Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(11), 1-11
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1611229

Hans汉斯

关于复(p, q)-Petty投影体的仿射等周不等式

冉煊之

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2026年9月21日；录用日期：2026年10月18日；发布日期：2026年11月3日

摘　要

本文在复空间$\mathbb{C}^n$中建立了一类新的仿射等周不等式。通过引入非对称L_p带状体生成测度，定义了复(p,q)-Petty投影体，并利用加权平均、Hölder不等式与Jensen不等式，结合实L_p-Petty投影不等式，证明了相应的仿射等周不等式，分别在$\dim_{\mathbb{R}} C=1$与$\dim_{\mathbb{R}} C=2$两种情形下刻画了等号条件，得到极值体分别为实椭球与Hermite椭球。该结论包含了$\mathbb{C}^n$中的L_p-Petty投影不等式。

关键词

复L_p-Petty投影体，复(p,q)-Petty投影体，仿射等周不等式

Affine Isoperimetric Inequality for the Complex (p, q)-Petty Projection Body

Xuanzhi Ran

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: September 21, 2026; accepted: October 18, 2026; published: November 3, 2026

Abstract

In this paper, we establish a new class of affine isoperimetric inequalities in the complex space $\mathbb{C}^n$. By introducing the generating measure of an asymmetric L_p zonoid, we define the complex (p,q)-Petty projection body, and by means of weighted averaging, Hölder's inequality, and Jensen's inequality, together with the real L_p-Petty projection inequality, we prove the corresponding isoperimetric inequality. Furthermore, we characterize the equality conditions in the two cases $\dim_{\mathbb{R}} C=1$ and $\dim_{\mathbb{R}} C=2$, obtaining extremal bodies that are real ellipsoids and Hermite ellipsoids, respectively.

文章引用: 冉煊之. 关于复(*p*, *q*)-Petty 投影体的仿射等周不等式[J]. 理论数学, 2026, 16(11): 1-11.
DOI: 10.12677/pm.2026.1611229

This result contains the L_p-Petty projection inequality in $\mathbb{R}^n$ as a special case.

Keywords

Complex L_p-Petty Projection Body, Complex (p,q)-Petty Projection Body, Affine Isoperimetric Inequality

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文在 n-维复空间 $\mathbb{C}^n$ 中展开研究，所有集合均是定义在 n-维复空间 $\mathbb{C}^n$ 中。对于任意复数 $c\in\mathbb{C}^n$，它的复共轭和范数分别记为 $\bar{c}$ 和 $|c|$。凸体为内部非空的紧致凸集，星体为径向函数为正的连续星形紧集。我们约定“$\cdot$”为 n-维复空间 $\mathbb{C}^n$ 中的标准 Hermite 内积，B 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的复单位球 $B=\{c\in\mathbb{C}^n : c\cdot c\le 1\}$，$\mathbb{S}^n$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的复单位球面 $\mathbb{S}^n=\{c\in\mathbb{C}^n : c\cdot c=1\}$。

投影体由 Minkowski 在 19 世纪末到 20 世纪初引出。关于投影体的基本仿射不等式是 Petty 投影不等式[1]：$\mathbb{R}^n$ 空间中，在所有体积给定的凸体(内部非空的紧凸集)中，其极投影体体积达到最大者恰为椭球体。2000 年，Lutwak、Yang 和 Zhang [2]在 $\mathbb{R}^n$ 空间中引入了 L_p-Petty 投影体和 L_p-Petty 投影不等式。进一步，Haberl 与 Schuster [3]基于 Ludwig [4]的赋值分类结果，系统研究了 $\mathbb{R}^n$ 空间中一类非对称 L_p-投影体 $\Pi_p^{\lambda}K$，其中 $\lambda\in[0,1]$，并建立了相应的 Petty 投影不等式。

定理 1.1 ([3])设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点的凸体，且 $p>1$，则对每个 $\lambda\in[0,1]$，

$$V(K)^{\frac{n}{p}-1}V\left(\Pi_p^{\lambda,*}K\right)\le V(B)^{\frac{n}{p}-1}V\left(\Pi_p^{\lambda,*}B\right), \tag{1.1}$$

等号成立当且仅当 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心的椭球。

结果表明，新不等式加强并蕴含了此前已知的 Petty 投影不等式。2016 年，Huang、Lutwak、Yang 和 Zhang [5]引入了 $\mathbb{R}^n$ 中对偶曲率测度；Lutwak、Yang 和 Zhang [6]进一步在单位球面上构造了一族双参数 Borel 测度，即 (p,q)-对偶曲率测度，这一工作一定程度统一了经典的混合体积理论与较新的对偶混合体积理论，并将表面积测度与对偶曲率测度纳入同一框架。在此基础上，Fang、Wang 和 Zhang [7]研究了 (p,q)-对偶曲率测度的 L_p 余弦变换，引入了 (p,q)-Petty 投影体及相应的仿射等周不等式。丰富了实空间 $\mathbb{R}^n$ 中 L_p-Brunn-Minkowski 理论中关于投影体的仿射等周不等式体系。

实空间中 (p,q)-Petty 投影体的构造，将经典的 L_p-Petty 投影体纳入一个更一般的框架之中，从而在投影体与对偶曲率测度之间建立了内在联系，同时得到 (p,q)-Petty 投影体满足一个更一般的仿射等周不等式，该不等式在 $q=n$ 时退化为经典的 L_p-Petty 投影不等式，揭示了 (p,q)-对偶曲率测度在仿射等周问题中的重要作用。这些结果不仅推动了对偶 Brunn-Minkowski 理论的发展，也为 (p,q)-对偶曲率测度的 Minkowski 问题以及仿射 Sobolev 不等式等相关分析问题提供了新的几何工具和统一视角。

与此同时，复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中凸几何的研究迅速发展，通过标准的实同构 $\iota:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}^{2n}$，$\mathbb{C}^n$ 中的凸体同时继承了实仿射结构和内在的 Hermite 性质。2005 年，Ludwig [4]的一项重要结果表明了投影体算子是唯一关于实仿射群反变的 Minkowski 赋值。这促使 Abardia 和 Bernig [8]定义了整个复投影体族。此后，

