

大学生数学竞赛常微分方程试题的一题多解

胡艳红, 宋 威*

广东海洋大学 数学与计算机学院, 广东 湛江

收稿日期: 2026年9月16日; 录用日期: 2026年10月16日; 发布日期: 2026年10月28日

摘 要

本文对第十七届非数学类大学生数学竞赛中的一道常微分方程试题, 从不同角度出发, 给出了六种解题方法, 旨在拓展发散思维, 跳出固定套路, 并且对比优劣, 学会择优解题。本文还找到了该方程的常数解, 更全面地考虑问题。

关键词

常微分方程, 一题多解, 数学竞赛

Multiple Solution Methods to a Differential Equation Problem of the College Mathematics Competition

Yanhong Hu, Wei Song*

College of Mathematics and Computer Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong

Received: September 16, 2026; accepted: October 16, 2026; published: October 28, 2026

Abstract

This paper presents six distinct solution methods for an ordinary differential equation problem from the 17th National College Mathematics Competition (Non-Mathematics Category). It aims to help students broaden their divergent thinking, break away from fixed routines, and learn to select the optimal approach by comparing the advantages and disadvantages of each method. Furthermore, this study identifies the constant solution of the equation, encouraging students to consider problems from a more comprehensive perspective.

*通讯作者。

Keywords

Ordinary Differential Equation, Multiple Solutions, Mathematics Competition

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 介绍

常微分方程[1]作为大学数学课程体系中的重要分支,不仅是数学理论研究的基石,更是物理、工程、经济等诸多学科进行数学建模与求解的关键工具。在各类数学竞赛中,常微分方程试题往往以其高度的灵活性与综合性,成为检验学生数学素养与创新思维的重要载体。对于非数学类专业的学生而言,面对形式多变的微分方程,如何突破常规套路、敏锐洞察方程结构并选择最优解法,是提升解题能力的关键所在。

本文以第十七届全国大学生数学竞赛(非数学类)初赛试题中的一道常微分方程试题为研究对象。该题目形式复杂,涉及多变量的四则混合运算,若仅采用单一的固定思维,往往难以迅速找到突破口。本文从变量代换、积分因子、恰当导数方程[2]等多个角度对该题进行深度剖析,共整理出两类共计六种具有代表性的解题方案,并补充了答案中不涉及的常数解。

通过“一题多解”的对比与探讨,本文旨在打通不同知识点之间的壁垒,夯实数学基础,并在展示多种解题路径的同时对比各方法的优劣,从而有效锻炼逻辑推理能力与数学思维的灵活性[3]。

2. 试题及答案分析

第十七届全国大学生数学竞赛于2025年11月举行。其中非数学类初赛试题的第三大题是一道求解常微分方程的试题。命题人的目的是考查学生对导数、微分以及常微分方程基础知识的掌握程度,以及综合且灵活地运用所学知识的能力。具体题目为:求微分方程

$$y'x \ln x \sin y + (1 - x \cos y) \cos y = 0 \quad (1)$$

的通解。

本文设计了两大类共计六种不同的解法,供参与竞赛的学生和竞赛辅导的教师们参考。我们首先介绍第一类解法,这类解法综合利用了两个函数商的导数公式和一阶微分的形式不变性。

2.1. 利用恰当导数方程的方法

初等积分法是常微分方程最基本的方法,运用初等积分法需要一定的技巧性。东北师范大学微分方程教研组介绍了恰当导数方程的概念,并利用这个概念帮助学生求解了一些看起来无法求解的方程。

定义 1. [2] 如果方程

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C$$

的左端恰为某一函数 $\Phi(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ 的导数,即该方程可以化为

