

保持秩1幂等元凸组合数值域的满射

雷荣华

重庆师范大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年9月20日; 录用日期: 2026年10月21日; 发布日期: 2026年10月29日

摘 要

设 $\mathcal{H}$ 为可分复Hilbert空间, $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上所有秩1幂等元的集合。映射 ψ 保持任意两个秩1投影算子的特定凸组合的数值半径当且仅当 ψ 保持任意两个秩1投影算子的转移概率。当 $\mathcal{H}$ 维数为2时, 设 $\phi: \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 为满射, 且存在 $\lambda_0 \in (0,1)$ 使得对任意 $E, F \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 有 $W(\lambda_0 E + (1-\lambda_0)F) = W(\lambda_0 \phi(E) + (1-\lambda_0)\phi(F))$ 。通过证明 ϕ 保持秩1投影算子集, 可得 ϕ 由某一酉算子或反酉算子诱导。

关键词

数值域, 幂等元, 酉算子, 反酉算子

Surjective Maps Preserving the Numerical Range of Convex Combinations of Rank-1 Idempotents

Ronghua Lei

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: September 20, 2026; accepted: October 21, 2026; published: October 29, 2026

Abstract

Let $\mathcal{H}$ be a separable complex Hilbert space, and $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ denote the set of all rank-1 idempotents on $\mathcal{H}$. A map ψ preserves the numerical radius of a specific convex combination of any two rank-1 projection operators if and only if ψ preserves the transition probability of any two rank-1 projection. Assume $\dim \mathcal{H} = 2$, let $\phi: \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ be a surjective map, and suppose there

exists $\lambda_0 \in (0,1)$ such that $W(\lambda_0 E + (1-\lambda_0)F) = W(\lambda_0 \phi(E) + (1-\lambda_0)\phi(F))$ for any $E, F \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$. By proving that ϕ preserves the set of rank-1 projection operators, it is concluded that ϕ is induced by a unitary or anti-unitary operator.

Keywords

Numerical Range, Idempotents, Unitary Operator, Anti-Unitary Operator

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

关于算子数值域的研究,最早可以追溯到 1919 年 O. Toeplitz 与 F. Hausdorff 的工作(见文献[1][2])。设 $\mathcal{H}$ 为可分复 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{H}$ 上全体有界线性算子构成的集合。对于任意有界线性算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 其数值域定义为:

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}.$$

他们证明了算子的数值域是复平面上的单连通凸子集,这一结果被称为 Hausdorff-Toeplitz 定理(见文献[1][2])。设 $\{e_i : i \in \Lambda\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基,对任意 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 记 $\text{Tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n \rangle$ 为 T 的迹。 k 是正整数,记 $\mathcal{P}_k(\mathcal{H}) = \{P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : P^2 = P = P^*, \text{Tr}(P) = k\}$ 。 $\mathcal{I}_k(\mathcal{H}) = \{E \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : E^2 = E, \text{Tr}(E) = k\}$ 。Halmos 在[3]中定义了算子组的联合数值域: 设 $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^m$,

$$W(\mathbf{A}) = \{\langle A_1 x, x \rangle, \dots, \langle A_m x, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}.$$

关于算子组联合数值域的闭性、紧性与凸性等性质,已有相关文献进行研究(见文献[4]-[7])。例如,若 $\mathbf{A}$ 是交换的正规算子组,则 $W(\mathbf{A})$ 是凸的(见文献[8])。

Wigner 定理指出(见文献[9]): 若映射 $\phi: \mathcal{P}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 保持秩 1 投影的转移概率,即对任意 $P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 有 $\text{Tr}(\phi(P)\phi(Q)) = \text{Tr}(PQ)$, 则 ϕ 由某一酉算子或反酉算子诱导。Wigner 定理已得到多方面推广: 2004 年, P. Šemrl 证明了保持双边正交性的双射由一个酉算子或反酉算子诱导(见文献[10])。2016 年, G. P. Gehér 和 P. Šemrl 进一步证明了保持双边正交性的满射由一个酉算子或反酉算子诱导(见文献[11])。

