M_\alpha|=640$ 或 1280。Magma 计算表明 $\mathrm{PSp}(4,4)$ 不存在 640 阶与 1280 阶子群，矛盾。

子情形 4：$N\cong\mathbb{Z}_q$

由引理 2.3，正规商图 Γ_N 是阶为 $18p$ 的五度 (A/N)-弧传递图，满足引理 2.5 的条件。A/N 在 Γ_N 上传递，故 $90p\,||A/N|$。又 $A/N\leq\mathrm{Aut}\Gamma_N$，于是 $90p\,||\mathrm{Aut}\Gamma_N|$，因此 $\Gamma_N\cong O_4,\mathcal{C}_{342}^1$ 或 $\mathcal{C}_{342}^2$。从而 $A/N\leq\mathrm{Aut}\Gamma_N\cong S_9,\mathrm{PSL}(2,19)$ 或 $\mathrm{PGL}(2,19)$。于是 $A\cong\mathbb{Z}_q.S_9,\mathbb{Z}_q.\mathrm{PSL}(2,19)$ 或 $\mathbb{Z}_q.\mathrm{PGL}(2,19)$。可以得到 A 的正规子群 H，满足 $H=\mathbb{Z}_q\times A_9$ 或者 $H=\mathbb{Z}_q\times\mathrm{PSL}(2,19)$。记 $M=H'$ 为 H 的换位子群，则 $M=A_9$ 或 $M=\mathrm{PSL}(2,19)$。M 在 $V\Gamma$ 至多两条轨道，故 $9pq\,||M|$。当 $p=7$ 或 19 时，得到 $q=5$。现在基于群 A 分析点稳定子 H 的可能结构，分情形展开讨论。若 $A\cong\mathbb{Z}_5.S_9$，则 H 的可能同构类型为

$\mathbb{Z}_5\times A_9, \mathbb{Z}_5\times S_7, \mathbb{Z}_5\times(\mathbb{Z}_2\times A_7), \mathbb{Z}_5\times(\mathbb{Z}_2\times S_7), \mathbb{Z}_5\times A_8, \mathbb{Z}_5\times S_8, \mathbb{Z}_5\times A_9, \mathbb{Z}_5\times S_9$。若 $A\cong\mathbb{Z}_5.\mathrm{PSL}(2,19)$ 则 $H=\mathbb{Z}_5\times\mathrm{PSL}(2,19)$。

若 $A\cong\mathbb{Z}_5.\mathrm{PGL}(2,19)$，则 A 同构于 $\mathbb{Z}_5\times\mathrm{PGL}(2,19)$ 或者 $\mathrm{PGL}(2,19):D_{10}$。相应地，$H$ 可能同构于 $\mathbb{Z}_5\times A_9, \mathbb{Z}_5\times\mathrm{PSL}(2,19), \mathbb{Z}_5\times\mathrm{PGL}(2,19), \mathrm{PGL}(2,19):D_{10}$。借助 Magma 验算，$N\cong\mathbb{Z}_q$ 这一子情形下不存在满足条件的图。

子情形 5：$N\cong\mathbb{Z}_p$

该子情形与 $N\cong\mathbb{Z}_q$ 对称，同理可得：不存在对应的图。N 的全部可能选取均导出矛盾，因此可得到：当可解根基 $R\neq 1$ 时，阶为 $18pq$ 的五度对称图不存在。至此情形 2 证明完毕。于是主定理 1 成立。对素数 $p>q\geq 5$，所有此类图均出现在情形 1，情形 2 中没有解。

4. 结论

本文完成了素数满足 $p>q\geq 5$ 条件下阶 $18pq$ 的连通五度对称图的完全分类。证明表明，满足条件的连通五度对称图仅存在于自同构群为几乎单群的情形；若自同构群的可解根基非平凡，则不存在这样的图。全部图同构类、自同构群、点稳定子 G_α 及对应的素数约束汇总于表 1。本文仅讨论 $p>q\geq 5$。当 $q=2,3$ 时，群阶算术条件改变，点稳定子和候选单群集合均会发生变化，属于另一独立分类问题，留作后续研究。文中采用的正规商约化结合有限单群分类定理的思路，可为其他复合阶五度对称图分类提供参考。将该方法推广至其他阶或其他度数时，点稳定子结构显著复杂化，候选单群数目激增，相关分类工作仍存在挑战，值得继续探究。