Haberl [9]在复空间 $\mathbb{C}^n$ 中建立了尖锐的复投影体的仿射等周不等式，发现当 $\dim_{\mathbb{R}} C=1$ 时实椭球使极投影体达到最大；当 $\dim_{\mathbb{R}} C=2$ 时，复空间中以原点为中心的 Hermite 椭球使极投影体达到最大。随后，Wang 和 Liu [10]讨论了一般复 L_p 投影体的复 L_p 仿射等周不等式：

定理 1.2 ([10])设 $p>1$，设 K 为 $\mathbb{C}^n$ 中包含原点在内部的凸体，Q 为 $\mathbb{C}^n$ 中包含原点在内部的星体，设 C 为复平面上的凸集，是一个非对称 L_p 带状体(在第三节介绍)，且 $\dim_{\mathbb{R}} C\geq 1$，则对每个 $\lambda\in[0,1]$，

$$V(K)^{\frac{2n}{p}-1}V\left(\Pi_{p,C}^{\lambda,*}K\right)\leq V(B)^{\frac{2n}{p}-1}V\left(\Pi_{p,C}^{\lambda,*}B\right). \tag{1.2}$$

等号成立情况：

(a) $\dim_{\mathbb{R}} C=1$ 时，当且仅当 K 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中以原点为中心的实椭球。

(b) $\dim_{\mathbb{R}} C=2$ 时，当且仅当 K 是 $\mathbb{C}^n$ 中以原点为中心的 Hermite 椭球。

复投影体理论与 (p,q)-对偶曲率测度理论此前一直各自独立发展，二者在复空间中的结合仍有待进一步研究。本文旨在将 (p,q)-对偶曲率测度理论推广至复空间，并与复投影体理论相结合，在 $\mathbb{C}^n$ 中建立复的 (p,q)-Petty 投影体的等周不等式。我们利用 Fang、Wang 和 Zhang [7]关于 (p,q)-Petty 投影体的原始定义，以及 Abardia 和 Bernig [8]关于复投影体的定义，引入了复 (p,q)-Petty 投影体，并讨论其基本性质，建立如下仿射等周不等式：

定理 1.3 设 $p>1$，$1\leq\frac{q}{2n}\leq p$，K 为 $\mathbb{C}^n$ 中包含原点在内部的凸体，Q 为 $\mathbb{C}^n$ 中包含原点在内部的星体，设 C 为复平面上的凸集，是一个非对称 L_p 带状体，且 $\dim_{\mathbb{R}} C\geq 1$。则对每个 $\lambda\in[0,1]$，

$$V(K)^{q-p}V(Q)^{2n-q}V\left(\Pi_{p,q,C}^{\lambda,*}(K,Q)\right)^p\leq\omega_{2n}^{q-p}\left(\frac{V\left(\Pi_{p,C}^{\lambda,*}B\right)}{V\left(\Pi_{p}^{\lambda,*}B\right)}\right)^p V\left(\Pi_{\frac{2np}{q}}^{\lambda,*}B\right)^p. \tag{1.3}$$

等号成立情况：

(a) 当 $q=2n$ 且 $\dim_{\mathbb{R}} C=1$ 时，当且仅当 K 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中以原点为中心的实椭球。

(b) 当 $q=2n$ 且 $\dim_{\mathbb{R}} C=2$ 时，当且仅当 K 是 $\mathbb{C}^n$ 中以原点为中心的 Hermite 椭球。

注释： $q=2n$ 时，定理 1.3 退化为定理 1.2。其中 ω_{2n} 表示 $\mathbb{R}^{2n}$ 中单位球体积。定理 1.3 的证明将在第三节中给出。

本文的工作可以看作是将实空间中 (p,q)-Petty 投影体向复空间的一次尝试性推广。其意义主要体现在两个方面：一方面，它在一定程度上联系了此前相对独立发展的两个方向——(p,q)-对偶曲率测度理论，以及复空间中的复投影体理论，使二者在同一对象上产生了联系；另一方面，定理 1.3 给出的仿射等周不等式在 $q=2n$ 时退化为 Wang 和 Liu 的复 L_p-Petty 仿射等周不等式(定理 1.2)，其等号条件中实椭球与 Hermite 椭球的区分也反映了复结构与实结构在极值体上的差异。此外，本文通过将复 L_p-Petty 投影体与实 (p,q)-Petty 投影体建立联系，并借助加权平均、Hölder 不等式与 Jensen 不等式进行推导，这一证明思路可能为后续在复空间中研究更一般的对偶曲率测度及其相关问题提供一种可参考的技术路径。

2. 预备知识

在本节中，我们将列出关于 $\mathbb{C}^n$ 中凸体的一些基本定义和结果，可参考文献[4]和[11]中相关知识。关于复数域上的 $m\times n$ 阶矩阵 $\phi\in\mathbb{C}^{m\times n}$，则 ϕ^* 是矩阵 ϕ 的共轭转置。我们约定“$\cdot$”为 n-维复空间 $\mathbb{C}^n$ 中的标准 Hermite 内积：

$$x\cdot y=x^*y=\sum_{j=1}^{n}\overline{x}_j y_j,\quad \forall x,y\in\mathbb{C}^n,$$

易知，该内积的第一个变量是共轭线性的。

定义 2.1 记 ι 为 $\mathbb{C}^n$ 与 $\mathbb{R}^{2n}$ 之间的正则同构，即对任意 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n$，都有

$$\iota(x)=(\Re[x_1],\cdots,\Re[x_n],\Im[x_1],\cdots,\Im[x_n]),$$

其中 $\Re$ 和 $\Im$ 分别表示实部和虚部。

由定义 2.1 可知，映射 ι 有如下性质：

$$\Re[x\cdot y]=\iota x\cdot\iota y,\quad \forall x,y\in\mathbb{C}^n. \tag{2.1}$$

等式右边的内积“$\cdot$”指 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的欧氏内积，即对任意 $x,y\in\mathbb{R}^{2n}$，有 $x\cdot y=x^*y$，其中 x^* 是 x 的转置。直接得到 $\iota B=B_2^{2n}$ 与 $\iota\mathbb{S}^n=S^{2n-1}$，其中 $B_2^{2n}=\{x\in\mathbb{R}^{2n}:|x|\le 1\}$ 与 $S^{2n-1}=\{x\in\mathbb{R}^{2n}:|x|=1\}$ 分别表示 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的标准欧氏单位球和标准欧氏单位球面。令 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是复空间上的 n 阶一般线性群。取 $\phi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，将 ϕ 分解成由实部和虚部组成，即

$$\phi=\Re[\phi]+i\Im[\phi].$$

于是，ϕ 的实矩阵 $\mathbb{R}[\phi]$ 表示为一个分块矩阵

$$\mathbb{R}[\phi]=\begin{pmatrix}\Re[\phi] & -\Im[\phi]\\ \Im[\phi] & \Re[\phi]\end{pmatrix},$$

