Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(11), 18-33
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1611231

Hans汉斯

对数凹测度的Christoffel问题中凸光滑解的存在性与唯一性

邱承海

广西师范大学数学与统计学院，广西 桂林

收稿日期：2026年9月22日；录用日期：2026年10月26日；发布日期：2026年11月4日

摘　要

本文研究 n 维球面 $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 上的如下非线性椭圆方程，证明其存在唯一的光滑凸解：

$$\Delta S + nS = \mathrm{e}^{\phi\left(S^2+|\nabla S|^2\right)} S^p f\left(\xi\right)$$

该方程对应对数凹测度 $\mathrm{e}^{-\phi\left(|x|^2\right)}\mathrm{d}x$ 的 Christoffel 型问题。解的存在性采用经典连续性方法证明，该方法的核心是解的先验估计；唯一性借助极大值原理得到，关键在于对线性化方程的核空间开展分析；凸性由秩不变定理推得，核心是矩阵 $\left(S_{ij}+\delta_{ij}S\right)_{n\times n}$ 小特征值所满足的微分不等式。本文主要结论进一步丰富了对数凹测度 $\mathrm{e}^{-\phi\left(|x|^2\right)}\mathrm{d}x$ 的几何分析相关研究成果。

关键词

拟线性椭圆方程，光滑解，凸解，不动点定理，先验估计

Existence and Uniqueness of Convex Smooth Solutions to a Christoffel Problem for Log-Concave Measures

Chenghai Qiu

College of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi

Received: September 22, 2026; accepted: October 26, 2026; published: November 4, 2026

文章引用: 邱承海. 对数凹测度的 Christoffel 问题中凸光滑解的存在性与唯一性[J]. 理论数学, 2026, 16(11): 18-33.
DOI: 10.12677/pm.2026.1611231

Abstract

In the present paper, we prove that there exists a unique convex smooth solution to the following nonlinear elliptic equation on n-sphere $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\Delta S + nS = e^{\phi\left(S^2+|\nabla S|^2\right)} S^p f\left(\xi\right)$$

which is a Christoffel type problem for log-concave measures $e^{-\phi\left(|x|^2\right)}dx$. The existence is based on the well-known continuous method whose core factor is a priori bounds of solutions. The uniqueness is based on a Maximum Principle whose core factor is the analysis of kernel of the linearized equation. The convexity follows from constant rank theorem whose core factor is a differential inequality for the small eigenvalue of $\left(S_{ij}+\delta_{ij}S\right)_{n\times n}$. The main result of the present paper is to get more results on the geometric analysis of log-concave measures $e^{-\phi\left(|x|^2\right)}dx$.

Keywords

Quasilinear Elliptic Equations, Smooth Solutions, Convex Solution, Fixed Point Theorem, A Priori Bounds

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

近年来，对数凹测度 $d\mu(x)=e^{f(x)}dx$ 的几何与分析受到越来越多的关注，例如 Sobolev 不等式[1]、Log-Sobolev 不等式[2]、Brunn-Minkowski 不等式[3] [4]等。此外，针对对数凹测度还发展了更多的几何概念，例如平均宽度、支撑函数、Minkowski 和与混合体积理论[5]-[7]，以及重要的 Minkowski 型问题[8]-[13]。

问题 A.1 (Minkowski 型问题[14])对于任意固定的 $n\geq 1$ 和 $p\in\mathbb{R}$，给定一个支撑在单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上的 Borel 测度 μ，求一个凸超曲面 $M\subseteq\mathbb{R}^n$ 使得

$$\nu_\sharp\left(S^{-p}e^{-\varphi\left(|x|^2\right)}d\sigma\right)=d\mu \tag{1.1}$$

其中 ν, S 和 $d\sigma$ 分别为凸超曲面 M 的法映射、支撑函数和表面积测度，且 φ 为凸函数。

若因子 $e^{-\varphi\left(|x|^2\right)}$ 消失，则问题 A.1 称为经典 L_{p+1}-闵可夫斯基问题，由 Minkowski 和 Lutwak 分别针对 $p=0$ 和一般的 p 提出(见[14])。当 μ 为 δ 测度之和或当 $p=0$ 且 μ 具有连续密度时，Minkowski 解决了该问题。后来 Aleksandrov [15]、Fenchel 和 Jensen [16]将 Minkowski 的结果独立推广到一般的博雷尔测度。对于一般的 p，Lutwak [17]在测度 μ 为偶测度时通过变分法解决了问题 A.1；随后 Lutwak 和 Oliker [18]用连续方法解决了该问题，更多关于经典 L_{p+1}-闵可夫斯基问题的结果见[19]-[23]。对于一般的连续递增函数 f，问题 A.1 由 Haberl、Lutwak、Yang 和 Zhang 提出，并在测度 $d\mu$ 为偶测度时通过变分法解决(见[14])。

对于对数凹测度 $\mathrm{d}\mu$，高斯测度是其经典例子之一，其定义如下：对任意博雷尔集 $E\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$，

$$\gamma_n(E)=\int_E(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

高斯测度与随机分析中的高斯广义随机过程密切相关，参见 Gel'fand 和 Vilenkin [24]第 246~261 页。若因子 $\mathrm{e}^{\varphi(|x|^2)}$ 为高斯函数 $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}$，则问题 A.1 称为高斯空间中的 Minkowski 型问题，由 Huang、Xi 和 Zhao [11]在 $f(u)=1$ 时提出，并在高斯测度较大时得到解决。后来，Liu [12]提出了高斯空间中的 L_{p+1}-闵可夫斯基问题(取 $f(u)=u^p$)，更多关于高斯空间或一般对数凹测度中闵可夫斯基型问题的结果可参见[9] [13]。

在光滑情形下，闵可夫斯基型问题等价于单位球面 S^n 上的如下完全非线性方程：

$$S^{-p}\mathrm{e}^{-\varphi(\rho^2)}K^{-1}=S^{-p}\mathrm{e}^{-\varphi(\rho^2)}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}=\psi \tag{1.3}$$

式 u， ρ 与 $\lambda_i\left(i\in\{1,2,\cdots,n\}\right)$ 分别为超曲面 M 的支撑函数、径向函数与主曲率； ψ 是测度 $\mathrm{d}\mu$ 关于球面 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}\xi$ 的密度函数。这表明闵可夫斯基型问题是一类几何问题，它对高斯曲率的倒数给出约束信息。除主曲率 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的倒数乘积之外，主曲率倒数之和同样具有研究价值，它刻画了平均曲率半径的相关信息。由此自然引出下面的问题：

问题 A.2 对任意给定的整数 $n\geq1$ 与实数 $p\in\mathbb{R}$，设 ψ 为定义在单位球面 S^n 上的正有限函数，求凸超曲面 $M\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$，使得 M 的平均曲率半径等于

$$S^p\mathrm{e}^{\phi(\rho^2)}f(\xi), \tag{1.4}$$

用测度的语言表述为：对任意给定的 $n\geq1$，设 $\mathrm{d}\mu(\xi)=f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 是支撑于单位球面 S^n 上的博雷尔测度，求凸超曲面 $M\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$，满足

$$S^{-p}\mathrm{e}^{-\phi(\rho^2)}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}\mu \tag{1.5}$$