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = 0,$$

则称之为恰当导数方程。

例 1. [2] 求解方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 。

解：先将两端同乘不为零的因子 $\frac{1}{y^2}$ ，则有

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} \right) = 0,$$

故 $y' = C_1 y$ ，从而通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$ 。

结合定义 1 和例 1，我们依次给出两种新解法。我们首先直接利用恰当导数方程给出第一种解法。

2.1.1. 解法一

将方程(1)两边同时除以 $x \cos^2 y$ ，我们可以得到

$$\frac{y' \ln x \sin y + \frac{1}{x} \cos y}{\cos^2 y} - 1 = 0。$$

进一步整理得到

$$\frac{(\ln x)' \cos y - \ln x (\cos y)'}{\cos^2 y} - 1 = 0,$$

即

$$\left(\frac{\ln x}{\cos y} - x \right)' = 0,$$

直接积分得

$$\frac{\ln x}{\cos y} - x = C,$$

进一步，整理得到

$$\sec y = \frac{1}{\cos y} = \frac{(x+C)}{\ln x}。$$

接下来，我们利用恰当导数方程的思想和分离变量法给出第二种方法。

2.1.2. 解法二

将方程(1)两边同时除以 $x(\ln x)^2$ ，经整理后可得

$$\frac{y' \ln x \sin y + \frac{1}{x} \cos y}{(\ln x)^2} - \frac{\cos^2 y}{(\ln x)^2} = 0,$$

进一步整理，我们可以得到

$$-\frac{\ln x (\cos y)' - (\ln x)' \cos y}{(\ln x)^2} - \left(\frac{\cos y}{\ln x} \right)^2 = 0。$$

利用商的导数公式，即得

$$\left(\frac{\cos y}{\ln x}\right)' + \left(\frac{\cos y}{\ln x}\right)^2 = 0。$$

令

$$u = \frac{\cos y}{\ln x},$$

则

$$u' = -u^2,$$

分离变量得

$$-\frac{1}{u^2} du = dx,$$

积分得

$$\frac{1}{u} = x + C,$$

即

$$u = \frac{1}{x + C},$$

回代即得通解, 与方法一结果完全相同。

2.2. 利用变量变换结合初等积分法的方法

利用变量变换实现常微分方程的求解是常微分方程课程与教材始终强调并贯彻的内容和基本功训练。学生在掌握了变量分离方程的解法之后, 第一时间就会学到可化为变量分离方程, 从这时起利用变量变换求解常微分方程就是学生必会的基本功了。因此, 我们设计了四种利用变量变换结合初等积分法的解法。接下来, 我们逐一介绍这些方法。

2.2.1. 解法三(余弦变量变换结合伯努利方程)

将方程(1)进行整理, 得

$$y'x \ln x \sin y + \cos y = x \cos^2 y。 \quad (2)$$

将方程(2)两边同除以 $x \ln x$, 可得

$$y' \sin y + \frac{\cos y}{x \ln x} = \frac{\cos^2 y}{\ln x}。$$

令 $z = \cos y$, 利用复合函数求导法则, 我们有

$$z' - \frac{z}{x \ln x} = -\frac{z^2}{\ln x}。$$

利用这个函数变换, 我们把原方程转化为关于 z 的伯努利方程。基于伯努利方程的解法, 我们进一步令

$$u = \frac{1}{z},$$

将其转化为一阶线性方程

$$u' + \frac{u}{x \ln x} = \frac{1}{\ln x}。 \quad (3)$$

求解得到

$$u = \frac{(x+C)}{\ln x}。$$

然后依次回代, 最终得到通解:

$$\sec y = \frac{1}{\cos y} = \frac{(x+C)}{\ln x}。$$

2.2.2. 解法四(正割变量变换结合一阶线性微分方程)

方程(2)两边同除以 $x \ln x \cos^2 y$, 我们可以得到

$$\frac{y' \sin y}{\cos^2 y} + \frac{1}{x \ln x} \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\ln x},$$