其中 $\mathbb{R}[\phi]\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$，且 $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ 指实空间中的 $2n$ 阶一般线性群。

推论 2.1 设 $x\in\mathbb{C}^n$ 且 $\phi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，则矩阵 ϕ 与它的实矩阵表示 $\mathbb{R}[\phi]$ 有如下关系：

(a) $|\det\phi|^2=|\det\mathbb{R}[\phi]|$

(b) $\iota(\phi x)=\mathbb{R}[\phi]\iota x$.

推论 2.2 (a)中，$|\det\phi|$ 表示行列式 ϕ 的绝对值。若 $\phi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是一个 Hermite 矩阵，那么 $\phi^*=\phi$，于是 $\overline{x\cdot\phi x}=x\cdot\phi x$，即 $x\cdot\phi x$ 是一个实数，因此容易得到如下引理。

引理 2.1 设 $x\in\mathbb{C}^n$，若 $\phi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 为 Hermite 矩阵，则 $x\cdot\phi x=\iota x\cdot\mathbb{R}[\phi]\iota x$。

可得，$\mathbb{R}[\phi]$ 是正定对称矩阵当且仅当 ϕ 正定 Hermite 矩阵。

令 $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$ 和 $\mathcal{K}_o(\mathbb{C}^n)$ 分别表示 $\mathbb{C}^n$ 中的凸体的集合和内部包含原点的凸体的集合。设 $K\in\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$，由定义 2.1 可知 K 是椭球当且仅当 ιK 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的实椭球，即存在某个正定对称矩阵 $\varphi\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ 与某个 $x_0\in\mathbb{R}^{2n}$，使得

$$\iota K=\{x\in\mathbb{R}^{2n}:x\cdot\varphi x\le 1\}+x_0.$$

上述情况等价于：K 是一个椭球当且仅当存在某个正定对称矩阵 $\varphi\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ 与某个 $y_0\in\mathbb{C}^n$，使得

$$K=\{x\in\mathbb{C}^n:\iota x\cdot\varphi\iota x\le 1\}+y_0.$$

进一步，我们介绍复空间上 Hermite 椭球的定义。

定义 2.2 设 $t\in\mathbb{C}^n$ 且 $K\in\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$，若存在某个 n 阶正定 Hermite 矩阵 $\phi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，使得

$$K=\{x\in\mathbb{C}^n:x\cdot\phi x\le 1\}+t,$$

则称 K 是一个 Hermite 椭球。

设 $K\in\mathcal{K}\left(\mathbb{C}^n\right)$， K 的支撑函数 $h_K(\cdot)=h(K,\cdot):\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}$ 定义为

$$h(K,z)=\max\left\{\Re[z\cdot w]:w\in K\right\},\quad z\in\mathbb{C}^n. \tag{2.2}$$

K 由其支撑函数 $h(K,\cdot)$ 唯一确定。显然，h_K 是一阶正齐次且次可加的。对任意 $\phi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 和 $\lambda>0$，

$$h_{\phi K}(z)=h_K\left(\phi^* z\right),\quad h_{\lambda K}(z)=\lambda h_K(z).$$

由公式(2.1)可知，

$$h_K(z)=h_{\iota K}(\iota z). \tag{2.3}$$

需要注意一下，公式(2.3)等号右边的 $h_{\iota K}$ 指实空间上的支撑函数：设 $x\in\mathbb{R}^{2n}$，凸体 $L\subset\mathbb{R}^{2n}$，则凸体 L 的支撑函数定义为

$$h(L,x)=\max\{x\cdot y:y\in K\},\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

其中“$\cdot$”指 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的欧氏内积。对于 $K\in\mathcal{K}_o\left(\mathbb{C}^n\right)$，极体 $K^*\in\mathcal{K}_o\left(\mathbb{C}^n\right)$ 定义为

$$K^*=\left\{z\in\mathbb{C}^n:\Re[z\cdot w]\le 1,\forall w\in K\right\}.$$

根据推论可知 $\iota K^*=(\iota K)^*$，其中 $(\iota K)^*$ 指 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的凸体 ιK 的极体，即

$$(\iota K)^*=\left\{x\in\mathbb{R}^{2n}:x\cdot y\le 1,\forall y\in\iota K\right\},$$

设 $\phi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 且 $K\in\mathcal{K}\left(\mathbb{C}^n\right)$，则

$$(\phi K)^*=\phi^{-*}K^*.$$

特别地，对任意 $\lambda>0$，都有

$$(\lambda K)^*=\lambda^{-1}K^*.$$

设 K 为 $\mathbb{C}^n$ 中的紧集，若原点 o 与 K 中任意一点的连线所形成的线段仍然包含在 K 中，则称 K 为(关于原点 o 的)星形集。星形集 K 的径向函数 $\rho_K(\cdot):\mathbb{C}^n\setminus\{o\}\to[0,+\infty)$ 定义为

$$\rho_K(x)=\max\{\lambda\ge 0:\lambda x\in K\},\quad x\ne o.$$

由于 $K\in\mathcal{K}_o\left(\mathbb{C}^n\right)$，则它的极体 $K^*\in\mathcal{K}_o\left(\mathbb{C}^n\right)$，在 $\mathbb{C}^n\setminus\{o\}$ 上有

$$\rho_{K^*}=h_K^{-1}. \tag{2.4}$$

设 $\phi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 且 $K\in\mathcal{K}_o\left(\mathbb{C}^n\right)$，对任意 $u\in\mathbb{S}^n$，有

$$\rho_{\phi K}(u)=\frac{1}{h_{(\phi K)^*}(u)}=\frac{1}{h_{\phi^{-*}K^*}(u)}=\frac{1}{h_{K^*}\left(\phi^{-1}u\right)}=\rho_K\left(\phi^{-1}u\right),$$