式中 S,ρ 与 $\lambda_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 分别为超曲面 M 的支撑函数、径向函数与主曲率，$\phi:(0,\infty)\mapsto(0,\infty)$ 为光滑凸函数。

问题 A.2 可称为对数凹测度 $\mathrm{e}^{-\phi(|x|^2)}\mathrm{d}x$ 下的 Christoffel 型问题。事实上，若因子 $\mathrm{e}^{\phi(\rho^2)}$ 与参数 p 均取零，**问题 A.2** 最初由 Christoffel 提出[25]，Firey 给出了解[26] [27]，另可参见文献[28]-[32]中 Guan、Ma 及其他们的合作者的系列工作，Li、Wan、Wang [33]，Pogorelov [34]等相关文献。

不难验证，对任意固定的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\frac{1}{\lambda_i}$ 是矩阵 $\left(S_{ij}+\delta_{ij}S\right)$ 的特征值，且 $\rho^2=|\nabla S|^2+S^2$，详见 Schneider 的工作[14]。因此方程(1.4)等价于单位球面 S^n 上的下述方程：

$$\Delta S+nS=S^p\mathrm{e}^{\phi(\rho^2)}f(\xi).$$

为避免混淆，现将(1.6)式定义为 $\tilde{f}(\xi)$：

$$\Delta S+nS=S^p\mathrm{e}^{\phi(\rho^2)}f(\xi)\triangleq\tilde{f}(\xi). \tag{1.6}$$

(1.6)式中的 $\phi\left(S^2+|\nabla S|^2\right)$ 与几何背景中的 $\phi\left(|x|^2\right)$ 具有一致的来源。在单位球面 S^n 上，径向函数满足

$\rho^2=|x|^2=S^2+|\nabla S|^2$，见 Schneider [14]，因此几何测度 $\mathrm{e}^{-\phi\left(|x|^2\right)}\mathrm{d}x$ 中的 $\phi\left(|x|^2\right)$ 在球面上转化为 $\phi\left(\rho^2\right)=\phi\left(S^2+|\nabla S|^2\right)$。PDE 中的这一项正是几何背景在支撑函数表示下的直接体现。

在陈述本文的主要结果之前，先给出以下假设条件：

(A.1) $0<f\in C^1\left(\mathbb{S}^n\right)$，满足

$$|f|_{C^1\left(\mathbb{S}^n\right)}<\infty. \tag{1.7}$$

(A.2) $\phi:(0,\infty)\mapsto(0,\infty)$ 为光滑、单调递增的凸函数，满足 $\min\limits_{t\in[0,\infty)}\phi'(t)>0$，且

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\phi\left(s^2\right)}}{s^2}=\infty,\lim_{s\to 0}\mathrm{e}^{\phi\left(s^2\right)}=1. \tag{1.8}$$

(A.3) 矩阵 $\left(f^{-q}\right)_{ij}+\delta_{ij}f^{-q}$ 为凹矩阵，其中 $q=\dfrac{1}{p+1}$。

本文的主要结论叙述如下：

定理 1.1 对任意给定的整数 $n\geq 1$ 和实数 $p>1$。若条件(A.1)~(A.3)成立，则方程(1.6)存在唯一的正凸解 $S\in C^2\left(\mathbb{S}^n\right)$，且满足

$$\|S\|_{C^2\left(\mathbb{S}^n\right)}\leq c \tag{1.9}$$

其中常数 c 仅依赖于 n,α 和 ψ。

注记 1.2 现讨论假设条件(A.2)和条件(A.3)的动机与合理性以及关于 $p>1$ 的必要性。

条件(A.2)要求 ϕ 是光滑递增凸函数，且 $\min\limits_{t\in[0,\infty)}\phi'(t)>0$、$\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\phi\left(s^2\right)}}{s^2}=\infty,\lim\limits_{s\to 0}\mathrm{e}^{\phi\left(s^2\right)}=1$。这些条件保证方程右端的非线性项具有足够的增长性，从而使极值原理和先验估计得以进行。典型的满足条件的函数包括 $\phi(t)=\dfrac{1}{2}t$ 以及 $\phi(t)=t+\ln(1+t)$ 等。

条件(A.3)即 $\left(f^{-q}\right)_{ij}+\delta_{ij}f^{-q}$ 为凹矩阵，这是证明解凸性的关键。它来源于常秩定理中对最小特征值建立微分不等式时的零阶项符号控制(详见第 3.3 节)。这一条件在 Christoffel-Minkowski 问题的研究中有，参见 Guan-Ma [29]和 Hu-Ma-Shen [32]。

关于 $p>1$ 的限制：这一条件在唯一性证明中起着核心作用。在线性化方程(3.8)中，零阶项系数为 $C=\phi'\left(\rho^2\right)\rho^2+p-1$。当 $p>1$ 时，由(A.2)知 $\phi'>0$，从而 $C>0$，这保证了极值原理的适用性，是证明线性化方程核为零(引理 3.2)及解唯一性的必要条件。若 $p\leq 1$，则 C 可能为零或负，此时，极值原理将不再适用，唯一性无法证明。

证明的唯一性部分基于方程(1.6)所对应的线性化方程的最大值原理论证。为完成证明，需要细致分析线性化方程的核空间。

存在性部分的证明采用经典的连续性方法，参见 Gilbarg 和 Trudinger 的著作[35]。在此框架下，我们先在单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上考虑如下辅助问题：

$$\Delta S+nS=f_t(\xi)S^p\mathrm{e}^{\phi\left(S^2+|\nabla S|^2\right)} \tag{1.10}$$

对于任意 $t\in[0,1]$，其中 $f_t=tf(\xi)+(1-t)n\mathrm{e}^{-\phi(1)}$。证明的核心步骤是得到方程(1.10)解的先验估计。

解的凸性由常秩定理导出，其核心是分析矩阵 $\left(S_{ij}+\delta_{ij}S\right)_{n\times n}$ 的小特征值对应的微分不等式。

在本文中，记 $C\left(\mathbb{S}^n\right), C^1\left(\mathbb{S}^n\right)$ 与 $C^{1,\alpha}\left(\mathbb{S}^n\right)$ 为单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上具有标准范数的某些 Banach 空间，范数的定义可参见 Gilbarg 和 Trudinger 的著作[35]。

本文的其余部分安排如下：第 2 节给出解的先验界估计；第 3 节证明定理 1.1。

2. 先验估计

本节考虑 n 维单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上方程(1.6)解的先验界。

本节的主要结论如下：

定理 2.0 对任意给定的整数 $n \geq 1$ 和实数 $p > 1$，令 $S \in C^1\left(\mathbb{S}^n\right)$ 为方程(1.6)的解。假设条件(A.1)~(A.2)成立，则存在与解 S 无关的正常数 c，使得

$$0 < c^{-1} \leq \|S\|_{C^2\left(\mathbb{S}^n\right)} \leq c < \infty. \tag{2.1}$$