诸多学者刻画了保持数值域或保持联合数值域的映射(见文献[12][13])。特别地, 邓年等人在[14]中对保持两个投影算子的联合数值域的映射进行刻画。基于不定内积在部分物理问题中的应用背景, Qian 等人研究了保持两个秩 k 幂等元的联合数值域的映射, 若 $\phi: \mathcal{I}_k(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{I}_k(\mathcal{H})$ 为满射且保持任意两个幂等元 $E, F \in \mathcal{I}_k(\mathcal{H})$ 的联合数值域, 他们得到 ϕ 由某一酉算子或反酉算子诱导。对于任意的 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 其数值半径定义为, $w(T) = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}$ 。我们得到, 映射 ψ 保持任意两个秩 1 投影算子的特定凸组合的数值半径, 当且仅当 ψ 保持任意两个秩 1 投影算子的转移概率。所以, 研究保持任意两个幂等元凸组合数值域的映射, 是该方向的自然延伸。我们进一步研究了保持任意两个秩 1 幂等元特定凸组合的数值域的满射。

2. 保持秩 1 幂等元凸组合数值域的满射

下面我们证明, 在可分复 Hilbert 空间上映射 ψ 保持任意两个秩 1 投影算子的特定凸组合的数值半径当且仅当 ψ 保持任意两个秩 1 投影算子的转移概率。

引理 1.1 设 $\mathcal{H}$ 是可分复 Hilbert 空间, $P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, $\lambda \in [0, 1]$, 则

$$w(\lambda P + (1-\lambda)Q) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \text{Tr}(PQ))}}{2}.$$

Proof. 根据 Halmos 双投影定理[15], P, Q 可表示为:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-2} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-2} \end{pmatrix}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

此时 $\text{Tr}(PQ) = \cos^2 \theta$ 。令 $\lambda P + (1-\lambda)Q = A$, 故 A 的非零特征值为

$$\mu_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \text{Tr}(PQ))}}{2}.$$

由 A 为正算子知 $w(A) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \text{Tr}(PQ))}}{2}$ 。□

于是有下面的命题。

命题 1.2 设 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, ψ 为 $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 到 $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 的映射。则以下三个命题相互等价:

(1) 对任意 $\lambda \in (0, 1)$, 任意 $P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 都有

$$w(\lambda P + (1-\lambda)Q) = w(\lambda \psi(P) + (1-\lambda)\psi(Q));$$

(2) 存在 $\lambda_0 \in (0, 1)$, 使得对任意 $P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 都有

$$w(\lambda_0 P + (1-\lambda_0)Q) = w(\lambda_0 \psi(P) + (1-\lambda_0)\psi(Q));$$

(3) 对任意 $P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, $\text{Tr}(PQ) = \text{Tr}(\psi(P)\psi(Q))$ 。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): 显然成立。

(2) $\Rightarrow$ (3): 由引理 1.1 知 $\text{Tr}(PQ) = \text{Tr}(\psi(P)\psi(Q))$, 故(3)得证。

(3) $\Rightarrow$ (1): 对任意 $\lambda \in (0, 1)$, 由引理 1.1 知

$$\begin{aligned} w(\lambda P + (1-\lambda)Q) &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \text{Tr}(PQ))}}{2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \text{Tr}(\psi(P)\psi(Q)))}}{2} \\ &= w(\lambda \psi(P) + (1-\lambda)\psi(Q)), \end{aligned}$$

故(1)得证。□

设 $\mathcal{H}$ 为二维复 Hilbert 空间, ϕ 为秩 1 幂等元集合到秩 1 幂等元集合的满射。若存在 $\lambda_0 \in (0, 1)$, 使得对任意 $E, F \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, 都有 $W(\lambda_0 E + (1-\lambda_0)F) = W(\lambda_0 \phi(E) + (1-\lambda_0)\phi(F))$ 。证明 ϕ 由酉算子或反酉算子诱导, 先证以下引理。