即 $\rho_{\phi K}=\rho_K\circ\phi^{-1}$，其中“$\circ$”代表复合运算。若星形集 K 的径向函数 ρ_K 为正且连续，则称 K 是关于原点 o 的一个星体。记 $\mathcal{S}_o\left(\mathbb{C}^n\right)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中(关于原点的)星体构成的集合。设 $K,L\in\mathcal{S}_o\left(\mathbb{C}^n\right)$，若 $\rho_K(u)$ 与 $\rho_L(u)$ 的比值和 $u\in\mathbb{S}^n$ 无关，则称 K 与 L 是相互实扩张的。

设 $K\in\mathcal{K}\left(\mathbb{C}^n\right)$，则 K 的体积 $V(K)$ 定义为 ιK 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的 $2n$ 维 Lebesgue 测度，即

$$V(K)=V(\iota K).$$

通过极坐标变换，有

$$V(K)=\frac{1}{2n}\int_{\mathbb{S}^n}\rho_K(u)^{2n}\,\mathrm{d}u. \tag{2.5}$$

其中 du 表示 $2n-1$ 维欧氏单位球面上的 Hausdorff 测度关于 ι^{-1} 的推进。

对于每个 Borel 集 $\omega\subset\mathbb{S}^n$，凸体 $K\in\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$ 的表面积测度 S_K 定义为

$$S_K(\omega)=\mathcal{H}^{2n-1}\left(\iota\left\{x\in K:\exists u\in\omega,\Re[x\cdot u]=h_K(u)\right\}\right),$$

其中 $\mathcal{H}^{2n-1}$ 表示 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的 $2n-1$ 维 Hausdorff 测度。$S_{p,K}$ 是 K 在 $\mathbb{S}^n$ 上的 L_p 表面积测度，它关于 S_K 绝对连续，且其 Radon-Nikodym 导数为

$$\frac{\mathrm{d}S_{p,K}}{\mathrm{d}S_K}=h_K^{1-p}.$$

设 $K\in\mathcal{K}_o(\mathbb{C}^n)$，$Q\in\mathcal{S}_o(\mathbb{C}^n)$ 且 $p,q\in\mathbb{R}$，则对偶曲率测度 $\tilde{C}_{p,q}(K,Q,\cdot)$ 定义为

$$\tilde{C}_{p,q}(K,Q,\eta)=\frac{1}{2n}\int_{x\in\nu_K^{-1}(\eta)}\left(\Re[x\cdot\nu_K(x)]\right)^{1-p}\|x\|_Q^{q-2n}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{2n-1}(x). \tag{2.6}$$

其中 $\eta\subseteq\mathbb{S}^n$ 为任意 Borel 集，$\nu_K(x)$ 表示 K 在边界点 x 处的外单位法向量。注意，对于 $Q\in\mathcal{S}_o(\mathbb{C}^n)$，定义 $\|\cdot\|_Q:\mathbb{C}^n\to[0,\infty)$ [6]：

$$\|x\|_Q=\begin{cases}1/\rho_Q(x) & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases} \tag{2.7}$$

其中 $\|\cdot\|_Q$ 是连续且为一阶正齐次的函数，若 $Q\in\mathcal{K}_o(\mathbb{C}^n)$，$\|\cdot\|_Q$ 则为 $\mathbb{C}^n$ 上的普通范数。

3. 关于复空间(p, q, C)-Petty 投影体的等周不等式

本节主要工作是引入复 (p,q) 投影体，并介绍相应的仿射等周不等式。讨论复 (p,q) 投影体之前，先简单叙述 L_p 带状体。令 $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ 表示 1-维复空间 $\mathbb{C}$ 上的凸体的集合。设 $C\in\mathcal{K}(\mathbb{C})$ 为一个非对称复 L_p 带状体，其生成偶测度 $\mu_{p,C}$ 定义在单位球面 $\mathbb{S}^1\subset\mathbb{C}$ 上：

$$h_C(w)^p=\int_{\mathbb{S}^1}\left(\Re[w\cdot c]\right)_+^p\,\mathrm{d}\mu_{p,C}(c),\quad\forall w\in\mathbb{S}^1. \tag{3.1}$$

由(3.1)式可知，非对称复 L_p 带状体 $C\in\mathcal{K}(\mathbb{C})$ 由单位圆周上的偶测度 $\mu_{p,C}$ 生成。以此为基础，我们引入复 (p,q) 投影体。

定义 3.1 对于 $p\geq 1$，$q\in\mathbb{R}$，$K\in\mathcal{K}_o(\mathbb{C}^n)$ 及 $Q\in\mathcal{S}_o(\mathbb{C}^n)$，非对称复 (p,q)-Petty 投影体 $\Pi^+_{p,q,C}(K,Q)\in\mathcal{K}_o(\mathbb{C}^n)$ 通过其支撑函数定义为

$$h_{\Pi^+_{p,q,C}(K,Q)}(u)^p=\frac{1}{\omega_{2n}c_{2n-2,p}}\int_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^1}\left(\Re[cu\cdot v]\right)_+^p\,\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\mathrm{d}\tilde{C}_{p,q}(K,Q,v),\quad\forall u\in\mathbb{S}^n, \tag{3.2}$$

其中归一化常数取为 $c_{2n-2,p}=\dfrac{\omega_{2n+p}}{\omega_{2n}\omega_p\omega_{p-1}}$。

定义 3.1 给出的是非对称复 (p,q)-Petty 投影体 $\Pi^+_{p,q,C}(K,Q)$。由于该算子在 L_p Minkowski 组合下并不保持对称性，为得到与原点对称情形相容的投影体，给出如下一般复 (p,q)-Petty 投影体。

定义 3.2 对于任意 $\lambda\in[0,1]$，一般复 (p,q)-Petty 投影体 $\Pi^{\lambda}_{p,q,C}(K,Q)$ 由 L_p Minkowski 组合定义为

$$\Pi_{p,q,C}^{\lambda}(K,Q)=\lambda\cdot\Pi_{p,q,C}^{+}(K,Q)+_{p}(1-\lambda)\cdot\Pi_{p,q,C}^{-}(K,Q),$$