我们将定理 2.0 的证明拆分为下面两个引理。

引理 2.1 对任意给定的整数 $n \geq 1$ 和实数 $p > 1$，令 $S \in C^1\left(\mathbb{S}^n\right)$ 为方程(1.6)的解。假设条件(A.1)~(A.2)成立，则存在与 u 无关的正常数 c，使得

$$0 < c^{-1} \leq S\left(\xi\right) \leq C < \infty. \tag{2.2}$$

对任意 $\xi \in \mathbb{S}^n$ 成立。

证明. 考虑如下极值问题

$$R = \max_{\xi \in \mathbb{S}^n} S\left(\xi\right). \tag{2.3}$$

由 $\mathbb{S}^n$ 的紧性与 S 的连续性，存在点 $\xi_1 \in \mathbb{S}^n$，满足

$$R = S\left(\xi_1\right). \tag{2.4}$$

于是在点 $\xi = \xi_1$ 处，有

$$nR \geq R^p \mathrm{e}^{\phi\left(R^2\right)} f\left(\xi_1\right) \geq R^p \mathrm{e}^{\phi\left(R^2\right)} \min_{\xi \in \mathbb{S}^n} f\left(\xi\right) \tag{2.5}$$

整理得

$$\frac{n}{\min\limits_{\xi \in \mathbb{S}^n} f\left(\xi\right)} \geq R^{p-1} \mathrm{e}^{\phi\left(R^2\right)}. \tag{2.6}$$

结合条件(A.1)~(A.2)，存在正常数 $c > 0$，使得

$$R \leq c < \infty. \tag{2.7}$$

接下来考虑极值问题

$$r = \min_{\xi \in \mathbb{S}^n} S\left(\xi\right) \tag{2.8}$$

对任意 $t \in [0,1]$。采用与上面类似的论证，存在正常数 $c > 0$，满足

$$r \geq \frac{1}{c} > 0. \tag{2.9}$$

式(2.7)与(2.9)即给出引理 2.1 的结论。

引理 2.2 对于任意固定的整数 $n \geq 1$ 和实数 $p > 1$，令 $S \in C^1\left(\mathbb{S}^n\right)$ 为方程(1.6)的解。假设条件(A.1)~(A.2)成立，则存在不依赖于 S 的正常数 c，使得

$$\left\|\nabla S\right\|_{C^0\left(\mathbb{S}^n\right)} \le c < \infty. \tag{2.10}$$

证明. 基于最大值原理。记 $G = \mathrm{e}^{-2S} v = \mathrm{e}^{-2S} \left|\nabla S\right|^2$。假设上确界 $\sup G$ 在点 $\xi = \xi_2 \in \mathbb{S}^n$ 处取得。于是在 $\xi = \xi_2$ 处，有

$$0 = G_i = 2\mathrm{e}^{-2S}\left(-vS_i + \sum_l S_l S_{li}\right) \tag{2.11}$$

对任意固定的 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ 成立，且矩阵 $\left(G_{ij}\right)_{n\times n}$ 在点 $\xi = \xi_2$ 处半负定。由式(2.11)在点 $\xi = \xi_2$ 处直接计算可得

$$G_{ii} = 2\mathrm{e}^{-2S}\left(-vS_{ii} - \sum_l S_l S_{li} S_i + \sum_l S_{li} S_{li} + \sum_l S_l S_{lii}\right)$$

其中 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$。因此

$$\begin{aligned} 0 &\ge \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2S}\Delta G \\ &= \sum_i \left(-vS_{ii} - \sum_l S_l S_{li} S_i + \sum_l S_{li} S_{li} + \sum_l S_l S_{lii}\right) \\ &= -v\Delta S - \sum_{il} S_l S_i S_{il} + \sum_{il} S_{il}^2 + \sum_{il} S_l S_{lii} \\ &= \sum_{i=1}^4 I_i \end{aligned} \tag{2.12}$$

其中

$$I_1 = -v\Delta S, I_2 = -\sum_{il} S_l S_i S_{il}, I_3 = \sum_{il} S_{il}^2, I_4 = \sum_{il} S_l S_{lii}. \tag{2.13}$$

不失一般性，不妨假设 $v\left(\xi_2\right) \gg 1$；否则，不等式(2.10)显然成立。

选取合适的局部坐标，使得在点 $\xi = \xi_2$ 处有

$$\frac{S_i}{\sqrt{v}} = \delta_{i1} = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i \ne 1 \end{cases}. \tag{2.14}$$

进一步，由(2.11)与(2.14)可得

$$S_{1i} = v\delta_{i1}. \tag{2.15}$$

下面给出 $\sum_{i=1}^4 I_i$ 的估计。第一步先分析 $I_1 = -v\Delta S$。结合方程(1.6)，在点 $\xi = \xi_2$ 处有

$$I_1 = -v\left(\tilde{f} - nS\right) = -vS^p \mathrm{e}^{\phi\left(\rho^2\right)} f + nSv \ge -vS^p \mathrm{e}^{\phi\left(\rho^2\right)} f \tag{2.16}$$

接下来估计 $I_2 = -\sum_{il} S_l S_i S_{il}$。

在点 $\xi = \xi_2$ 处，

$$I_2 = -\sum_{il} S_i S_l S_{il} = -v^2 \tag{2.17}$$

再估计 $I_3 = \sum_{il} S_{ij}^2$。容易得到，在点 $\xi = \xi_2$ 处

$$I_3 = \sum_{il} S_{li}^2 \ge \sum_i S_{1i}^2 = v^2 \tag{2.18}$$

最后估计 $I_4 = \sum_{il} S_l S_{lii}$。由 $\Delta S = \tilde{f} - nS$，我们有

$$\sum_i S_{iit} = \left(\tilde{f} - nS\right)_t \tag{2.19}$$

对于任意固定的 $t \in \{1,2,\cdots,n\}$。在(2.19)两边乘以 S_t 并对指标 t 求和，我们得到

$$\sum_{it} S_t S_{iit} = \sum_l \left(\tilde{f} - nS\right)_t S_t. \tag{2.20}$$

在点 $\xi=\xi_2$ 处，我们有

$$\sum_i S_1 S_{ii1} = \left(\tilde{f} - nS\right)_1 S_1. \tag{2.21}$$

由 Ricci 恒等式，

$$\sum_{ti} S_t \left(S_{tii} - S_{iit}\right) = (n-1)\sum_t S_t^2 = (n-1)v \tag{2.22}$$