引理 1.3 设 $\mathcal{H}$ 为复 Hilbert 空间, $E \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, 则 $w(E) = \frac{1+\|E\|}{2}$ 。

Proof. 在空间直和分解 $\mathcal{H} = R(E)\mathcal{H} \oplus (I - R(E))\mathcal{H}$ 下, 先将幂等元 E 写为:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算其算子范数得:

$$\|E\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A^* & 0 \end{pmatrix} = 1 + \|A\|^2,$$

设 $\eta = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ 为单位向量, 则有

$$\langle E\eta, \eta \rangle = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \|x\|^2 + \langle Ay, x \rangle.$$

因为对任意单位向量 η , 由于 $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$, 根据内积不等式可得

$$\begin{aligned} |\langle E\eta, \eta \rangle| &\leq \|x\|^2 + |\langle Ay, x \rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|A\| \|y\| \|x\|. \end{aligned}$$

令 $\|x\| = \cos \theta$, 其中 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $\|y\| = \sin \theta$ 。从而有

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + \|A\| \|y\| \|x\| &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{\|A\| \sin 2\theta}{2} \\ &\leq \frac{1 + \sqrt{1 + \|A\|^2}}{2} = \frac{1 + \|E\|}{2}. \end{aligned}$$

由于存在单位向量 $\xi \in \mathcal{H}$ 使得上述不等式中的等号成立, 故其上确界为 $\frac{1+\|E\|}{2}$, 从而 $w(E) = \frac{1+\|E\|}{2}$ 。

□

在二维复希尔伯特空间中, 对任意秩 1 幂等元 $E \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, 在空间直和分解 $\mathcal{H} = R(E)\mathcal{H} \oplus (I - R(E))\mathcal{H}$ 下, 可先将 E 和 $\phi(E)$ 分别记为:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(E) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 且 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}$ 。

引理 1.4 设 $\mathcal{H}$ 为二维复 Hilbert 空间, $\phi: \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 为满射。若存在 $\lambda_0 \in (0, 1)$, 使得对任意 $E, F \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, 都有 $W(\lambda_0 E + (1 - \lambda_0)F) = W(\lambda_0 \phi(E) + (1 - \lambda_0)\phi(F))$, 则 ϕ 是 $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 上的双射。

Proof. 假设存在 $E, F \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 使得 $\phi(E) = \phi(F)$ 。令 $F = E$, 得 $W(E) = W(\phi(E))$ 且 $W(F) = W(\phi(F))$ 。由于 $\phi(E) = \phi(F)$ 有 $W(\lambda_0 E + (1 - \lambda_0)F) = W(\phi(E))$ 。由引理 1.3 知 $\|E\| = \|F\| = \|\phi(E)\|$ 。

因为 $W(E) = W(\lambda_0 E + (1 - \lambda_0)F)$ 以及文献[2]知, $W(E)$ 和 $W(\lambda_0 E + (1 - \lambda_0)F)$ 是以 $(1, 0)$ 和 $(0, 0)$ 为焦点, 短轴长分别为 $\sqrt{\text{Tr}(E^*E) - 1^2 - 0^2}$ 和

$$\sqrt{\operatorname{Tr}\left((\lambda_0 E + (1-\lambda_0)F)^*(\lambda_0 E + (1-\lambda_0)F)\right)} - 1^2 - 0^2$$

的椭圆盘, 故 $\operatorname{Tr}\left((\lambda_0 E + (1-\lambda_0)F)^*(\lambda_0 E + (1-\lambda_0)F)\right) = \operatorname{Tr}(E^*E) = \|E\|^2$ 。代入 $\operatorname{Tr}(E^*E) = \operatorname{Tr}(F^*F) = \|E\|^2$, 化简得 $\operatorname{Re}(\operatorname{Tr}(E^*F)) = \|E\|^2$

