Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(11), 86-90
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1611237

Hans汉斯

一类类二面体群与二面体群之间同态数量的讨论

王　凯

连云港师范学院，数学与信息工程学院，江苏　连云港

收稿日期：2026年9月30日；录用日期：2026年10月28日；发布日期：2026年11月18日

摘　要

本文讨论一类类二面体群的生成关系、元素的阶、构造其与二面体群之间的同态数量，其同态数量满足T. Asai & T. Yoshida猜想。

关键词

同态，类二面体群，二面体群，T. Asai & T. Yoshida猜想

Discussion on the Number of Homomorphisms between a Class of Quasi-Dihedral Groups and Dihedral Groups

Kai Wang

School of Mathematics and Information Engineering, Lianyungang Normal University, Lianyungang Jiangsu

Received: September 30, 2026; accepted: October 28, 2026; published: November 18, 2026

Abstract

This paper discusses the generating relations and element orders of a class of groups, and computes the number of homomorphisms from this group to dihedral groups. The number of such homomorphisms satisfies the conjecture proposed by T. Asai and T. Yoshida.

Keywords

Homomorphism, Quasi-Dihedral Groups, Dihedral Groups, The Conjecture of T. Asai & T. Yoshida

文章引用: 王凯. 一类类二面体群与二面体群之间同态数量的讨论[J]. 理论数学, 2026, 16(11): 86-90.
DOI: 10.12677/pm.2026.1611237

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

在文献[1]中，T. Asai 和 T. Yoshida 进一步提出如下猜想：设为 H,K 有限群，则

$$\left|\mathrm{Hom}\left(H,K\right)\right| \equiv 0 \bmod \left(\left|H/H'\right|,\left|K\right|\right).$$

在计算同态个数方面，在文献[2]中，张良等人从亚循环群的结构入手以及生成关系入手，具体计算了亚循环群与亚循环群之间的同态个数。在文献[3]中谢伟计算了中心二面体群与二面体群之间的同态数量。本文将继续这方面的讨论。

二面体群在群论的理论研究和实际应用中占有重要地位，在文献[4]中，徐明耀将具有 p^{n-1} 阶循环子群的 p^n 阶有限 p-群分成了七类群，其中的一类便是类二面体群，为了便于叙述，现先给出二面体群与这类类二面体群的结构：

二面体群 $D_{2m}=\left\langle x,y \mid x^m=y^2=1,xy=yx^{-1}\right\rangle$，其中 $m\geq 3$ 为正整数；

类二面体群 $G=\left\langle a,b \mid a^{2^{n-1}}=b^2=1,b^{-1}ab=a^{-1}\right\rangle$，其中 $n\geq 3$ 为正整数；

本文在上述理论基础上，基于这类类二面体的结构及元素性质，运用代数学及数论的相关知识，分别讨论它们与二面体群 D_{2m} 之间的所有同态，从而验证上述群满足 T. Asai & T. Yoshida 猜想。

2. 预备知识

引理 2.1 [4]. 设 H,K 为有限群，σ 是群 H 到 K 的一个同态映射，任取 $h\in H$，有 $o\left(h^\sigma\right)\mid o\left(h\right)$。

引理 2.2 [4]. 设 A,G 为群，X 为 A 的生成元集且 $X\neq\varnothing$。令 $\varphi,\theta\in\mathrm{Hom}\left(A,G\right)$，如果对任意的 $x\in X$，有 $x^\varphi=x^\theta$，则 $\varphi=\theta$。

引理 2.3 [4]. 设 $H=\left\langle h\right\rangle$，$o\left(h\right)=n$，若 $m\mid n$，则 H 存在唯一的 m 阶子群。

引理 2.4. D_{2m} 中，有

(1) m 为奇数，则 $\left\{x^iy \mid 1\leq i\leq m\right\}$ 为 D_{2m} 所有的二阶元；

(2) m 为偶数，则 $\left\{x^i \mid o\left(x^i\right)\mid 2\right\}\cup\left\{x^iy \mid 1\leq i\leq m\right\}$ 为 D_{2m} 所有的二阶元；