则在点 $\xi=\xi_2$ 处有

$$\sum_i S_1 \left(S_{1ii} - S_{ii1}\right) = (n-1)S_1^2 = (n-1)v \tag{2.23}$$

于是

$$\sum_i S_1 S_{1ii} - \sum_i S_1 S_{ii1} = (n-1)v$$

在点 $\xi=\xi_2$ 处。结合上式、(2.21)和(2.22)，我们有

$$\begin{aligned} I_4 &= \sum_i S_1 S_{1ii} = \sum_i S_1 S_{ii1} + (n-1)v \\ &= \left(\tilde{f} - nS\right)_1 S_1 + (n-1)v \\ &= \tilde{f}_1 S_1 - nv + nv - v \\ &= \tilde{f}_1 S_1 - v. \end{aligned} \tag{2.24}$$

我们接下来估计 $\tilde{f}_1 S_1$。由于

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 S_1 &= \left(S^p \mathrm{e}^{\phi(\rho^2)} f(\xi)\right)_1 S_1 \\ &= \mathrm{e}^{\phi(\rho^2)} S^{p-1}\left(pvf + fS\phi'(\rho^2)(\rho^2)_1 S_1 + Sf(\xi)_1 S_1\right) \\ &= \mathrm{e}^{\phi(\rho^2)} S^{p-1}\left(pvf + 2fS\phi'(\rho^2)(Sv + vS_{11}) + Sf(\xi)_1 S_1\right) \\ &= \mathrm{e}^{\phi(\rho^2)} S^{p-1}\left(pvf + 2fS\phi'(\rho^2)(Sv + v^2) + Sf(\xi)_1 S_1\right) \\ &= 2\mathrm{e}^{\phi(\rho^2)} S^{p+1} f\phi'(\rho^2) v^2 - c_1 \end{aligned} \tag{2.25}$$

对于充分大的 v 成立，其中 c_1 为仅依赖于 n, p, ϕ 和 f 的常数。因此，

$$I_4 \geq 2\mathrm{e}^{\phi(\rho^2)} S^{p+1} f\phi'(\rho^2) v^2 - v - c_1 \tag{2.26}$$

对于充分大的 v 成立。

于是，由(2.16)、(2.17)、(2.18)、(2.25)、(2.12)和条件(A.2)可知

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{i=1}^4 I_i \\ &\geq -vS^p \mathrm{e}^{\phi(\rho^2)} f - v^2 + v^2 + 2\mathrm{e}^{\phi(\rho^2)} S^{p+1} f\phi'(\rho^2) v^2 - v - c_1 \\ &= -vS^p \mathrm{e}^{\phi(\rho^2)} f + 2\mathrm{e}^{\phi(\rho^2)} S^{p+1} f\phi'(\rho^2) v^2 - v - c_1 \\ &\geq \mathrm{e}^{\phi(\rho^2)} S^p f\left(2S\phi'(\rho^2) v^2 - v\right) - c_2 \\ &\geq \mathrm{e}^{\phi(S^2)} S^p f(\xi)\left(2S\phi'(S^2) v^2 - v\right) - c_2 \\ &\geq \delta_2 v^2 - c_2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

对于充分大的 v 成立，其中 $2\delta_2 = \min_{\xi\in\mathbb{S}^n} 2f(\xi)\mathrm{e}^{\phi(S^2)}S^{p+1}\phi'(S^2)$，$c_1$ 和 c_2 为仅依赖于 n, p, ϕ 和 f 的常数。然而，如果 $v(\xi_2)$ 充分大，则会出现 $\delta_2 v^2 - c_2 > 0$，这将导致与(2.26)矛盾。因此，存在一个仅依赖于 n, p, ϕ 和 f 的常数 c_3，使得

$$v \le c_3. \tag{2.28}$$

这就完成了引理 2.2 的证明。

3. 唯一性、存在性与凸性

本节致力于定理 1.1 的证明。

我们令 $\mathbb{S}^n$ 上的正连续函数集合为 $C_+(\mathbb{S}^n)$。对于任意 $\zeta \in C^2(\mathbb{S}^n)$，我们令

$$\mathcal{F}(u) = \Delta u + nu, J(u) = u^{-p}\mathrm{e}^{-\phi(\rho^2)}, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{M}(u) = \mathcal{F}(u)J(u) = f(\xi), \tag{3.2}$$

$$\mathcal{M}[u](\zeta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathcal{M}(u+\varepsilon\zeta)\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{3.3}$$

引理 3.1. 对于任意固定的 $n \ge 1$ 和 $p > 1$。假设 $S \in C^2(\mathbb{S}^n)$ 是(1.6)的一个正解。对于任意 $\zeta \in C^2(\mathbb{S}^n)$，我们令 $\mathcal{M}[u](\zeta)$ 为(3.3)中定义的算子，且

$$\mathcal{M}[S](\zeta) = a_{ij}\left(\frac{\zeta}{S}\right)_{ij} + b_i\left(\frac{\zeta}{S}\right)_i - C\left(\frac{\zeta}{S}\right), \tag{3.4}$$

假设条件(A.1)~(A.2)成立。则 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是正的，b_i 是有界的且 $C > 0$。

证明. 对(3.2)两边取对数，我们有

$$\frac{\mathcal{M}[S](\zeta)}{\mathcal{M}(S)} = \frac{\mathcal{F}(\zeta)}{\mathcal{F}(S)} - 2\phi'(\rho^2)(\nabla S\cdot\nabla\zeta + S\zeta) - p\frac{\zeta}{S} = 0. \tag{3.5}$$

令 $\zeta = Sh$，直接计算得

$$\nabla\zeta\cdot\nabla S + \zeta S = \rho^2 h + S\nabla S\cdot\nabla h, \tag{3.6}$$

并且

$$\Delta\zeta + n\zeta = \Delta hS + 2\nabla S\cdot\nabla h + (\Delta S + nS)h. \tag{3.7}$$

将(3.6)和(3.7)代入(3.5)，我们有

$$\mathcal{G}[u](h) \triangleq a_{ij}h_{ij} + b_i h_i - Ch \tag{3.8}$$

其中

$$a_{ij} = S^{1-p}\mathrm{e}^{-\phi(\rho^2)}f^{-1}(\xi), \tag{3.9}$$

$$b_i = 2\left(S^{-p}\mathrm{e}^{-\phi(\rho^2)}f^{-1} - \phi'(\rho^2)S\right)S_i \tag{3.10}$$

并且

$$C = \phi'(\rho^2)\rho^2 + p - 1. \tag{3.11}$$

由于 S 和 $f(\xi)>0$ 是正的，我们看到 $\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 是正定的。由定理 2.0 可知 b_i 是有界的。由于 $p>1$，由(A.2)可知 $C>0$。这就完成了引理 3.1 的证明。