另一方面由 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\operatorname{Re}(\operatorname{Tr}(E^*F)) \leq |\operatorname{Tr}(E^*F)| \leq \sqrt{\operatorname{Tr}(E^*E)}\sqrt{\operatorname{Tr}(F^*F)} = \|E\|^2.$$

由于上述不等式中等号成立, 故存在非零复数 λ 使得 $E = \lambda F$ 。对此等式两边求迹, 并结合 $\operatorname{Tr}(E) = \operatorname{Tr}(F) = 1$ 可得 $\lambda = 1$, 即 $E = F$ 。因此 ϕ 为单射, 从而为双射。□

引理 1.5 设 $\mathcal{H}$ 为二维复 Hilbert 空间, $\phi: \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 为满射。若存在 $\lambda_0 \in (0,1)$, 使得对任意 $E, F \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, 都有 $W(\lambda_0 E + (1-\lambda_0)F) = W(\lambda_0 \phi(E) + (1-\lambda_0)\phi(F))$, 则 $\phi(\mathcal{P}_1(\mathcal{H})) = \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 。

Proof. 令 $F = E$, 即得 $\forall E \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, 有 $W(E) = W(\phi(E))$ 。注意到对 $E \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, $E \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 当且仅当 $W(E) \subseteq \mathbb{R}$ 。一方面, $\forall P \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 由 $W(\phi(P)) = W(P) \subseteq \mathbb{R}$ 得 $\phi(P) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 故 $\phi(\mathcal{P}_1(\mathcal{H})) \subseteq \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 。另一方面, $\forall P \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 由 ϕ 为满射知 $\exists E \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 使 $\phi(E) = P$ 。由 $W(E) = W(P) \subseteq \mathbb{R}$ 得 $E \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 故 $\mathcal{P}_1(\mathcal{H}) \subseteq \phi(\mathcal{P}_1(\mathcal{H}))$ 。综上, $\phi(\mathcal{P}_1(\mathcal{H})) = \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 。□

设 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, ϕ 为 $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 到自身的满射, 若存在 $\lambda_0 \in (0,1)$, 使得 $\forall P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 有

$$W(\lambda_0 P + (1-\lambda_0)Q) = W(\lambda_0 \phi(P) + (1-\lambda_0)\phi(Q)),$$

由命题 1.2 知, 此等式等价于

$$\operatorname{Tr}(PQ) = \operatorname{Tr}(\phi(P)\phi(Q)).$$

而酉(反酉)变换保持投影的凸组合的数值域, 故不妨假设 $\phi|_{\mathcal{P}_1(\mathcal{H})}$ 为恒等映射, 即 $\phi(P) = P$, $\forall P \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 。当 $a = 0$ 时, $E \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 故 $\phi(E) = E$ 。下证 $a \neq 0$ 时, 仍有 $\phi(E) = E$ 。

引理 1.6 设 $\mathcal{H}$ 为二维复 Hilbert 空间, $\phi: \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 为满射。若存在 $\lambda_0 \in (0,1)$, 使得对任意 $E, F \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, 都有

$$W(\lambda_0 E + (1-\lambda_0)F) = W(\lambda_0 \phi(E) + (1-\lambda_0)\phi(F)),$$

$$\text{则 } \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (|a_{12}| = |a|) \text{ 或 } \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} (|a_{21}| = |a|).$$

Proof. 因 $\phi(E) \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, 故 $\operatorname{Tr}(\phi(E)) = 1$ 且 $\det(\phi(E)) = 0$, 即

$$a_{11} + a_{22} = 1, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (1)$$

令 $F = R(E)$ 得:

$$W(\lambda_0 E + (1-\lambda_0)R(E)) = W(\lambda_0 \phi(E) + (1-\lambda_0)\phi(R(E))).$$

