Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(11), 91-105
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1611238

Hans汉斯

实对称正定稀疏系统SOR收敛及参数优化

张福原，王琳琳*

青岛科技大学数理学院，山东 青岛

收稿日期：2026年10月1日；录用日期：2026年11月6日；发布日期：2026年11月24日

摘　要

针对大规模稀疏线性方程组中SOR迭代收敛效率受松弛参数影响显著的问题，本文研究实对称正定系统中松弛参数对SOR收敛的影响及近似最优参数选择。基于矩阵分裂与谱半径分析，采用多尺度网格搜索确定近似最优参数，并以Poisson模型验证搜索精度；针对较高维问题，利用Arnoldi过程估计主导特征值。bcsstk01数值实验表明，近似最优参数为1.89455，谱半径降至0.899763，迭代次数由2031次降至166次。结果表明，合理选择松弛参数可显著改善SOR的收敛性能。

关键词

矩阵分裂，SOR迭代，谱半径，收敛性能，最优松弛参数

Convergence and Parameter Optimization of SOR for Real Symmetric Positive Definite Sparse Systems

Fuyuan Zhang, Linlin Wang*

School of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao Shandong

Received: October 1, 2026; accepted: November 6, 2026; published: November 24, 2026

Abstract

The effect of the relaxation parameter on convergence performance of the successive over-relaxation (SOR) method and the selection of an approximately optimal relaxation parameter for real symmetric positive definite systems are investigated, with particular attention to the significant influence of the relaxation parameter on the convergence efficiency of large-scale sparse linear systems. Based on matrix splitting and spectral-radius analysis, a multiscale grid-search strategy is adopted to determine

*通讯作者。

文章引用: 张福原, 王琳琳. 实对称正定稀疏系统 SOR 收敛及参数优化[J]. 理论数学, 2026, 16(11): 91-105.
DOI: 10.12677/pm.2026.1611238

the approximately optimal parameter, and its search accuracy is verified using a Poisson model. For higher-dimensional problems, the Arnoldi process is employed to estimate the dominant eigenvalues. Numerical experiments on the bcsstk01 matrix show that the approximately optimal relaxation parameter is 1.89455, reducing the spectral radius to 0.899763 and the number of iterations from 2031 to 166. The results demonstrate that an appropriate choice of the relaxation parameter can significantly improve the convergence performance of the SOR method.

Keywords

Matrix Splitting, SOR Iteration, Spectral Radius, Convergence Performance, Optimal Relaxation Parameter

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

1.1. 研究背景与问题提出

线性代数方程组的高效求解是数值线性代数中的基础问题，也是偏微分方程离散、结构力学和大规模优化等领域的重要计算环节[1]。随着问题规模增大，系数矩阵往往呈现高维、稀疏等特征，直接法易产生填充并带来较大的计算与存储开销[2]-[4]，因此能够利用稀疏结构的迭代方法仍具有重要意义[5]。

在经典定常迭代方法中，SOR 通过松弛参数调节迭代过程，其取值直接影响迭代矩阵谱半径和收敛效率。对于实对称正定系统，经典理论虽能给出 SOR 的收敛参数区间，但区间内不同参数的收敛速度可能差异显著[6]-[8]；对于一般工程稀疏矩阵，最优参数又往往难以解析确定。因此，如何定量刻画松弛参数对收敛性能的影响并确定近似最优参数，是本文重点研究的问题。

1.2. SOR 迭代与松弛参数研究现状

围绕 SOR 迭代的收敛性与参数选择，Varga、Young 和 Saad 等建立了以迭代矩阵谱半径为核心的经典分析框架，并给出了实对称正定系统上的 SOR 收敛理论[6]-[8]。对于满足特定结构及相容排序条件的线性系统，还可依据 Jacobi 迭代矩阵的谱信息建立 SOR 谱半径与松弛参数之间的解析关系，从而获得理论最优参数[6] [7]。