引理 3.2. 对于任意固定的 $n\geq 1$ 和 $p>1$。假设 $S\in C^2\left(\mathbb{S}^n\right)$ 是(1.6)的一个正解。对于任意 $\zeta\in C^2\left(\mathbb{S}^n\right)$，我们令 $\mathcal{M}[S](\zeta)$ 为(3.3)中定义的算子，且

$$\mathcal{M}[S](\zeta)=0. \tag{3.12}$$

假设条件(A.1)~(A.2)成立，则

$$\zeta\equiv 0. \tag{3.13}$$

证明. 对于任意 $\zeta\in C^2\left(\mathbb{S}^n\right)$ 使得

$$\mathcal{M}[S](\zeta)=0, \tag{3.14}$$

由引理 3.1 和二阶椭圆型方程的强最大值原理可知

$$\zeta\equiv 0. \tag{3.15}$$

参见[35]。这就是引理 3.2 所需的结论。

3.1. 唯一性

本小节证明定理 1.1 的唯一性部分。

命题 3.3. 对于任意固定的 $n\geq 1$ 和 $p>1$。假设 $\tilde{S},\overline{S}\in C^2\left(\mathbb{S}^n\right)$ 是(1.6)的两个正解。假设条件(A.1)~(A.2)成立。则

$$\tilde{S}\equiv\overline{S}. \tag{3.16}$$

命题 3.3 的证明. 由于 $\tilde{S}$ 和 $\overline{S}$ 是(1.6)的两个解，那么对任意 $\xi\in\mathbb{S}^n$ 有

$$\begin{aligned}0&=\mathcal{M}\left(\tilde{S}\right)-\mathcal{M}\left(\overline{S}\right)\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{M}\left(t\tilde{S}+(1-t)\overline{S}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{M}\left(t\tilde{S}+(1-t)\overline{S}\right)\mathrm{d}t\\&\triangleq a_{ij}(\xi)\left(\frac{\tilde{S}-\overline{S}}{\overline{S}}\right)_{ij}+b_i(\xi)\left(\frac{\tilde{S}-\overline{S}}{\overline{S}}\right)_i-N(\xi)\frac{\tilde{S}-\overline{S}}{\overline{S}}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

由引理 3.2 可知

$$\tilde{S}\equiv\overline{S}. \tag{3.18}$$

这就是命题 3.3 所需的结论。

3.2. 存在性

命题 3.4. 对于任意固定的 $n\geq 1$ 和 $p>1$。假设条件(A.1)~(A.2)成立，则方程(1.6)存在唯一的正解 $S\in C^2\left(\mathbb{S}^n\right)$ 满足

$$\|S\|_{C^{2,\alpha}\left(\mathbb{S}^n\right)}\leq c \tag{3.19}$$

其中 c 仅依赖于 n,α 和 ψ。

受 Treibergs 和 Wei [36]的启发，我们考虑辅助问题(1.10)。令

$$\mathcal{I}=\left\{t\in[0,1]: S\in C^2\left(\mathbb{S}^n\right), \text{使得}(1.10)\text{可解}\right\} \tag{3.20}$$

令

$$A_5=\min\left\{\min_{\xi\in\mathbb{S}^n} f\left(\xi\right), n\mathrm{e}^{-\phi(1)}\right\}, A_6=\max\left\{\max_{\xi\in\mathbb{S}^n} f\left(\xi\right), n\mathrm{e}^{-\phi(1)}\right\} \tag{3.21}$$

容易看出

$$0<A_5\le f_t\left(\xi\right)\le A_6 \tag{3.22}$$

对于任意 $t\in[0,1]$ 和 $\xi\in\mathbb{S}^n$。

采用与定理 2.0 类似的论证，我们有

引理 3.5. 对于任意固定的 $n\ge 1$、$p>1$ 和 $t\in[0,1]$，令 $S_t\in C^2\left(\mathbb{S}^n\right)$ 是(1.10)在任意 $t\in[0,1]$ 上的一个正解。假设条件(A.1)~(A.2)成立，则存在一个不依赖于 t 的常数 c，使得

$$0<c^{-1}\le\left|S_t\right|_{C^1\left(\mathbb{S}^n\right)}\le c,$$

对于任意 $t\in[0,1]$。

推论 3.6. 对于任意固定的 $n\ge 1$、$p>1$ 和 $t\in[0,1]$，令 $\mathcal{I}$ 为(3.20)中定义的集合。假设条件(A.1)~(A.2)成立。则 $\mathcal{I}$ 是闭集。

证明. 只需证明对于任意满足 $t_j\to t_0$ (当 $j\to\infty$ 时，对于某个 $t_0\in[0,1]$)的序列 $\left\{t_j\right\}_{j=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{I}$，我们需要证明 $t_0\in\mathcal{I}$。令 S_j 是问题(1.10)在 $t=t_j$ 时的解。由引理 3.5 的结论可知，存在一个不依赖于 j 的正常数 c，使得

$$\left\|S_j\right\|_{C^{2,\tau}\left(\mathbb{S}^n\right)}\le c,$$

由 Ascoli-Arzela 定理可知，存在一个子序列(仍记为 S_j)和一个 $S_0\in C^2\left(\mathbb{S}^n\right)$ 使得当 $j\to\infty$ 时，

$$\left\|S_j-S_0\right\|_{C^2\left(\mathbb{S}^n\right)}\to 0.$$

容易看出

$$\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho_j^2\right)}\to\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho_0^2\right)}, S_j^p\to S_0^p \tag{3.23}$$

在 $\mathbb{S}^n$ 上一致成立，当 $j\to\infty$ 时，其中 $\varrho_j^2=S_j^2+\left|\nabla S_j\right|^2$，对于任意 $j\in\{0,1,\cdots,n\}$。令 $j\to\infty$，我们可以看到 $\left(t_0,S_0\right)$ 是方程(1.10)的一个解。这意味着 $t_0\in\mathcal{I}$。这就是推论 3.6 所需的结论。

引理 3.7. 对于任意固定的 $n\ge 1$、$p>1$ 和 $t\in[0,1]$，令 $\mathcal{I}$ 为(3.20)中定义的集合。假设条件(A.1)~(A.2)成立。则 $\mathcal{I}$ 是开集。

证明. 假设存在 $\bar{t}\in\mathcal{I}$，只需证明对于任意 $t\in B_\delta\left(\bar{t}\right)\cap[0,1]$，有 $t\in\mathcal{I}$。为了实现这一目标，结合隐函数定理，我们需要分析(1.10)相关线性化方程的核。我们假设 $\bar{S}$ 是(1.10)在 $t=\bar{t}$ 处的一个解。对于任意 $\tilde{\xi}\in C^2\left(\mathbb{S}^n\right)$，我们令 $\mathcal{M}$ 为(3.2)中定义的算子，且

$$\mathcal{M}\left[\bar{S}\right]\left(\tilde{\xi}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{M}\left(\bar{S}+t\tilde{\xi}\right). \tag{3.24}$$

那么由引理可知

$$\tilde{\xi}\equiv 0. \tag{3.25}$$

然后由隐函数定理，对于任意 $t\in B_\delta\left(\bar{t}\right)\cap[0,1]$，存在 $w\in C^{2,\tau}\left(\mathbb{S}^n\right)$，使得 $\mathcal{M}_t\left(w\right)=0$。这意味着 $t\in\mathcal{I}$