(3) D_{2m} 的换位子群 $D_{2m}'=\left\langle x^2 \mid x^m=1\right\rangle$。

引理 2.5. G 中所有的二阶元的集合为 $\left\{b,a^{2^{n-2}},a^{2^{n-2}}b\right\}$。

引理 2.6. $G'=\left\langle a^2\right\rangle$。

证明： 任取 $a^{s_1}b^{t_1},a^{s_2}b^{t_2}\in G$，其中 $1\leq s_1,s_2\leq 2^{n-1}$，$1\leq t_1,t_2\leq 2$；于是有

$\left(a^{s_1}b^{t_1}\right)^{-1}\left(a^{s_2}b^{t_2}\right)^{-1}\left(a^{s_1}b^{t_1}\right)\left(a^{s_2}b^{t_2}\right)=\left[\left(a^{s_2}b^{t_2}\right)\left(a^{s_1}b^{t_1}\right)\right]^{-1}\left(a^{s_1}b^{t_1}\right)\left(a^{s_2}b^{t_2}\right)=\left(a^2\right)^{s_1-s_2}$，故有 $G_2'\subseteq\left\langle a^2\right\rangle$；反之，由 $a^{-1}b^{-1}ab=\left(a^2\right)^{-1}$，得 $\left\langle a^2\right\rangle\subseteq G'$。

3. 主要定理及其证明

定理 3.1. 设 $n\geq 3$，$m\geq 3$ 有

(1) 若 $\left(m,2\right)=1$，则 $\mathrm{Hom}\left(G,D_{2m}\right)=3m+1$；

(2) 若$(m,2)\neq 1$，则$\mathrm{Hom}(G,D_{2m})=2^{k+1}+6m$。

证明：任取$\theta\in\mathrm{Hom}(G,D_{2m})$。因为$\left(a^{2^{n-1}}\right)^{\theta}=\left(a^{\theta}\right)^{2^{n-1}}=1$，所以$o\left(a^{\theta}\right)\mid 2^{n-1}$；此外，$a^{\theta}\in D_{2m}$，所以$o\left(a^{\theta}\right)\mid 2m$，得到$o\left(a^{\theta}\right)\mid\left(2m,2^{n-1}\right)$。同理，由$\left(b^{2}\right)^{\theta}=\left(b^{\theta}\right)^{2}=1$，$b^{\theta}\in D_{2m}$，得到$o\left(b^{\theta}\right)\mid(2m,2)$，即$o\left(b^{\theta}\right)\mid 2$。令$m=2^{r}l$，$k=\min\{r+1,n-1\}$，其中$(l,2)=1$，$1\le k\le n-1$。当$(m,2)=1$，有$\left(2m,2^{n-1}\right)=2$，即有$o\left(a^{\theta}\right)\mid 2$，注意到此时$m$为奇数，故$o\left(x^{i}\right)\neq 2$，有

$$a^{\theta}\in\left\{x^{i}y\mid 1\le i\le m\right\}\cup\left\{x^{i}\mid o\left(x^{i}\right)\mid 1,1\le i\le m\right\},\ b^{\theta}\in\left\{x^{j}y\mid 1\le j\le m\right\}\cup\left\{x^{j}\mid o\left(x^{j}\right)\mid 1,1\le j\le m\right\};$$

当$(m,2)\neq 1$，有$\left(m,2^{n-1}\right)\neq 1$，故$\left(2m,2^{n-1}\right)=2^{k}$其中$1\le k\le n-1$，此时有

$$a^{\theta}\in\left\{x^{i}y\mid 1\le i\le m\right\}\cup\left\{x^{i}\mid o\left(x^{i}\right)\mid 2^{k},1\le i\le m,1\le k\le n-1\right\},\ b^{\theta}\in\left\{x^{j}y\mid 1\le j\le m\right\}\cup\left\{x^{j}\mid o\left(x^{j}\right)\mid 2,1\le j\le m\right\}.$$

分以下四个断言证明定理 3.1。

断言 1. 设$\theta:G\to D_{2m}\left(a\mapsto x^{i}y,b\mapsto x^{j}\right)$，其中$o\left(x^{j}\right)\mid 2$，$1\le i,j\le m$，则$\theta$为群同态。