在经典 SOR 理论基础上，相关研究进一步拓展至迭代方法推广、矩阵分裂及参数优化。Hadjidimos 提出 AOR 方法，拓展了经典松弛迭代的参数形式[9]；Bai 进一步研究了矩阵分裂迭代框架下的收敛问题[10]。对于一般工程稀疏矩阵，最优参数通常受复杂谱结构影响，难以由统一闭式公式确定。Li 等将迭代参数选择表述为优化问题[11]，Ren 等研究了 AOR 迭代的最优参数选择方法[12]。因此，如何兼顾谱估计成本、搜索精度与实际迭代收益，仍是参数选择中的重要问题。

1.3. 研究内容与主要贡献

本文以实对称正定稀疏线性系统中的 SOR 迭代为研究对象，围绕松弛参数对收敛性能的影响及近似最优参数选择展开研究。首先，基于经典矩阵分裂与定常迭代理论，分析 SOR 的收敛条件、谱半径与渐近收敛速度之间的关系，并讨论理论收敛区间与高效率参数区域的差异。对于具有解析最优参数的模型问题，利用一维 Poisson 离散模型验证数值搜索的准确性；对于一般工程稀疏矩阵，以谱半径最小化为目标构建多

尺度网格搜索，并在 bcsstk01 矩阵上比较不同松弛参数及 Gauss-Seidel、加权 Jacobi 方法的收敛表现。针对较高维稀疏问题，进一步采用 Arnoldi 过程估计主导特征值，并分析谱半径估计与参数搜索的计算成本。

2. 预备知识与基本理论

2.1. 矩阵分裂与定常迭代

考虑非奇异线性方程组 $Ax=b$，其中 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为系数矩阵，$x\in\mathbb{R}^n$ 和 $b\in\mathbb{R}^n$ 分别为未知向量和已知向量。为统一后续 SOR 迭代的理论表述，首先给出矩阵分裂和定常迭代的基本定义。

定义 2.1 (矩阵分裂) [6] [8]：

若存在非奇异矩阵 M 和矩阵 N，使得

$$A=M-N \tag{1}$$

则称式(1)为矩阵 A 的一个分裂，其中 M 为分裂主部。根据经典矩阵分裂理论[6] [8]，原线性方程组可改写为 $Mx=Nx+b$，由于 M 非奇异，相应的定常迭代格式可写为

$$x^{(k+1)}=M^{-1}Nx^{(k)}+M^{-1}b=Bx^{(k)}+c \tag{2}$$

其中，$B=M^{-1}N$ 为迭代矩阵，$c=M^{-1}b$ 为常向量。不同的矩阵分裂对应不同的迭代矩阵结构，从而影响误差在迭代过程中的传播特征。

设 x^* 为原方程组 $Ax=b$ 的精确解，并定义第 k 步迭代误差为 $e^{(k)}=x^{(k)}-x^*$。由于 x^* 同时满足不动点关系 $x^*=Bx^*+c$，将其与式(2)相减，可得到经典误差传播关系[6] [8]

$$e^{(k+1)}=Be^{(k)} \tag{3}$$

式(3)说明，定常迭代过程中误差的传播由迭代矩阵 B 决定。若记 B 的特征值为 $\lambda_i(B)$，则其谱半径定义为 $\rho(B)=\max_i|\lambda_i(B)|$。谱半径是刻画定常迭代渐近行为的重要谱量。关于谱半径与定常迭代收敛之间的严格充要关系，将在第 3.2 节作为经典引理进一步给出，本节仅引入相关记号和基本关系。

2.2. 对角分裂与三类经典迭代方法

以下假设系数矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的主对角元素均非零，即 $a_{ii}\neq 0$。

定义 2.2 (对角分裂) [3] [6] [7]：

记 D 为由矩阵 A 的主对角元素构成的对角矩阵，L 和 U 分别表示由 A 的严格下三角部分和严格上三角部分取相反数后得到的矩阵，则有

$$A=D-L-U \tag{4}$$

式(4)是 Jacobi、Gauss-Seidel 和 SOR 等经典定常迭代方法所采用的基本矩阵分裂形式。

定义 2.3 (Jacobi 与 Gauss-Seidel 迭代) [3] [6] [7]：

基于式(4)，Jacobi 方法仅利用对角部分进行更新，其迭代矩阵为 $B_J=D^{-1}(L+U)$；Gauss-Seidel 方法进一步利用当前迭代过程中已经更新的下三角信息，其迭代矩阵为 $B_{GS}=(D-L)^{-1}U$。两种方法均属于经典定常迭代方法，其收敛性能与相应迭代矩阵的谱结构密切相关[3] [6] [7]。