并完成了引理 3.7 的证明。

现在，我们证明命题 3.4。

命题 3.4 的证明. 证明遵循标准论证。容易看出 $S\equiv 1$ 是 $t=0$ 时的一个解，这意味着 $\mathcal{I}$ 非空。这与推论 3.6 和引理 3.7 一起，得出

$$\mathcal{I}=[0,1]. \tag{3.26}$$

取 $t=1$，我们得到命题 3.4 的证明。

3.3. 凸性

本小节致力于通过最大值原理证明解的凸性。

命题 3.8. 对于任意固定的 $n\geq 1$，令 $S\in C^2\left(\mathbb{S}^n\right)$ 是方程(1.6)的一个解。假设条件(A.1)~(A.3)成立，则 $W=\left(W_{ij}\right)_{n\times n}$ 在球面 $\mathbb{S}^n$ 上是正定的。

在证明之前，我们需要 Brendle-Choi-Daskalopoulos [37]的一个技巧。

引理 3.9 [37]. 假设 φ 是一个光滑函数，使得 $\lambda_1\geq\varphi$ 处处成立，且在某个 $\overline{p}$ 处 $\lambda_1=\varphi$。令 D 为 $\left(W_{ij}\right)_{n\times n}$ 在 $\overline{p}$ 处最小特征值的重数，使得 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_D<\lambda_{D+1}\leq\cdots\leq\lambda_n$，则在 $\overline{p}$ 处，

$$\nabla_i W_{jk}=\nabla_i\varphi\delta_{jk} \tag{3.27}$$

对于任意 $1\leq j,k\leq D$。此外，在 $\overline{p}$ 处，

$$\nabla_i\nabla_i\varphi\leq\nabla_i\nabla_i W_{11}-\sum_{l>D}\frac{2\left(\nabla_i W_{1l}\right)^2}{\lambda_l-\lambda_1}. \tag{3.28}$$

现在，我们证明命题 3.8。

命题 3.8 的证明. 证明遵循 Bryan、Ivaki 和 Scheuer [38]或 Cabezas-Moreno 和 Hu [39]的一些论证。不失一般性，我们可以选择一个坐标系，使得

$$W_{ij}=\lambda_i\delta_{ij} \tag{3.29}$$

且 $W_{11}=\lambda_1$。

假设在点 $\overline{p}$ 处 $\lambda_1=0$，由引理 3.9，对于任意 $j,k\in\{1,2,\cdots,D\}$，我们有

$$\nabla_i W_{jk}=\nabla_i\varphi\delta_{jk}, \tag{3.30}$$

且在点 $\overline{p}$ 处，

$$\varphi_{ii}\leq\left(W_{11}\right)_{ii}-2\sum_{l>D}\frac{\left(W_{1l}\right)_i^2}{\lambda_D-\lambda_1}, \tag{3.31}$$

由 $\mathbb{S}^n$ 上的 Gauss-Codazzi 方程和 Ricci 恒等式，对于任意固定的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，

$$\left(W_{11}\right)_{ii}=\left(W_{ii}\right)_{11}-W_{ii}+W_{11} \tag{3.32}$$

因此，在点 $\overline{p}$ 处，

$$\begin{aligned}\Delta\varphi&\leq\left(trW\right)_{11}-trW+nW_{11}-\sum_i\sum_{l>D}\frac{2\left(\left(W_{1l}\right)_i\right)^2}{\lambda_l-\lambda_1}\\&\leq\left(\tilde{f}\right)_{11}-\tilde{f}+n\lambda_1-\sum_i\sum_{l>D}\frac{2\left(\left(W_{1l}\right)_i\right)^2}{\lambda_l-\lambda_1}\end{aligned} \tag{3.33}$$

此外，令 $G^{ij}=\dfrac{\mathrm{d}\sigma_k^{\frac{1}{k}}\left(W_{ij}\right)}{\mathrm{d}W_{ij}}$ 和 $G^{ij,rs}=\dfrac{\mathrm{d}^2\sigma_k^{\frac{1}{k}}\left(W_{ij}\right)}{\mathrm{d}W_{rs}W_{ij}}$。特别地，如果 $k=1$，我们有

$$G^{ij}=\delta_{ij},G^{ij,rs}=0 \tag{3.34}$$

由于对于任意固定的 $1\le k\le n$，$\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 是逆凹的，特别地对于 $k=1$，我们得到在点 $\overline{p}$ 处，

$$-\sum_i\sum_{l>D}\frac{2\left(\nabla_i W_{1l}\right)^2}{\lambda_l}\le-\frac{2}{\tilde{f}}\left|\tilde{f}_1\right|^2+C\left|\nabla\lambda_1\right| \tag{3.35}$$

将此项代入(3.33)，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta\varphi&\le\left(\tilde{f}\right)_{11}-\tilde{f}+n\lambda_1-\sum_i\sum_{l>D}\frac{2\left(\left(W_{1l}\right)_i\right)^2}{\lambda_l-\lambda_1}\\&\le\left(\tilde{f}\right)_{11}-\tilde{f}+n\lambda_1-\frac{2}{\tilde{f}}\left|\tilde{f}_1\right|^2+C\left|\nabla\lambda_1\right|\\&\le n\lambda_1+C\left|\nabla\lambda_1\right|+\left(\tilde{f}_{11}-\tilde{f}-\frac{2\tilde{f}_1^2}{\tilde{f}}\right)\end{aligned}$$

因为在 $\overline{p}$ 处 $\lambda_1=\varphi$，因此

$$\Delta\varphi\le c_4\varphi+\left|\nabla\varphi\right|+\left(\tilde{f}_{11}-\tilde{f}-\frac{2\tilde{f}_1^2}{\tilde{f}}\right). \tag{3.36}$$

其中 c_4 依赖于 n,p,f,φ 的常数，因此，在点 $\overline{p}$ 处，

$$\Delta\lambda_1\le c_4\lambda_1+\left|\nabla\lambda_1\right|+\left(\tilde{f}_{11}-\tilde{f}-\frac{2\tilde{f}_1^2}{\tilde{f}}\right) \tag{3.37}$$

下面给出一个断言：

$$\tilde{f}_{11}-\tilde{f}-\frac{2\tilde{f}_1^2}{\tilde{f}}\le c_5\lambda_1+c_6\left|\nabla\lambda_1\right|. \tag{3.38}$$

在点 $\overline{p}$ 处。

接下来分步证明断言：

首先估计项 $\tilde{f}_{11}$，由 $\tilde{f}$ 的定义(1.6)可知

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{11}&=\nabla_1\nabla_1\left(S^p\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}f\right)=\nabla_1\nabla_1\left(S^pf\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}\right)\\&=\nabla_1\left(\left(S^pf\right)_1\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}+\left(S^pf\right)\left(\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}\right)_1\right)\\&=\left(S^pf\right)_{11}\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}+2\left(\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}\right)_1\left(S^pf\right)_1+\left(S^pf\right)\left(\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}\right)_{11}\\&=\left(S^pf\right)_{11}\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}+2\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}\phi'\left(\varrho^2\right)\left(\varrho^2\right)_1\left(S^pf\right)_1\\&\quad+S^pf\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}\left(\phi'\left(\varrho^2\right)\left(\varrho^2\right)_{11}+\left(\left(\phi'\right)^2+\phi'\left(\varrho^2\right)\right)\left(\varrho^2\right)_1^2\right).\end{aligned} \tag{3.39}$$