即

$$y' \sec y \tan y + \frac{\sec y}{x \ln x} = \frac{1}{\ln x},$$

利用复合函数求导法则, 可以得到

$$(\sec y)' + \frac{\sec y}{x \ln x} = \frac{1}{\ln x}。 \quad (4)$$

该方程为关于 $\sec y$ 的一阶线性方程, 利用积分因子法或常数变易法可直接求解, 得到与解法三一致的通解。

解法三和解法四只对因变量进行了变量变换, 我们又给出了两种自变量和因变量都进行变量变换的方法。这两种方法更有趣一些, 他们的理论基础是一阶微分的形式不变性, 竞赛辅导教师可以在讲解之前, 强调一下一阶微分的形式不变性。

2.2.3. 解法五(余弦、对数变量变换结合伯努利方程)

将方程(2)进行变形得到

$$\frac{dy}{\frac{1}{x} dx} \ln x \sin y + (1 - x \cos y) \cos y = 0。$$

进一步变形, 我们得到

$$-\frac{d \cos y}{d \ln x} \ln x + \cos y = x \cos^2 y = e^{\ln x} \cos^2 y。 \quad (5)$$

令

$$u = \cos y, v = \ln x,$$

则上式化为

$$-\frac{du}{dv} v + u = e^v u^2。$$

这是一个伯努利方程。我们将等式两边同除以 u^2 , 并整理为关于 $\frac{1}{u}$ 的线性方程

$$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dv}v + \frac{1}{u} = e^v.$$

再令 $w = \frac{1}{u}$, 即可化为线性微分方程

$$v \frac{dw}{dv} + w = e^v.$$

求解, 依次回代后得到相同通解。

2.2.4. 解法六(余弦、对数变量变换结合变量可分离方程)

我们将解法五过程中出现的方程(5)的两边同除以 $\ln x$, 并令

$$u = \frac{\cos y}{\ln x},$$

从而

$$\frac{du}{d \ln x} = \frac{\frac{d \cos y}{d \ln x} \ln x - \cos y}{(\ln x)^2}.$$

利用上述变换, 我们可以得到新的方程

$$-\left(u + \ln x \frac{du}{d \ln x}\right) + u = xu^2 \ln x.$$

进一步整理即得

$$-\frac{du}{d \ln x} = xu^2,$$

从而

$$d\left(\frac{1}{u}\right) = x d \ln x = dx,$$

积分得

$$\frac{1}{u} = x + C,$$

回代得通解。

2.3. 常数解

观察原方程, 当 $\cos y = 0$ 时, 方程左端恒为 0, 故 $y = \pi/2 + k\pi$ (k 为整数) 为方程的常数解。结合前几种方法所得的通解, 可完整描述该微分方程的解族结构。

3. 讨论与结论

本文的第一类方法整体比第二类方法的前两种难, 技巧性高; 第二类方法的后两种方法比第一类方法难, 需要的知识点更多。第二类方法的前两种方法更容易被接受和掌握。

解法三中的方程(3)和解法四中的方程(4), 可以利用恰当导数方程的思路结合两个函数乘积的导数公式求解, 可以在讲解时引导学生, 进一步提升他们的观察能力和综合运用知识的能力。

对这道常微分方程试题, 本文通过给出六种不同角度的解题方法——涉及变量代换、分离变量法、一阶线性微分方程、伯努利方程、商的导数结构——打通知识点之间的壁垒, 夯实数学基础, 锻炼发散思维与逻辑推理能力。并找到原题中方程的全部常数解, 全面描述了该方程的解集。通过“一题多解”的对比与探讨, 提升解题的灵活性与效率, 并提示注意全面考虑问题。

基金项目

本文受广东海洋大学教学改革项目《高等数学的 Mathematica 辅助教学研究》(项目编号: PX-131223571)、广东海洋大学科研启动经费资助项目(编号: 060302102004, 060302102005)支持。

参考文献

- [1] 王高雄, 周之铭, 朱思铭等. 常微分方程[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [2] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2022.
- [3] 陈仲. 高等数学竞赛题解析教程[M]. 第3版. 南京: 东南大学出版社, 2025.