其中 $\Pi_{p,q,C}^{-}(K,Q)=\Pi_{p,q,C}^{+}(-K,Q)$。

进一步，我们展示复 (p,q)-Petty 投影体算子性质。

引理 3.1 设 $p\geq 1$，$q\in\mathbb{R}$，$K\in\mathcal{K}_o\left(\mathbb{C}^n\right)$ 且 $Q\in\mathcal{S}_o\left(\mathbb{C}^n\right)$。设 $C\in\mathcal{K}(\mathbb{C})$ 为非对称 L_p 带状体。则下列结论成立：

$$\Pi_{p,q,C}^{+}(K,K)=\Pi_{p,C}^{+}K, \tag{3.3}$$

$$\Pi_{p,2n,C}^{+}(K,Q)=\Pi_{p,C}^{+}K, \tag{3.4}$$

其中 $\Pi_{p,C}^{+}K$ 是 K 的 L_p Petty 投影体。

证明：当 $Q=K$ 时，利用 $\rho_K(v)^{2n-q}\rho_K(v)^{q}=\rho_K(v)^{2n}$，由公式(3.2)中的支撑函数可得

$$\begin{aligned}
h_{\Pi_{p,q,C}^{+}(K,K)}(u)^{p}&=\frac{1}{2n\omega_{2n}c_{2n-2,p}}\int_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^1}\left(\Re\left[cu\cdot\alpha_K(v)\right]\right)_{+}^{p}h_K\left(\alpha_K(v)\right)^{-p}\rho_K(v)^{2n}\,\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\,\mathrm{d}\sigma(v)\\
&=\frac{1}{2n\omega_{2n}c_{2n-2,p}}\int_{\partial K}\int_{\mathbb{S}^1}\left(\Re\left[cu\cdot\nu_K(x)\right]\right)_{+}^{p}\left(\Re\left[x\cdot\nu_K(x)\right]\right)^{1-p}\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{2n-1}(x)\\
&=\frac{1}{\omega_{2n}c_{2n-2,p}}\int_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^1}\left(\Re\left[cu\cdot v\right]\right)_{+}^{p}\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\,\mathrm{d}S_{p,K}(v)\\
&=h_{\Pi_{p,C}^{+}K}(u)^{p}.
\end{aligned}$$

当 $q=2n$ 时，因子 $\rho_K(v)^{q}\rho_Q(v)^{2n-q}=\rho_K(v)^{2n}$，与 Q 无关，直接证明了公式(3.4)。

引理 3.2 设 $p\geq 1$，$q\in\mathbb{R}$，$K\in\mathcal{K}_o\left(\mathbb{C}^n\right)$ 且 $Q\in\mathcal{S}_o\left(\mathbb{C}^n\right)$，$\lambda\in[0,1]$。对任意 $\phi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，有

$$\Pi_{p,q,C}^{\lambda}(\phi K,\phi Q)=\left|\det\phi\right|^{\frac{2}{p}}\phi^{-*}\Pi_{p,q,C}^{\lambda}(K,Q).$$

证明：设 $x\in\partial K$，其外单位法向量为 $v=\nu_K(x)$。在变换 ϕ 的作用下，对应的边界点为 $y=\phi x\in\partial(\phi K)$，其外单位法向量为 $w=\nu_{\phi K}(\phi x)=\dfrac{\phi^{-*}v}{\left|\phi^{-*}v\right|}$。由(2.6)式可得，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{C}_{p,q}(\phi K,\phi Q,w)&=\frac{1}{2n}\left(\Re\left[\phi x\cdot w\right]\right)^{1-p}\left\|\phi x\right\|_{\phi Q}^{q-2n}\mathrm{d}\mathcal{H}^{2n-1}(\phi x)\\
&=\frac{1}{2n}\left(\Re\left[\phi x\cdot\frac{\phi^{-*}v}{\left|\phi^{-*}v\right|}\right]\right)^{1-p}\left\|\phi x\right\|_{\phi Q}^{q-2n}\mathrm{d}\mathcal{H}^{2n-1}(\phi x)
\end{aligned}$$

在变换 ϕ 的作用下，边界面积元变换为

$$\mathrm{d}\mathcal{H}^{2n-1}(\phi x)=\left|\det\mathbb{R}[\phi]\right|\left|\phi^{-*}v\right|\mathrm{d}\mathcal{H}^{2n-1}(x)=\left|\det\phi\right|^{2}\left|\phi^{-*}v\right|\mathrm{d}\mathcal{H}^{2n-1}(x).$$

则 (p,q)-对偶曲率测度变换为，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{C}_{p,q}(\phi K,\phi Q,w)&=\frac{1}{2n}\left(\Re\left[\phi x\cdot\frac{\phi^{-*}v}{\left|\phi^{-*}v\right|}\right]\right)^{1-p}\left\|x\right\|_{Q}^{q-2n}\left|\det\phi\right|^{2}\left|\phi^{-*}v\right|\mathrm{d}\mathcal{H}^{2n-1}(x)\\
&=\left|\det\phi\right|^{2}\left|\phi^{-*}v\right|^{p}\left(\frac{1}{2n}\left(\Re\left[x\cdot v\right]\right)^{1-p}\left\|x\right\|_{Q}^{q-2n}\mathrm{d}\mathcal{H}^{2n-1}(x)\right)\\
&=\left|\det\phi\right|^{2}\left|\phi^{-*}v\right|^{p}\mathrm{d}\tilde{C}_{p,q}(K,Q,v).
\end{aligned}$$

将上述测度变换代入支撑函数定义(3.2)式：

$$\begin{aligned}h_{\Pi_{p,q,C}^{+}(\phi K,\phi Q)}(u)^{p}&=\frac{1}{\omega_{2n}c_{2n-2,p}}\int_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^1}\left(\Re\left[cu\cdot w\right]\right)_{+}^{p}\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\mathrm{d}\tilde{C}_{p,q}(\phi K,\phi Q,w)\\&=\frac{\left|\det\phi\right|^{2}}{\omega_{2n}c_{2n-2,p}}\int_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^1}\left(\Re\left[cu\cdot\frac{\phi^{-*}v}{\left|\phi^{-*}v\right|}\right]\right)_{+}^{p}\left|\phi^{-*}v\right|^{p}\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\mathrm{d}\tilde{C}_{p,q}(K,Q,v)\\&=\frac{\left|\det\phi\right|^{2}}{\omega_{2n}c_{2n-2,p}}\int_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^1}\left(\Re\left[c\left(\phi^{-1}u\right)\cdot v\right]\right)_{+}^{p}\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\mathrm{d}\tilde{C}_{p,q}(K,Q,v)\\&=\left|\det\phi\right|^{2}h_{\Pi_{p,q,C}^{+}(K,Q)}\left(\phi^{-1}u\right)^{p}.\end{aligned}$$