由于 ϕ 在 $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 上为恒等映射, 故 $\phi(R(E)) = R(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。记

$$\lambda_0 E + (1-\lambda_0)R(E) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\lambda_0 \phi(E) + (1 - \lambda_0) R(E) = \begin{pmatrix} \lambda_0 a_{11} + 1 - \lambda_0 & \lambda_0 a_{12} \\ \lambda_0 a_{21} & \lambda_0 a_{22} \end{pmatrix} = B.$$

由 $W(A) = W(B)$ 和文献[2]可得 A 和 B 的数值域均是以 $(1, 0)$ 和 $(0, 0)$ 为焦点的闭椭圆盘, 且短轴长分别为 $\sqrt{\text{Tr}(A^*A) - 1^2 - 0^2}$ 与 $\sqrt{\text{Tr}(B^*B) - 1^2 - 0^2}$ 。所以 $\text{sp}(B) = \text{sp}(A) = \{1, 0\}$ 。由 $0 \in \text{sp}(B)$ 知 $\det(B) = 0$ 。所以

$$\det(B) = (\lambda_0 a_{11} + 1 - \lambda_0)(\lambda_0 a_{22}) - (\lambda_0 a_{12})(\lambda_0 a_{21}) = \lambda_0^2 (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \lambda_0 (1 - \lambda_0) a_{22} = 0. \quad (2)$$

将式(1)代入式(2), 得 $\lambda_0 (1 - \lambda_0) a_{22} = 0$ 。由 $\lambda_0 \in (0, 1)$ 知 $a_{22} = 0$ 。将 $a_{22} = 0$ 代回式(1), 解得 $a_{11} = 1$ 且 $a_{12}a_{21} = 0$ 。

另一方面, 由两椭圆盘的短轴长相等, 得 $\text{Tr}(A^*A) = \text{Tr}(B^*B)$ 。代入 $a_{11} = 1$ 与 $a_{22} = 0$ 计算两侧的迹, 化简得 $|a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 = |a|^2$ 。结合 $a_{12}a_{21} = 0$ 及 $|a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 = |a|^2$ 可知, $\phi(E)$ 只能为引理结论中所述的两种形式之一。□

引理 1.7 设 $\mathcal{H}$ 为二维复 Hilbert 空间, $\phi: \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 为满射。若存在 $\lambda_0 \in (0, 1)$, 使得对任意 $E, F \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, 都有

$$W(\lambda_0 E + (1 - \lambda_0) F) = W(\lambda_0 \phi(E) + (1 - \lambda_0) \phi(F)), \quad (3)$$

$$\text{则 } \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proof. 接下来按照引理 1.6 中的两种情形分类讨论。

情形 1: 若 $\phi(E) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $|a_{12}| = |a|$ 。由 $E^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix}$ 知 $R(E^*) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & |a|^2 \end{pmatrix}$ 。由于 $R(E^*) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$,

故 $\phi(R(E^*)) = R(E^*)$ 。在式(3)中令 $F = R(E^*)$, 得

$$W(\lambda_0 E + (1 - \lambda_0) R(E^*)) = W(\lambda_0 \phi(E) + (1 - \lambda_0) R(E^*)).$$

记 $\lambda_0 E + (1 - \lambda_0) R(E^*) = A$, $\lambda_0 \phi(E) + (1 - \lambda_0) R(E^*) = B$, 则

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \frac{1 - \lambda_0}{1 + |a|^2} & \lambda_0 a + \frac{(1 - \lambda_0)a}{1 + |a|^2} \\ \frac{(1 - \lambda_0)\bar{a}}{1 + |a|^2} & \frac{(1 - \lambda_0)|a|^2}{1 + |a|^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \frac{1 - \lambda_0}{1 + |a|^2} & \lambda_0 a_{12} + \frac{(1 - \lambda_0)a}{1 + |a|^2} \\ \frac{(1 - \lambda_0)\bar{a}}{1 + |a|^2} & \frac{(1 - \lambda_0)|a|^2}{1 + |a|^2} \end{pmatrix}.$$