对于(3.39)中的项 $2\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)}\phi'(\varrho^2)(\varrho^2)_1(S^pf)_1$，由于在点 $\overline{p}$ 处，

$$(\varrho^2)_1 = 2h_1(h+h_{11}) = 2hW_{11} = 2h\lambda_1, \tag{3.40}$$

且

$$(S^pf)_1 = S^{p-1}(pfS_1 + Sf_1), \tag{3.41}$$

我们得到

$$\left|2\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)}\phi'(\varrho^2)(\varrho^2)_1(S^pf)_1\right| \le c_7\lambda_1. \tag{3.42}$$

对于(3.39)中的项 $S^pf\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)}\left(\phi'(\varrho^2)(\varrho^2)_{11} + \left((\phi')^2 + \phi''(\varrho^2)\right)(\varrho^2)_1^2\right)$，由 ϱ^2 的定义和 Ricci 恒等式可知，在点 $\overline{p}$ 处，

$$\begin{aligned}\nabla_1\nabla_1(\varrho^2) &= 2h_i\nabla_i(W_{11}) + 2W_{11}^2 - 2hW_{11}\\ &= 2h_i\nabla_i\lambda_1 + 2\lambda_1^2 - 2h\lambda_1,\end{aligned} \tag{3.43}$$

因此，我们可以看出在点 $\overline{p}$ 处，

$$S^pf\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)}\left(\phi'(\varrho^2)(\varrho^2)_{11} + \left((\phi')^2 + \phi''(\varrho^2)\right)(\varrho^2)_1^2\right) \le c_8\left(\lambda_1 + |\nabla\lambda_1|\right) \tag{3.44}$$

因此，在点 $\overline{p}$ 处，

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{11} &\le (S^pf)_{11}\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)} + c_7\lambda_1 + c_8\left(\lambda_1 + |\nabla\lambda_1|\right)\\ &= (S^pf)_{11}\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)} + c_9\lambda_1 + c_{10}|\nabla\lambda_1|^2.\end{aligned} \tag{3.45}$$

其次，对于项 $\dfrac{2\left(\nabla_1\tilde{f}\right)^2}{\tilde{f}}$，由于

$$\begin{aligned}\left(\nabla_1\tilde{f}\right)^2 &= (S^pf)_1^2\mathrm{e}^{2\phi(\varrho^2)} + 2\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)}S^pf(S^pf)_1\left(\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)}\right)_1 + (S^pf)^2\left(\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)}\right)_1^2\\ &= \tilde{f}\left(\frac{(S^pf)_1^2}{S^pf}\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)} + 2(S^pf)_1\left(\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)}\right)_1 + S^pf\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)}\left(\phi'(\varrho^2)\right)^2(\varrho^2)_1^2\right)\end{aligned} \tag{3.46}$$

因此，在点 $\overline{p}$ 处，

$$\begin{aligned}\frac{2\left(\nabla_1\tilde{f}\right)^2}{\tilde{f}} &= 2\left(\frac{(S^pf)_1^2}{S^pf}\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)} + 2(S^pf)_1\left(\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)}\right)_1 + S^pf\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)}\left(\phi'(\varrho^2)\right)^2(\varrho^2)_1^2\right)\\ &\le 2\left(\frac{(S^pf)_1^2}{S^pf}\mathrm{e}^{\phi(\varrho^2)} + c_6\lambda_1 + c_{12}|\nabla\lambda_1|^2\right)\end{aligned}$$

于是，在点 $\overline{p}$ 处，

$$\begin{aligned}&\nabla_1\nabla_1\tilde{f}-\tilde{f}-\frac{2\left(\nabla_1\tilde{f}\right)^2}{\tilde{f}}\\&\le\left(S^pf\right)_{11}\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}+c_9\lambda_1+c_{10}\left|\nabla\lambda_1\right|^2-\tilde{f}-2\left(\frac{\left(S^pf\right)_1^2}{S^pf}\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}+c_6\lambda_1+c_{12}\left|\nabla\lambda_1\right|^2\right)\\&\le\left(\left(S^pf\right)_{11}-S^pf-\frac{2\left(S^pf\right)_1^2}{S^pf}\right)\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}+c_5\lambda_1+c_6\left|\nabla\lambda_1\right|.\end{aligned}\tag{3.47}$$

由 Hu-Ma-Shen [32]的论证，我们可以看出

$$\left(S^pf\right)_{11}-S^pf-\frac{2\left(S^pf\right)_1^2}{S^pf}\le0\tag{3.48}$$

由于条件(A.3)和 $\mathrm{e}^{\phi\left(\varrho^2\right)}>0$。因此，

$$\nabla_1\nabla_1\tilde{f}-\tilde{f}-\frac{2\left(\nabla_1\tilde{f}\right)^2}{\tilde{f}}\le c_5\lambda_1+c_6\left|\nabla\lambda_1\right|.$$

于是，我们得到不等式(3.38)，这就完成了**断言**的证明。

因此，我们可以看出在点 $\bar{p}$ 处，λ_1 满足以下椭圆不等式

$$\Delta\lambda_1\le c_{13}\left(\lambda_1+\left|\nabla\lambda_1\right|\right)\tag{3.49}$$

如果 $\left(W_{ij}\right)_{n\times n}$ 不是常数秩，则由强最大值原理可知在 $\mathbb{S}^n$ 上，

$$\lambda_1\equiv0\tag{3.50}$$

在局部极小点处，我们得到 $\lambda_1>0$，这将导致矛盾，这就完成了命题 3.8 的证明。

现在，我们给出定理 1.1 的最终证明。

定理 1.1 的最终证明. 定理 1.1 由命题 3.3、命题 3.4 和命题 3.8 得出。

基金项目

本项目受到广西自然科学基金(基金号：2024GXNSFBA010357)资助。

参考文献

[1] Bogachev, V. (1998) Gaussian Measures. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/surv/062

[2] Gross, L. (1975) Logarithmic Sobolev Inequalities. *American Journal of Mathematics*, **97**, 1061-1083. https://doi.org/10.2307/2373688

[3] Borell, C. (1975) The Brunn-Minkowski Inequality in Gauss Space. *Inventiones Mathematicae*, **30**, 207-216. https://doi.org/10.1007/bf01425510

[4] Brascamp, H.J. and Lieb, E.H. (1976) On Extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler Theorems, Including Inequalities for Log Concave Functions, and with an Application to the Diffusion Equation. *Journal of Functional Analysis*, **22**, 366-389. https://doi.org/10.1016/0022-1236(76)90004-5