由支撑函数的代数恒等式 $h_{\psi L}(u)=h_{L}\left(\psi^{*}u\right)$，令 $\psi=\left|\det\phi\right|^{\frac{2}{p}}\phi^{-*}$，可得

$$h_{\left|\det\phi\right|^{2/p}\phi^{-*}\Pi_{p,q,C}^{+}(K,Q)}(u)=\left|\det\phi\right|^{\frac{2}{p}}h_{\Pi_{p,q,C}^{+}(K,Q)}\left(\phi^{-1}u\right)=h_{\Pi_{p,q,C}^{+}(\phi K,\phi Q)}(u).$$

凸体由其支撑函数唯一确定，故非对称情形成立。通过定义 3.2 将结论线性推广至 $\Pi_{p,q,C}^{\lambda}$，即完成证明。

引理 3.3 ([10])设 $p>1$，$K\in\mathcal{K}_{0}\left(\mathbb{C}^{n}\right)$，且 $C\in\mathcal{K}(\mathbb{C})$ 为非对称 L_p 带状体。则

$$V\left(\Pi_{p,D_pC}^{*}K\right)\le V\left(\Pi_{p,C}^{\lambda,*}K\right)\le V\left(\Pi_{p,C}^{\pm,*}K\right)$$

对每个 $\lambda\in[0,1]$ 成立，其中 $\Pi_{p,D_pC}K:=\Pi_{p,C}^{\frac{1}{2}}K=\frac{1}{2}\Pi_{p,C}^{+}K+_{p}\frac{1}{2}\Pi_{p,C}^{-}K$。若 $\Pi_{p,C}^{+}K\neq\Pi_{p,C}^{-}K$，则左不等式等号成立当且仅当 $\lambda=\frac{1}{2}$，右不等式等号成立当且仅当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=0$。

定理 1.3 即为本文的主要结论，我们在此将该结论重新表述为定理 3.1，并给出详细证明。

定理 3.1 设 $p>1$，$1\le\frac{q}{2n}\le p$，$K\in\mathcal{K}_{o}\left(\mathbb{C}^{n}\right)$，$Q\in\mathcal{S}_{o}\left(\mathbb{C}^{n}\right)$。设 $C\in\mathcal{K}(\mathbb{C})$ 是一个非对称 L_p 带状体，且 $\dim_{\mathbb{R}}C\ge1$。则对每个 $\lambda\in[0,1]$，

$$V(K)^{q-p}V(Q)^{2n-q}V\left(\Pi_{p,q,C}^{\lambda,*}(K,Q)\right)^{p}\le\omega_{2n}^{q-p}\left(\frac{V\left(\Pi_{p,C}^{\lambda,*}B\right)}{V\left(\Pi_{p}^{\lambda,*}B\right)}\right)^{p}V\left(\Pi_{\frac{2np}{q}}^{\lambda,*}B\right)^{p}.\tag{3.5}$$

等号成立情况：

(a) 当 $q=2n$ 且 $\dim_{\mathbb{R}}C=1$ 时，当且仅当 K 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中以原点为中心的实椭球。

(b) 当 $q=2n$ 且 $\dim_{\mathbb{R}}C=2$ 时，当且仅当 K 是 $\mathbb{C}^{n}$ 中以原点为中心的 Hermite 椭球。

证明：由定义 3.1 和 Fubini 定理，

$$\begin{aligned}h_{\Pi_{p,q,C}^{+}(K,Q)}(u)^{p}&=\frac{1}{\omega_{2n}c_{2n-2,p}}\int_{\mathbb{S}^1}\left(\int_{\mathbb{S}^n}\left(\Re\left[cu\cdot v\right]\right)_{+}^{p}\mathrm{d}\tilde{C}_{p,q}(K,Q,v)\right)\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\\&=\frac{1}{\omega_{2n}c_{2n-2,p}}\int_{\mathbb{S}^1}h_{\bar{c}\Pi_{p,q}^{+}(K,Q)}(u)^{p}\,\mathrm{d}\mu_{p,C}(c).\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中 $\bar{c}$ 是 $\mathbb{S}^1$ 上积分变量 c 的共轭。应用公式(2.6)，

$$h_{\bar{c}\Pi_{p,q}^{+}(K,Q)}(u)^{p}=\frac{1}{2n}\int_{\partial K}\left(\Re\left[\bar{c}u\cdot\nu_{K}(x)\right]\right)_{+}^{p}\left(\Re\left[x\cdot\nu_{K}(x)\right]\right)^{1-p}\left\|x\right\|_{Q}^{q-2n}\mathrm{d}\mathcal{H}^{2n-1}(x).$$

对 $q>2n$，利用 Hölder 不等式，

$$\begin{aligned}h_{\overline{c}\Pi_{p,q}^{+}(K,Q)}(u)^{p} &\geq \left(\frac{1}{2n}\int_{\partial K}\left(\Re\left[\overline{c}u\cdot\nu_{K}(x)\right]\right)_{+}^{\frac{2np}{q}}\left(\Re\left[x\cdot\nu_{K}(x)\right]\right)^{1-\frac{2np}{q}}\mathrm{d}\mathcal{H}^{2n-1}(x)\right)^{\frac{q}{2n}}\\ &\quad\times\left(\frac{1}{2n}\int_{\mathbb{S}^{n}}\rho_{Q}(v)^{2n}\,\mathrm{d}\sigma(v)\right)^{\frac{2n-q}{2n}}\\ &=V(Q)^{\frac{2n-q}{2n}}\left(h_{\overline{c}\Pi_{\frac{2np}{q}}^{+}K}(u)^{\frac{2np}{q}}\right)^{\frac{q}{2n}}\\ &=V(Q)^{\frac{2n-q}{2n}}h_{\overline{c}\Pi_{\frac{2np}{q}}^{+}K}(u)^{p}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