定义 2.4 (SOR 迭代) [6] [7]：

在 Gauss-Seidel 迭代结构中引入松弛参数 ω，可得到逐次超松弛方法。按照式(4)所采用的分裂记号，SOR 的经典矩阵分裂形式为

$$M_\omega=\frac{1}{\omega}(D-\omega L),N_\omega=\frac{1}{\omega}\left[(1-\omega)D+\omega U\right] \tag{5}$$

并满足

$$A = M_\omega - N_\omega \tag{6}$$

相应的 SOR 迭代矩阵为

$$B_\omega = (D - \omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega U\right] \tag{7}$$

式(5)、式(6)和式(7)均属于经典 SOR 迭代理论中的标准形式[6] [7]。松弛参数 ω 不改变原线性方程组本身，而是通过调节迭代更新权重改变相应迭代矩阵的谱结构和误差传播过程，从而影响实际收敛性能。

性质 2.1 (SOR 与 Gauss-Seidel 方法的关系) [6] [7]：

当 $\omega = 1$ 时，由式(7)直接得到 $B_\omega = (D-L)^{-1}U = B_{GS}$，因此 SOR 方法退化为 Gauss-Seidel 方法。

当 $0 < \omega < 1$ 时通常称为欠松弛情形，当 $1 < \omega < 2$ 时通常称为过松弛情形[6] [7]。需要说明的是，这里的参数区间仅用于区分不同松弛形式，并不等同于对一般矩阵均成立的统一收敛区间。本文关于实对称正定系统中 SOR 严格收敛区间的讨论，将在第 3.2 节中依据经典理论正式给出。

为比较参数优化与迭代结构本身的影响，后续数值实验还将加权 Jacobi 方法作为参照。根据经典加权 Jacobi 迭代理论[6] [8]，其迭代矩阵可写为 $B_J(\tau) = I - \tau D^{-1}A = (1-\tau)I + \tau D^{-1}(L+U)$，其中 τ 为加权参数。加权 Jacobi 与 SOR 虽然均含有可调参数，但二者对应不同的误差传播结构，因此各自能够达到的收敛性能并不相同。

2.3. 残差、误差与停止准则

在实际数值计算中，精确解 x^* 通常未知，因此难以直接利用误差向量作为迭代停止依据。为衡量当前近似解对原线性方程组的满足程度，引入残差向量。

定义 2.5 (残差向量) [8] [13]：

第 k 步迭代的残差向量定义为

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \tag{8}$$

由 $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ 及 $Ax^* = b$，可得 $r^{(k)} = -Ae^{(k)}$。因此，残差与误差之间存在直接的线性联系。需要指出的是，当系数矩阵条件数较大时，较小的残差并不必然意味着具有相同数量级的解误差。因此，在比较不同迭代方法时，应采用统一的停止准则，以保证实验结果具有可比性[8] [13]。本文采用相对残差 $\dfrac{\left\|r^{(k)}\right\|_2}{\|b\|_2}$ 作为主要停止指标。

引理 2.1 (残差传播关系) [6] [8]：

对于式(2)所表示的定常迭代格式，残差满足

$$r^{(k+1)} = ABA^{-1}r^{(k)} \tag{9}$$

由于 ABA^{-1} 与 B 相似，二者具有相同的特征值和谱半径。因此，在渐近收敛阶段，通过相对残差曲线观察迭代过程，与利用迭代矩阵谱半径分析误差衰减具有一致的谱理论基础[6] [8]。本文后续将结合谱半径、迭代次数和相对残差变化，对不同松弛参数及不同迭代方法的收敛性能进行评价。

3. SOR 迭代的收敛性与收敛速度

3.1. SOR 迭代的一致性与误差传播

设 x^* 为 $Ax = b$ 的精确解，并记 $c_\omega = M_\omega^{-1}b$。由 $Ax^* = b$ 以及式(6)，可得

$$x^{*}=B_{\omega}x^{*}+c_{\omega} \tag{10}$$

因此，原线性方程组的精确解同时也是 SOR 迭代格式的不动点。若定义迭代误差为 $e^{(k)}=x^{(k)}-x^{*}$，则由经典误差传播关系可知 $e^{(k+1)}=B_{\omega}e^{(k)}$。由此可见，松弛参数 ω 不改变问题的精确解，而是通过改变迭代矩阵 B_{ω} 调节误差传播过程。