[5] Bobkov, S.G., Colesanti, A. and Fragalà, I. (2014) Quermassintegrals of Quasi-Concave Functions and Generalized Prékopa-Leindler Inequalities. *Manuscripta Mathematica*, **143**, 131-169. https://doi.org/10.1007/s00229-013-0619-9

[6] Klartag, B. and Milman, V.D. (2005) Geometry of Log-Concave Functions and Measures. *Geometriae Dedicata*, **112**, 169-182. https://doi.org/10.1007/s10711-004-2462-3

[7] Rotem, L. (2013) Support Functions and Mean Width for α-Concave Functions. *Advances in Mathematics*, **243**, 168-

186. https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.03.023

[8] Colesanti, A. and Fragalà, I. (2013) The First Variation of the Total Mass of Log-Concave Functions and Related Inequalities. *Advances in Mathematics*, **244**, 708-749. https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.05.015

[9] Fang, N., Xing, S. and Ye, D. (2022) Geometry of Log-Concave Functions: The L_p Asplund Sum and the L_p Minkowski Problem. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **61**, Article No. 45. https://doi.org/10.1007/s00526-021-02155-7

[10] Huang, Y., Liu, J. and Xu, L. (2015) On the Uniqueness of L_p-Minkowski Problems: The Constant P-Curvature Case $\mathbb{R}^3$. *Advances in Mathematics*, **281**, 906-927. https://doi.org/10.1016/j.aim.2015.02.021

[11] Huang, Y., Xi, D. and Zhao, Y. (2021) The Minkowski Problem in Gaussian Probability Space. *Advances in Mathematics*, **385**, Article 107769. https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.107769

[12] Liu, J. (2022) The L_p-Gaussian Minkowski Problem. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **61**, Article No. 28. https://doi.org/10.1007/s00526-021-02141-z

[13] Rotem, L. (2022) Surface Area Measures of Log-Concave Functions. *Journal d'Analyse Mathématique*, **147**, 373-400. https://doi.org/10.1007/s11854-022-0227-2

[14] Schneider, R. (2013) Convex Bodies the Brunn-Minkowskitheory. 2nd Edition, Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9781139003858

[15] Bakelman, I.J. (1994) Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations. Springer.

[16] Bonnesen, T. and Fenchel, W. (1987) Theory of Convex Bodies. BCS Associates.

[17] Lutwak, E. (1993) The Brunn-Minkowski-Firey Theory. I. Mixed Volumes and the Minkowski Problem. *Journal of Differential Geometry*, **38**, 131-150. https://doi.org/10.4310/jdg/1214454097

[18] Lutwak, E. and Oliker, V. (1995) On the Regularity of Solutions to a Generalization of the Minkowski Problem. *Journal of Differential Geometry*, **41**, 227-246. https://doi.org/10.4310/jdg/1214456011

[19] Bianchi, G., Böröczky, K.J., Colesanti, A. and Yang, D. (2019) The L_p-Minkowski Problem for $-n < p < 1$. *Advances in Mathematics*, **341**, 493-535. https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.10.032

[20] Chou, K. and Wang, X. (2006) The L_p-Minkowski Problem and the Minkowski Problem in Centroaffine Geometry. *Advances in Mathematics*, **205**, 33-83. https://doi.org/10.1016/j.aim.2005.07.004

[21] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2003) On the L_p-Minkowski Problem. *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, 4359-4370. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-03-03403-2

[22] Pogorelov, A.V. (1978) The Minkowski Multidimensional Problem. V.H. Winston & Sons.

[23] Zhu, G. (2014) The L_p Minkowski Problem for Polytopes for $0 < p < 1$. arXiv:1406.7503.

[24] Gel'fand, I.M. and Vilenkin, N.Ya. (1964) Generalized Functions. Vol. 4, Applications of Harmonic Analysis, Academic Press.

[25] Christoffel, E.B. (1865) Über die bestimmung der gestalt einer krummen oberfläche durch lokale messungen auf derselben. *Journal für Die Reine und Angewandte*, **64**, 193-209.

[26] Firey, W.J. (1967) The Determination of Convex Bodies from Their Mean Radius of Curvature Functions. *Mathematika*, **14**, 1-13. https://doi.org/10.1112/s0025579300007956

[27] Firey, W.J. (1968) Christoffel's Problem for General Convex Bodies. *Mathematika*, **15**, 7-21. https://doi.org/10.1112/s0025579300002321

[28] Guan, P., Lin, C. and Ma, X. (2006) The Christoffel-Minkowski Problem II: Weingarten Curvature Equations. *Chinese Annals of Mathematics*, *Series B*, **27**, 595-614. https://doi.org/10.1007/s11401-005-0575-0

[29] Guan, P. and Ma, X. (2003) The Christoffel-Minkowski Problem I: Convexity of Solutions of a Hessian Equation. *Inventiones Mathematicae*, **151**, 553-577. https://doi.org/10.1007/s00222-002-0259-2

[30] Guan, P., Ma, X. and Zhou, F. (2006) The Christofel-Minkowski Problem III: Existence and Convexity of Admissible Solutions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **59**, 1352-1376. https://doi.org/10.1002/cpa.20118

[31] Guan, P. and Xia, C. (2018) L_p Christoffel-Minkowski Problem: The Case $1 < P < k + 1$. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **57**, Article No. 69. https://doi.org/10.1007/s00526-018-1341-y

[32] Hu, C., Ma, X. and Shen, C. (2004) On the Christoffel-Minkowski Problem of Firey's P-Sum. *Calculus of Variations*, **21**, 137-155. https://doi.org/10.1007/s00526-003-0250-9

[33] Li, Q., Wan, D. and Wang, X. (2021) The Christoffel Problem by the Fundamental Solution of the Laplace Equation. *Science China Mathematics*, **64**, 1599-1612. https://doi.org/10.1007/s11425-019-1674-1

[34] Pogorelov, A. (1973) Extrinsic Geometry of Convex Surfaces. American Mathematical Society.

https://doi.org/10.1090/mmono/035

[35] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. (2001) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer.

[36] Treibergs, A.E. and Wei, S.W. (1983) Embedded Hyperspheres with Prescribed Mean Curvature. *Journal of Differential Geometry*, **18**, 513-521. https://doi.org/10.4310/jdg/1214437786

[37] Brendle, S., Choi, K. and Daskalopoulos, P. (2017) Asymptotic Behavior of Flows by Powers of the Gaussian Curvature. *Acta Mathematica*, **219**, 1-16. https://doi.org/10.4310/acta.2017.v219.n1.a1

[38] Bryan, P., Ivaki, M.N. and Scheuer, J. (2023) Constant Rank Theorems for Curvature Problems via a Viscosity Approach. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **62**, Article No. 98. https://doi.org/10.1007/s00526-023-02442-5

[39] Cabezas-Moreno, C. and Hu, J. (2025) The L_p Dual Christoffel-Minkowski Problem for $1< p < q \leq k + 1$ with $1 \leq k \leq n$. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **64**, Article No. 229. https://doi.org/10.1007/s00526-025-03115-1