由公式(2.5)，并利用与 $\mu_{p,C}$ 的加权平均关系，(3.6)，可得

$$\begin{aligned}V\left(\Pi_{p,q,C}^{+,*}(K,Q)\right)&=\frac{1}{2n}\int_{\mathbb{S}^{n}}h_{\Pi_{p,q,C}^{+}(K,Q)}(u)^{-2n}\,\mathrm{d}\sigma(u)\\ &=\frac{\left|\mu_{p,C}\right|^{-\frac{2n}{p}}}{2n}\int_{\mathbb{S}^{n}}\left[\frac{1}{\left|\mu_{p,C}\right|}\int_{\mathbb{S}^{1}}h_{\overline{c}\Pi_{p,q}^{+}(K,Q)}(u)^{p}\,\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\right]^{-\frac{2n}{p}}\mathrm{d}\sigma(u)\end{aligned}\tag{3.8}$$

我们利用 Jensen's 不等式处理关于测度 $\mu_{p,c}$ 的加权平均。具体而言，对固定的 $u\in\mathbb{S}^{n}$，由 $-\frac{2n}{p}<0$ 可知函数 $\varphi(t)=t^{-\frac{2n}{p}}$ 在 $t>0$ 上是凸函数。因此，对概率测度 $\frac{\mathrm{d}\mu_{p,c}}{\left|\mu_{p,c}\right|}$ 应用 Jensen's 不等式，可得

$$\left[\frac{1}{\left|\mu_{p,c}\right|}\int_{\mathbb{S}^{1}}h_{\overline{c}\Pi_{p,q}^{+}(K,Q)}(u)^{p}\,\mathrm{d}\mu_{p,c}(c)\right]^{-\frac{2n}{p}}\leq\frac{1}{\left|\mu_{p,c}\right|}\int_{\mathbb{S}^{1}}h_{\overline{c}\Pi_{p,q}^{+}(K,Q)}(u)^{-2n}\,\mathrm{d}\mu_{p,c}(c).\tag{3.9}$$

将(3.9)式和(3.7)式代入 $\Pi_{p,q,C}^{+,*}(K,Q)$ 的体积表达式(3.8)，即得

$$\begin{aligned}V\left(\Pi_{p,q,C}^{+,*}(K,Q)\right)&=\frac{\left|\mu_{p,C}\right|^{-\frac{2n}{p}}}{2n}\int_{\mathbb{S}^{n}}\left[\frac{1}{\left|\mu_{p,C}\right|}\int_{\mathbb{S}^{1}}h_{\overline{c}\Pi_{p,q}^{+}(K,Q)}(u)^{p}\,\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\right]^{-\frac{2n}{p}}\mathrm{d}\sigma(u)\\ &\leq\frac{\left|\mu_{p,C}\right|^{-\frac{2n}{p}-1}}{2n}\int_{\mathbb{S}^{n}}\int_{\mathbb{S}^{1}}h_{\overline{c}\Pi_{p,q}^{+}(K,Q)}(u)^{-2n}\,\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\mathrm{d}\sigma(u)\\ &\leq\frac{\left|\mu_{p,C}\right|^{-\frac{2n}{p}-1}}{2n}\int_{\mathbb{S}^{n}}\int_{\mathbb{S}^{1}}V(Q)^{\frac{2n-q}{-p}}h_{\overline{c}\Pi_{\frac{2np}{q}}^{+}K}(u)^{-2n}\,\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\mathrm{d}\sigma(u)\\ &=\frac{\left|\mu_{p,C}\right|^{-\frac{2n}{p}-1}}{2n}V(Q)^{\frac{2n-q}{-p}}\int_{\mathbb{S}^{1}}\int_{\mathbb{S}^{n}}h_{\overline{c}\Pi_{\frac{2np}{q}}^{+}K}(u)^{-2n}\,\mathrm{d}\sigma(u)\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\\ &=\left|\mu_{p,C}\right|^{-\frac{2n}{p}-1}V(Q)^{\frac{2n-q}{-p}}\int_{\mathbb{S}^{1}}V\left(\overline{c}\Pi_{\frac{2np}{q}}^{+,*}K\right)\mathrm{d}\mu_{p,C}(c)\\ &=\left|\mu_{p,C}\right|^{-\frac{2n}{p}}V(Q)^{\frac{2n-q}{-p}}V\left(\Pi_{\frac{2np}{q},C}^{+,*}K\right)\end{aligned}\tag{3.10}$$

结合引理 3.3 可得，

$$V\left(\Pi_{p,q,C}^{\lambda,*}\left(K,Q\right)\right)\le\left|\mu_{p,C}\right|^{-\frac{2n}{p}}V\left(Q\right)^{\frac{2n-q}{-p}}V\left(\Pi_{\frac{2np}{q},C}^{\lambda,*}K\right).\tag{3.11}$$

由于 $\imath\Pi_{\frac{2np}{q},C}^{\lambda,*}K=\Pi_{\frac{2np}{q}}^{\lambda,*}\imath K$，应用实 L_p-Petty 投影不等式(1.1)，即 $1\le\frac{q}{2n}\le p$ 时，

$$V\left(\Pi_{\frac{2np}{q},C}^{\lambda,*}K\right)\le\omega_{2n}^{\frac{q-p}{p}}V\left(K\right)^{\frac{p-q}{p}}V\left(\Pi_{\frac{2np}{q}}^{\lambda,*}B\right).\tag{3.12}$$

将(3.11)式两边同时 p 次方，并将公式(3.12)带入(3.11)式中，得到

$$\begin{aligned}V\left(\Pi_{p,q,C}^{\lambda,*}\left(K,Q\right)\right)^p&\le\left|\mu_{p,C}\right|^{-2n}V\left(Q\right)^{q-2n}V\left(\Pi_{\frac{2np}{q}}^{\lambda,*}K\right)^p\\&\le\left|\mu_{p,C}\right|^{-2n}\omega_{2n}^{q-p}V\left(Q\right)^{q-2n}V\left(\Pi_{\frac{2np}{q}}^{\lambda,*}K\right)^pV\left(K\right)^{p-q}V\left(\Pi_{\frac{2np}{q}}^{\lambda,*}B\right)^p.\end{aligned}\tag{3.13}$$