事实上，G的生成组为$\{a,b\}$，故$g\in G$，都有$a^{s}b^{t}=g$，令$\theta\left(a^{s}b^{t}\right)=\left(x^{i}y\right)^{s}\left(x^{j}\right)^{t}$。任取$a^{s_1}b^{t_1},a^{s_2}b^{t_2}\in G$，其中$1\le s_1,s_2\le 2^{n-1}$，$1\le t_1,t_2\le 2$；若$a^{s_1}b^{t_1}=a^{s_2}b^{t_2}$，则$a^{s_1-s_2}=b^{t_2-t_1}=1$，从而$s_1=s_2$，$t_1=t_2$。故$\theta$是映射。

一方面：$\theta\left(a^{s_1}b^{t_1}a^{s_2}b^{t_2}\right)=\theta\left(a^{s_1+(-1)^{t_1}s_2}b^{t_1+t_2}\right)=\left(x^{i}y\right)^{s_1+(-1)^{t_1}s_2}\left(x^{j}\right)^{t_1+t_2}$，注意到$o\left(x^{i}y\right)\mid 2$，故$\theta\left(a^{s_1}b^{t_1}a^{s_2}b^{t_2}\right)=\left(x^{i}y\right)^{s_1+s_2}\left(x^{j}\right)^{t_1+t_2}$；

另一方面：$\theta\left(a^{s_1}b^{t_1}\right)\theta\left(a^{s_2}b^{t_2}\right)=\left(x^{i}y\right)^{s_1}\left(x^{j}\right)^{t_1}\left(x^{i}y\right)^{s_2}\left(x^{j}\right)^{t_2}$，注意到$o\left(x^{j}\right)\mid 2$，于是$\theta\left(a^{s_1}b^{t_1}\right)\theta\left(a^{s_2}b^{t_2}\right)=\left(x^{i}y\right)^{s_1+s_2}\left(x^{j}\right)^{t_1-t_2}=\left(x^{i}y\right)^{s_1+s_2}\left(x^{j}\right)^{t_1+t_2}$，即$\theta$为同态。

此时群同态θ有$2m$种。

断言 2. 设$\theta:G\to D_{2m}\left(a\mapsto x^{i}y,b\mapsto x^{j}y\right)$，其中$1\le i,j\le m$，则$\theta$为群同态的充要条件是$x^{i}y$与$x^{j}y$可交换。

θ是群同态，则有$\theta(ab)=\theta\left(ba^{-1}\right)$，即得$\left(x^{i}y\right)\left(x^{j}y\right)=\left(x^{j}y\right)\left(x^{i}y\right)^{-1}=\left(x^{j}y\right)\left(x^{i}y\right)$；反之，类似断言 1 的讨论，故有，一方面：$\theta\left(a^{s_1}b^{t_1}a^{s_2}b^{t_2}\right)=\left(x^{i}y\right)^{s_1+s_2}\left(x^{j}y\right)^{t_1+t_2}$；另一方面：$\theta\left(a^{s_1}b^{t_1}\right)\theta\left(a^{s_2}b^{t_2}\right)=\left(x^{i}y\right)^{s_1}\left(x^{j}y\right)^{t_1}\left(x^{i}y\right)^{s_2}\left(x^{j}y\right)^{t_2}=\left(x^{i}y\right)^{s_1+s_2}\left(x^{j}y\right)^{t_1+t_2}$，故$\theta$为群同态。

易知$x^{i}y$与$x^{j}y$可交换等价于$m\mid 2(i-j)$。故当$(m,2)=1$时，即可得到$m\mid(i-j)$，考虑到i，j的范围，此时仅当$i=j$时成立，故群同态θ有m种；当$(m,2)\neq 1$时，$i=j$情况下有m种，$i\neq j$情况下也有m种，故此时群同态θ有$2m$种。

断言 3. 设$\theta:G\to D_{2m}\left(a\mapsto x^{i},b\mapsto x^{j}\right)$，其中$o\left(x^{i}\right)\mid p^{k}$，$o\left(x^{j}\right)\mid 2$，$1\le i,j\le m$，$1\le k\le n-1$，则$\theta$是群同态。