因为 $W(A) = W(B)$ 以及文献[2]知二者焦点相同, 并且有 $\text{sp}(A) = \text{sp}(B)$, 故 $\det(A) = \det(B)$ 。直接计算知

$$\det(A) = 0, \quad \det(B) = \frac{\lambda_0(1 - \lambda_0)}{1 + |a|^2} (|a|^2 - a_{12}\bar{a}),$$

故 $|a|^2 - a_{12}\bar{a} = 0$, 从而 $a_{12} = a$, 即 $\phi(E) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E$ 。

情形 2: 若 $\phi(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $|a_{21}| = |a|$ 。可得 $R(\phi(E)) = \frac{1}{1 + |a_{21}|^2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{a}_{21} \\ a_{21} & |a_{21}|^2 \end{pmatrix}$ 。由于

$R(\phi(E)) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 在式(3)中令 $F = R(\phi(E))$, 得

$$W(\lambda_0 E + (1 - \lambda_0)R(\phi(E))) = W(\lambda_0 \phi(E) + (1 - \lambda_0)R(\phi(E))).$$

记 $\lambda_0 E + (1 - \lambda_0)R(\phi(E)) = A$, $\lambda_0 \phi(E) + (1 - \lambda_0)R(\phi(E)) = B$, 则

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \frac{1 - \lambda_0}{1 + |a_{21}|^2} & \lambda_0 a + \frac{(1 - \lambda_0)\bar{a}_{21}}{1 + |a_{21}|^2} \\ \frac{(1 - \lambda_0)a_{21}}{1 + |a_{21}|^2} & \frac{(1 - \lambda_0)|a_{21}|^2}{1 + |a_{21}|^2} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \frac{1 - \lambda_0}{1 + |a_{21}|^2} & \frac{(1 - \lambda_0)\bar{a}_{21}}{1 + |a_{21}|^2} \\ \lambda_0 a_{21} + \frac{(1 - \lambda_0)a_{21}}{1 + |a_{21}|^2} & \frac{(1 - \lambda_0)|a_{21}|^2}{1 + |a_{21}|^2} \end{pmatrix}.$$

由 $W(A) = W(B)$ 知 $\text{sp}(A) = \text{sp}(B)$, 故 $\det(A) = \det(B)$ 。直接计算知

$$\det(A) = \frac{\lambda_0(1 - \lambda_0)}{1 + |a_{21}|^2}(|a_{21}|^2 - aa_{21}), \quad \det(B) = 0,$$

故 $|a_{21}|^2 - aa_{21} = 0$, 从而 $a_{21} = \bar{a}$, 即 $\phi(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix} = E^*$ 。

在式(3)中令 $F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 由于 $F \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 有 $\phi(F) = F$ 。记 $\lambda_0 E + (1 - \lambda_0)F = A$,

$\lambda_0 \phi(E) + (1 - \lambda_0)F = B$, 则

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda_0 + \frac{1 - \lambda_0}{2} & \lambda_0 a + \frac{1 - \lambda_0}{2} \\ \frac{1 - \lambda_0}{2} & \frac{1 - \lambda_0}{2} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_0(1 - \lambda_0)}{2}(1 - a),$$

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} \lambda_0 + \frac{1 - \lambda_0}{2} & \frac{1 - \lambda_0}{2} \\ \lambda_0 \bar{a} + \frac{1 - \lambda_0}{2} & \frac{1 - \lambda_0}{2} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_0(1 - \lambda_0)}{2}(1 - \bar{a}).$$

由 $\det(A) = \det(B)$ 得 $a = \bar{a}$, 因此 $\text{Im}(a) = 0$ 。

在式(3)中令 $F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda_0 + \frac{1 - \lambda_0}{2} & \lambda_0 a - \frac{i(1 - \lambda_0)}{2} \\ \frac{i(1 - \lambda_0)}{2} & \frac{1 - \lambda_0}{2} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_0(1 - \lambda_0)}{2}(1 - ia),$$