从计算实现角度看，$D-\omega L$ 为下三角矩阵。当系数矩阵主对角元素均非零时，SOR 迭代可以通过前代方式逐分量完成，而无需显式计算矩阵逆。其经典逐分量迭代格式为[6] [7]

$$x_{i}^{(k+1)}=(1-\omega)x_{i}^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_{i}-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_{j}^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_{j}^{(k)}\right],i=1,2,\cdots,n \tag{11}$$

式(11)保留了 Gauss-Seidel 方法的顺序更新特征，同时通过松弛参数调整当前更新量。于是，研究 ω 的作用，本质上就是研究其对 B_{ω} 以及相应误差传播过程的影响。

3.2. SOR 迭代的收敛条件

在讨论收敛速度之前，首先需要明确迭代过程收敛的条件。经典定常迭代理论给出了以谱半径为核心的收敛判据。

引理 3.1 (定常迭代的谱半径收敛判据) [6] [8]：

对于定常迭代格式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c$，迭代过程对任意初始向量均收敛于唯一不动点的充要条件为

$$\rho(B)<1 \tag{12}$$

引理 3.1 表明，定常迭代是否收敛可以归结为迭代矩阵的谱分析问题。对于 SOR 方法，只需考察 $\rho(B_{\omega})$ 是否小于 1。

本文主要考虑实对称正定线性系统。对于该类系统，SOR 方法具有经典且明确的参数收敛结论。

定理 3.1 (实对称正定系统上的 SOR 收敛性) [6] [7]：

设系数矩阵 A 为实对称正定矩阵，按式(4)分裂为 $A=D-L-U$。相应的 SOR 分裂及迭代矩阵由式(5)~式(7)给出。对于实松弛参数 ω，SOR 迭代收敛的充要条件为

$$0<\omega<2\Leftrightarrow\rho(B_{\omega})<1 \tag{13}$$

需要注意的是，定理 3.1 解决的是 SOR 迭代“能否收敛”的问题，而不能说明区间 $0<\omega<2$ 内不同松弛参数具有相同的收敛速度。即使均满足 $\rho(B_{\omega})<1$，不同参数对应的谱半径仍可能存在明显差异。谱半径越小，渐近误差通常衰减越快，在相同停止准则下达到给定误差容限所需的迭代次数也通常越少。因此，理论收敛区间并不能直接反映不同松弛参数下的实际收敛效率。

3.3. SOR 迭代的收敛速度及其谱半径刻画

在确认 SOR 迭代收敛后，需要进一步研究其收敛速度。由误差传播关系递推可得 $e^{(k)}=B_{\omega}^{k}e^{(0)}$。根据经典矩阵迭代理论[6] [8]，误差的渐近衰减满足

$$\limsup_{k\to\infty}\left\|e^{(k)}\right\|^{\frac{1}{k}}\le\rho(B_{\omega}) \tag{14}$$

在初始误差含有占优特征模态且满足通常谱条件时，渐近误差衰减主要由 $\rho(B_{\omega})$ 控制。因此，可将 SOR 迭代的渐近收敛率表示为[6] [8]

$$R_{\infty}(B_{\omega})=-\ln\rho(B_{\omega}) \tag{15}$$

当$0<\rho(B_\omega)<1$时，谱半径越小，$R_\infty(B_\omega)$越大，表明 SOR 迭代在渐近阶段的误差衰减越快。根据经典定常迭代理论，渐近阶段的误差衰减主要受$\rho^k(B_\omega)$控制[6] [8]。因此，不同松弛参数即使对应的谱半径差异不大，经过多步迭代后，也可能导致明显的误差衰减速度和迭代次数差异。

由此可见，“收敛”与“快速收敛”是两个不同层次的问题。定理 3.1 给出了松弛参数的理论可行区间，而实际收敛效率还取决于$\rho(B_\omega)$随ω的变化规律，因此有必要进一步研究二者之间的定量关系。