同上可构造出映射θ，还有$\theta\left(a^{s_1}b^{t_1}a^{s_2}b^{t_2}\right)=\left(x^{i}\right)^{s_1+s_2}\left(x^{j}\right)^{t_1+t_2}=\theta\left(a^{s_1}b^{t_1}\right)\theta\left(a^{s_2}b^{t_2}\right)$，故$\theta$是群同态。此时群同态$\theta$有$2^{k+1}$种。

断言 4. 设$\theta:G\to D_{2m}\left(a\mapsto x^{i},b\mapsto x^{j}y\right)$，其中$o\left(x^{i}\right)\mid p^{k}$，$1\le i,j\le m$，$1\le k\le n-1$，则$\theta$为群同态充要条件是$o\left(x^{i}\right)\mid 2$。

θ是群同态，则有$\theta(ab)=\theta\left(ba^{-1}\right)$，即得$\left(x^i\right)\left(x^j y\right)=\left(x^j y\right)\left(x^i\right)^{-1}$，可推出$(x^i)^2=1$；反之，同断言 2 的证明。

此时群同态θ有$2m$种。

定理 3.2. 设$n\geq 3$，$m\geq 3$有

(1) 若$(2,m)=1$，则$\mathrm{Hom}\left(D_{2m},G\right)=4$；

(2) 若$(2,m)\neq 1$，则$\mathrm{Hom}\left(D_{2m},G\right)=16$；

证明：任取$\theta\in\mathrm{Hom}\left(D_{2m},G\right)$，因为$\left(x^m\right)^\theta=\left(x^\theta\right)^m=1$，故$o\left(x^\theta\right)\mid m$，此外$x^\theta\in G$，所以$o\left(x^\theta\right)\mid\left(m,2^n\right)$；同理，$o\left(y^\theta\right)\mid\left(2^n,2\right)$，故$o\left(y^\theta\right)\mid 2$。当$(2,m)=1$时，故可以得到$\left(2^n,m\right)=1$，即推出$o\left(x^\theta\right)\mid 1$，于是

$$x^\theta\in\left\{a^{i_1}b^{j_1}\mid o\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)\mid 1,1\leq i_1\leq p^n,1\leq j_1\leq p\right\},\ y^\theta\in\left\{a^{i_2}b^{j_2}\mid o\left(a^{i_2}b^{j_2}\right)\mid 2,1\leq i_2\leq p^n,1\leq j_2\leq p\right\};$$

当$(2,m)\neq 1$时，令$k=\min\{r,n\}$，其中$1\leq k\leq n$，得$o\left(x^\theta\right)\mid 2^k$，于是

$$x^\theta\in\left\{a^{i_1}b^{j_1}\mid o\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)\mid 2^k,1\leq i_1\leq 2^n,1\leq j_1\leq 2,1\leq k\leq n\right\},\ y^\theta\in\left\{a^{i_2}b^{j_2}\mid o\left(a^{i_2}b^{j_2}\right)\mid 2,1\leq i_2\leq 2^n,1\leq j_2\leq 2\right\}.$$

分以下两个断言证明定理 3.2。

断言 1. 设$\theta:D_{2m}\to G\ \left(x\mapsto a^{i_1}b^{j_1},y\mapsto a^{i_2}b^{j_2}\right)$，其中$o\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)\mid 2^k$，$o\left(a^{i_2}b^{j_2}\right)\mid 2$，$1\leq i_1,i_2\leq 2^n$，$1\leq j_1,j_2\leq 2$，$1\leq k\leq n$，则$\theta$为群同态的充要条件是$o\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)\mid 2$。

由引理得G中共有 3 个不同的二阶元，即$\left\{b,a^{2^{n-2}},a^{2^{n-2}}b\right\}$，故有$o\left(a^{i_2}\right)\mid 2$。$x^s y^t\in D_{2m}$，令$\theta\left(x^s y^t\right)=\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)^s\left(a^{i_2}b^{j_2}\right)^t$；若$\theta$是群同态，则有$\theta(xy)=\theta\left(yx^{-1}\right)$，当$j_2$为奇数时，可得到$\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)^2=1$，即$o\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)\mid 2$；反之，任意$x^{s_1}y^{t_1},x^{s_2}y^{t_2}\in D_{2m}$，其中$1\leq s_1,s_2\leq m$，$1\leq t_1,t_2\leq 2$，若$x^{s_1}y^{t_1}=x^{s_2}y^{t_2}$，则$x^{s_1-s_2}=y^{t_1-t_2}=1$，即$s_1=s_2$，$t_1=t_2$，故$\theta$是映射；一方面：$\theta\left(x^{s_1}y^{t_1}x^{s_2}y^{t_2}\right)=\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)^{s_1+(-1)^{t_1}s_2}\left(a^{i_2}b^{j_2}\right)^{t_1+t_2}$，另一方面：$\theta\left(x^{s_1}y^{t_1}\right)\theta\left(x^{s_2}y^{t_2}\right)=\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)^{s_1+s_2}\left(a^{i_2}b^{j_2}\right)^{t_1+t_2}$；由$\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)^2=1$，得$\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)^{s_1-s_2}=\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)^{s_1+s_2}$，故$\theta$为群同态。