取 $\left|\mu_{p,C}\right|=\mu_{p,C}\left(\mathbb{S}^1\right)=\left(\frac{V\left(\Pi_p^{+,*}B\right)}{V\left(\Pi_{p,C}^{+,*}B\right)}\right)^{\frac{p}{2n}}$，整理(3.13)式得

$$V\left(K\right)^{q-p}V\left(Q\right)^{2n-q}V\left(\Pi_{p,q,C}^{\lambda,*}\left(K,Q\right)\right)^p\le\omega_{2n}^{q-p}\left(\frac{V\left(\Pi_{p,C}^{\lambda,*}B\right)}{V\left(\Pi_p^{\lambda,*}B\right)}\right)^pV\left(\Pi_{\frac{2np}{q}}^{\lambda,*}B\right)^p.$$

等号成立时，当且仅当(3.7)式中 Hölder 不等式、(3.11)式中 Jensen’s 不等式及(3.12)式均取等号。当 $q=2n$ 时，(3.7)式中 Hölder 不等式等号成立；(3.12)式等号成立当且仅当 K 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中以原点为中心的实椭球；(3.11)式中 Jensen’s 不等式等号成立条件为，存在 $d\in\mathbb{S}^1$，使得对 $\mu_{p,C}$-几乎所有的 $c\in\mathbb{S}^1$，有 $\overline{c}\Pi_p^+K=d\Pi_p^+K$。当 $q=2n$ 时，下面分两种情况讨论：

(a) 若 $\dim_{\mathbb{R}}C=1$，则 C 是复平面上的一条线段，对称性是平凡的。于是，等号成立当且仅当 K 必须是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中以原点为中心的实椭球。

(b) 若 $\dim_{\mathbb{R}}C=2$，则 $\mathrm{supp}\left(\mu_{p,C}\right)$ 张成 $\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$。因此存在两个非对径点 $c_1,c_2\in\mathrm{supp}\left(\mu_{p,C}\right)$，使得 $\overline{c}_1\Pi_p^+K=\overline{c}_2\Pi_p^+K$。令 $c=\overline{c}_1\overline{c}_2^{-1}\in\mathbb{S}^1$，则 $c\Pi_p^+K=\Pi_p^+K$，且 $\Im\left[c\right]\ne0$。由定义 2.2，则 Π_p^+K 是以原点为中心的厄米特椭球，从而 K 也是以原点为中心的 Hermite 椭球，即存在 $\phi\in\mathrm{GL}\left(n,\mathbb{C}\right)$ 使得 $K=\phi B$。

注释： $q=2n$ 时，由引理 3.1 可知，复 $\left(p,q\right)$-Petty 投影体退化为复 L_p-Petty 投影体，即定理 3.1 退化为定理 1.2。

4. 结语

本文在复空间 $\mathbb{C}^n$ 中研究定义了复 $\left(p,q\right)$-Petty 投影体，并证明了其统一性与 $\mathrm{GL}\left(n,\mathbb{C}\right)$-协变性。利用加权平均、Hölder 不等式与 Jensen 不等式，并结合实 L_p-Petty 投影不等式，建立了相应的复仿射等周不等式。进一步，分别在 $\dim_{\mathbb{R}}C=1$ 与 $\dim_{\mathbb{R}}C=2$ 两种情形下刻画了等号成立条件，得到极值体分别为 $\mathbb{R}^{2n}$ 中包含原点的实椭球与 $\mathbb{C}^n$ 中的包含原点的 Hermite 椭球。本文的结果为进一步研究复凸几何中的仿射等周问题提供了新的框架。

同时本文讨论的复 $\left(p,q\right)$-Petty 仿射等周不等式主要局限于 $q\ge2n$ 时的情形，对于一般 $q<2n$ 时的等

周不等式尚未讨论，同时证明本质上是“化复为实”，复(p,q)-Petty 投影体自身的复几何性质展开不足，相关 Sobolev 不等式尚未研究。

未来可从以下方向展开：其一，突破$q \geq 2n$的限制，研究一般情形下复(p,q)-Petty 投影体的仿射等周不等式及其等号条件，明确极值体的几何形态随参数q变化的规律。其二，利用复结构系统的研究复(p,q)-Petty 投影体自身的复几何性质，以及其与复椭球、Hermite 椭球之间的内在联系。其三，建立相关的复仿射 Sobolev 不等式，探究几何不等式与复泛函分析之间的联系。其四，将复(p,q)-Petty 投影体推广至 Orlicz 情形，建立复 Orlicz 投影体及相应的等周不等式，进一步丰富复凸几何中的仿射等周理论体系。

参考文献

[1] Petty, C.M. (1985) Affine Isoperimetric Problems. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **440**, 113-127. https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1985.tb14545.x

[2] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G.Y. (2000) L_p Affine Isoperimetric Inequalities. *Journal of Differential Geometry*, **56**, 111-132. https://doi.org/10.4310/jdg/1090347527

[3] Haberl, C. and Schuster, F.E. (2009) General L_p Affine Isoperimetric Inequalities. *Journal of Differential Geometry*, **83**, 1-26. https://doi.org/10.4310/jdg/1253804349

[4] Ludwig, M. (2005) Minkowski Valuations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **357**, 4191-4213. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-04-03666-9

[5] Huang, Y., Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G.Y. (2016) Geometric Measures in the Dual Brunn-Minkowski Theory and Their Associated Minkowski Problems. *Acta Mathematica*, **216**, 325-388. https://doi.org/10.1007/s11511-016-0140-6

[6] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G.Y. (2018) L_p Dual Curvature Measures. *Advances in Mathematics*, **329**, 85-132. https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.02.011

[7] Fang, N.F., Wang, H.J. and Zhang, Z.L. (2022) L_p-Cosine Transform of the (p,q)-Th Dual Curvature Measure. *Mathematische Nachrichten*, **295**, 2393-2404. https://doi.org/10.1002/mana.202000084

[8] Abadia, J. and Bernig, A. (2011) Projection Bodies in Complex Vector Spaces. *Advances in Mathematics*, **227**, 830-846. https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.02.013

[9] Haberl, C. (2019) Complex Affine Isoperimetric Inequalities. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **58**, Article No. 169. https://doi.org/10.1007/s00526-019-1609-x

[10] Wang, W. and Liu, L.J. (2021) Complex L_p Affine Isoperimetric Inequalities. *Advances in Applied Mathematics*, **122**, Article 102108. https://doi.org/10.1016/j.aam.2020.102108

[11] Gardner, R.J. (2006) Geometric Tomography. 2nd Edition, Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9781107341029