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} \lambda_0 + \frac{1 - \lambda_0}{2} & \frac{-i(1 - \lambda_0)}{2} \\ \lambda_0 \bar{a} + \frac{i(1 - \lambda_0)}{2} & \frac{1 - \lambda_0}{2} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_0(1 - \lambda_0)}{2}(1 + i\bar{a}).$$

由 $\det(A) = \det(B)$ 得 $1 - ia = 1 + i\bar{a}$ ，从而 $\operatorname{Re}(a) = 0$ 。这说明 $a = 0$ ，矛盾，因此情形 2 舍去。

所以 $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。□

综上可得本文定理：

定理 1.8 设 $\mathcal{H}$ 为二维复 Hilbert 空间， $\phi: \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ 为满射。若存在 $\lambda_0 \in (0, 1)$ ，使得对任意 $E, F \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ ，都有 $W(\lambda_0 E + (1 - \lambda_0)F) = W(\lambda_0 \phi(E) + (1 - \lambda_0)\phi(F))$ ，则存在 $\mathcal{H}$ 上的酉算子或反酉算子 U ，使得对任意 $E \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ ，都有 $\phi(E) = U^*EU$ 。

基金项目

重庆市教委青年项目 KJQN2018000538。

参考文献

- [1] Hausdorff, F. (1919) Der Wertvorrat einer Bilinearform. *Mathematische Zeitschrift*, **3**, 314-316. <https://doi.org/10.1007/bf01292610>
- [2] Toeplitz, O. (1918) Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér. *Mathematische Zeitschrift*, **2**, 187-197. <https://doi.org/10.1007/bf01212904>
- [3] Halmos, P.R. (1982) A Hilbert Space Problem Book. 2nd Edition, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6>
- [4] Li, C.K. and Poon, Y.T. (2000) Spectral Inequalities and Equalities Involving Products of Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **323**, 131-143. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379500002494>
- [5] Li, C.K. and Poon, Y.T. (2005) Maps Preserving the Joint Numerical Radius Distance of Operators. *Linear Algebra and Its Applications*, **437**, 1194-1204. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379512002947>
- [6] Molnár, L. (2001) Transformations on the Set of All N-Dimensional Subspaces of a Hilbert Space Preserving Principal Angles. *Communications in Mathematical Physics*, **217**, 409-421. <https://doi.org/10.1007/pl00005551>
- [7] Gau, H. and Wu, P.Y. (2021) Numerical Ranges of Hilbert Space Operators. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108782296>
- [8] Dash, A.T. (1972) Joint Numerical Range. *Glasnik Matematički*, **7**, 75-81. <https://web.math.pmf.unizg.hr/glasnik/Vol/vol07no1.html>
- [9] Wigner, E.P. (1959) Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra. Academic Press.
- [10] Šemrl, P. (2004) Orthogonality Preserving Transformations on the Set of n -Dimensional Subspaces of a Hilbert Space. *Illinois Journal of Mathematics*, **48**, 567-573. <https://doi.org/10.1215/ijm/1258138399>
- [11] Gehér, G.P. and Šemrl, P. (2016) Isometries of Grassmann Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **270**, 1585-1601. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.018>
- [12] Omladič, M. (1990) On Operators Preserving the Numerical Range. *Linear Algebra and Its Applications*, **134**, 31-51. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(90\)90004-v](https://doi.org/10.1016/0024-3795(90)90004-v)
- [13] Pellegrini, V. (1975) Numerical Range Preserving Operators on a Banach Algebra. *Studia Mathematica*, **54**, 143-147. <https://doi.org/10.4064/sm-54-2-143-147>
- [14] 邓年. 保持投影算子对联合数值域的映射[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆师范大学, 2025.
- [15] Halmos, P.R. (1969) Two Subspaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **144**, 381-389. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1969-0251519-5>