故群同态θ有 16 种。

断言 2. 设$\theta:D_{2m}\to G\ \left(x\mapsto a^{i_1}b^{j_1},y\mapsto a^{i_2}b^{j_2}\right)$，其中$o\left(a^{i_1}b^{j_1}\right)\mid 1$，$o\left(a^{i_2}b^{j_2}\right)\mid 2$，$1\leq i_1,i_2\leq p^{n-1}$，$1\leq j_1,j_2\leq p$，则$\theta$为群同态。

同断言 1 的证明，此时群同态θ有 4 种。

根据前面的结论可验证G满足 T. Asai & T. Yoshida 猜想

定理 3.3. 设$n\geq 3$，$m\geq 3$则

$$\left|\mathrm{Hom}\left(G,D_{2m}\right)\right|\equiv 0\bmod\left(\left|G/G'\right|,\left|D_{2m}\right|\right).$$

证明. 由引理 2.6 得$G'=\left\langle a^2\right\rangle$，当$(2,m)=1$时，$\left(\left|G/G'\right|,\left|D_{2m}\right|\right)=(4,2m)$，即有

$$\left(\left|G/G'\right|,\left|D_{2m}\right|\right)=2;$$

当$(2,m)\neq 1$时，$\left(\left|G/G'\right|,\left|D_{2m}\right|\right)=(4,2m)$，即有

$$\left(\left|G/G'\right|,\left|D_{2m}\right|\right)=4.$$

由定理 3.1，$(2,m)=1$时，$\left|\mathrm{Hom}\left(G_2,D_{2m}\right)\right|=3m+1$，$\left(\left|G/G'\right|,\left|D_{2m}\right|\right)=2$，于是有$3m+1\equiv 0\bmod 2$；

$(2,m)\neq 1$时，有$\left|\mathrm{Hom}\left(G,D_{2m}\right)\right|=2^{k+1}+6m$，$\left(\left|G/G'\right|,\left|D_{2m}\right|\right)=4$，得$2^{k+1}+6m\equiv 0 \bmod 4$，其中$k=\min\left\{i+1,n\right\}$，$1\leq k\leq n$。

定理 3.4. 设$n\geq 3$， $m\geq 3$则

$$\left|\mathrm{Hom}\left(D_{2m},G\right)\right|\equiv 0 \bmod \left(\left|D_{2m}/D'_{2m}\right|,\left|G\right|\right).$$

证明：定理 3.2，$(2,m)=1$时，有$\left|\mathrm{Hom}\left(D_{2m},G\right)\right|=4\left(\left|D_{2m}/D'_{2m}\right|,\left|G\right|\right)=2$，于是$4\equiv 0 \bmod 2$；$(2,m)\neq 1$时，有$\left|\mathrm{Hom}\left(D_{2m},G\right)\right|=16$，$\left(\left|D_{2m}/D'_{2m}\right|,\left|G\right|\right)=4$，于是$16\equiv 0 \bmod 4$。

参考文献

[1] Asai, T. and Yoshida, T. (1993) |Hom(A, G)|, II. *Journal of Algebra*, **160**, 273-285. https://doi.org/10.1006/jabr.1993.1188

[2] 张良, 海进科. 亚循环群到亚循环群之间的同态个数[J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(6): 17-22.

[3] 谢伟, 郭继东. 中心二面体群与二面体群之间的同态个数[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(8): 80-86.

[4] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京: 科学出版社, 1999.