参考文献

[1] Tutte, W.T. (1947) A Family of Cubical Graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, 459-474. https://doi.org/10.1017/s0305004100023720

[2] Tutte, W.T. (1959) On the Symmetry of Cubic Graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, **11**, 621-624. https://doi.org/10.4153/cjm-1959-057-2

[3] Chao, C. (1971) On the Classification of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Transactions of the American Mathematical Society*, **158**, 247-256. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1971-0279000-7

[4] Praeger, C.E., Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) Symmetric Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **58**, 299-318. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1046

[5] Praeger, C.E. and Xu, M.Y. (1993) Vertex-Primitive Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **59**, 245-266. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1068

[6] Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) A Classification of Symmetric Graphs of Order 3p. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **58**, 197-216. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1037

[7] Li, C.H. (2001) On Finite S-Transitive Graphs of Odd Order. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **81**, 307-317. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.2012

[8] Conder, M. and Dobcsányi, P. (2002) Trivalent Symmetric Graphs on up to 768 Vertices. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **40**, 41-63.

[9] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2009) Tetravalent One-Regular Graphs of Order 2pq. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **29**, 457-471. https://doi.org/10.1007/s10801-008-0146-z

[10] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2010) On Symmetric Graphs of Valency Five. *Discrete Mathematics*, **310**, 1725-1732. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.11.019

[11] Alaeiyan, M. and Akbarizadeh, M. (2019) Classification of the Pentavalent Symmetric Graphs of Order 18p. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **50**, 485-497. https://doi.org/10.1007/s13226-019-0340-9

[12] Guo, S.T., Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 12p. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **18**, P233. https://doi.org/10.37236/720

[13] Hua, X.H. and Feng, Y.Q. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 8p. *Journal of Beijing Jiaotong University*, **35**, 132-135, 141. (In Chinese)

[14] Hua, X.H., Feng, Y. and Lee, J. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 2pq. *Discrete Mathematics*, **311**, 2259-2267. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.07.007

[15] Ling, B. (2017) Classifying Pentavalent Symmetric Graphs of Order 24p. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **43**, 1855-1866.

[16] Ling, B., Wu, C.X. and Lou, B.G. (2014) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 30p. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **90**, 353-362. https://doi.org/10.1017/s0004972714000616

[17] Pan, J., Lou, B. and Liu, C. (2013) Arc-Transitive Pentavalent Graphs of Order 4pq. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **20**, P36. https://doi.org/10.37236/2373

[18] Ding, S.Y., Ling, B., Lou, B. and Pan, J. (2016) Arc-Transitive Pentavalent Graphs of Square-Free Order. *Graphs and Combinatorics*, **32**, 2355-2366. https://doi.org/10.1007/s00373-016-1717-8

[19] Li, Y.T. and Feng, Y.Q. (2010) Pentavalent One-Regular Graphs of Square-Free Order. *Algebra Colloquium*, **17**, 515-524. https://doi.org/10.1142/s1005386710000490

[20] Meymandi, M.A., Alaeiyan, M. and Scapellato, R. (2022) Classification of the Pentavalent Symmetric Graphs of Order 8pq. *International Journal of Group Theory*, **11**, 259-270.

[21] Dickson, L.E. (1958) Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory. Dover.

[22] Robinson, D.J. (1982) A Course in the Theory of Groups. Springer-Verlag.

[23] The GAP Group, GAP-Groups (2024) Algorithms, and Programming, Version 4.13.1. https://www.gap-system.org/

[24] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[25] Cameron, P.J., Omidi, G.R. and Tayfeh-Rezaie, B. (2006) 3-Designs from PGL(2,q). *The Electronic Journal of Combinatorics*, **13**, R50. https://doi.org/10.37236/1076

[26] Guo, S. and Feng, Y. (2012) A Note on Pentavalent s-Transitive Graphs. *Discrete Mathematics*, **312**, 2214-2216. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.04.015

[27] Li, C.H. and Pan, J.M. (2008) Finite 2-Arc-Transitive Abelian Cayley Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 148-158. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2006.12.001

[28] Praeger, C.E. (1993) An O'nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[29] Sabidussi, G. (1964) Vertex-Transitive Graphs. *Monatshefte für Mathematik*, **68**, 426-438. https://doi.org/10.1007/bf01304186

[30] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) Atlas of Finite Groups. Oxford University Press.

[31] Gorenstein, D. (1982) Finite Simple Groups. Plenum Press.