4. 松弛参数对收敛性能的影响与最优松弛参数

4.1. 理论收敛区间与高效率参数区域

由第 3 章的经典 SOR 收敛定理可知，当系数矩阵A为实对称正定矩阵时，SOR 迭代收敛的充要条件为$0<\omega<2$。因此，区间$(0,2)$给出了松弛参数的理论可行范围。然而，满足收敛条件仅能说明迭代误差最终趋于零，并不能说明不同参数具有相同或相近的收敛速度。

对于给定的松弛参数ω，SOR 迭代的渐近收敛性能主要由迭代矩阵B_ω的谱半径决定。当$\rho(B_\omega)$接近 1 时，即使仍有$\rho(B_\omega)<1$，误差也可能衰减得十分缓慢；反之，谱半径越小，稳定迭代阶段的误差通常衰减越快。因此，理论收敛区间与实际具有较高计算效率的参数区域并不完全一致。松弛参数选择不仅需要满足$0<\omega<2$，还需要进一步考察$\rho(B_\omega)$随ω的变化规律，从而在可行区间内寻找具有较快渐近收敛速度的参数。

这一认识将 SOR 参数选择划分为两个层次：首先确定能够保证迭代收敛的参数范围；在此基础上，再通过谱半径最小化进一步提高收敛效率。后者构成本文最优松弛参数分析的主要理论依据。

4.2. 松弛参数对收敛速度的定量影响

对于具有特定结构并满足经典相容排序条件的线性系统，已有 SOR 理论能够进一步给出迭代矩阵谱半径与松弛参数之间的显式关系[7]。记普通 Jacobi 迭代矩阵为B_J，并令$\beta=\rho(B_J)<1$，则有如下经典结果。

定理 4.1 (SOR 谱半径与松弛参数的关系) [7]：

在满足经典相容排序等相应理论条件时，SOR 迭代矩阵B_ω的谱半径可表示为

$$\rho(B_\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left[\omega\beta+\sqrt{\omega^2\beta^2-4(\omega-1)}\right]^2, & 0<\omega\le\omega_{opt}\\ \omega-1, & \omega_{opt}\le\omega<2\end{cases} \tag{16}$$

该结果属于经典 SOR 谱理论，其证明可参见文献[7]。

式(16)从定量上揭示了松弛参数与渐近收敛速度之间的关系。在上述适用条件下，当ω从较小值逐渐增大并接近ω_{opt}时，$\rho(B_\omega)$逐步降低；当$\omega=\omega_{opt}$时，谱半径达到最小值；继续增大ω后，谱半径重新增大。因此，SOR 方法并不存在“松弛参数越接近 2，收敛速度就一定越快”的一般规律，参数的作用应通过其对迭代矩阵谱半径的影响来判断。

当两个参数对应的谱半径均小于 1 但大小存在差异时，经过多步迭代后，其误差衰减程度可能相差显著。因此，ω对 SOR 性能的影响不仅是定性的，而且可以通过$\rho(B_\omega)$对收敛速度进行定量刻画。

需要说明的是，式(16)并非对任意实对称正定矩阵都可直接使用，而是依赖于相容排序等特定结构条件。对于一般工程稀疏矩阵，如果不能确认其满足相应假设，就不宜直接利用式(16)计算谱半径，而应通过数值特征值方法获得$\rho(B_\omega)$随参数变化的实际关系。

4.3. 最优松弛参数及模型问题的解析结果

根据式(16)，在满足相应经典理论条件时，存在使 SOR 迭代矩阵谱半径达到最小值的最优松弛参数。

由于谱半径决定定常迭代的渐近收敛速度，因此，该参数使 SOR 迭代在渐近意义下获得最快的误差衰减速度。在上述条件下，该最优松弛参数由普通 Jacobi 迭代矩阵的谱半径显式确定，其经典解析结果如下。

定理 4.2 (SOR 理论最优松弛参数) [7]：

记普通 Jacobi 迭代矩阵为 B_J。在满足经典相容排序等理论条件且 $\rho(B_J)<1$ 时，SOR 方法的理论最优松弛参数为

$$\omega_{opt}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(B_J)}} \tag{17}$$

定理 4.2 表明，对于满足相应结构条件的线性系统，SOR 理论最优松弛参数可由 Jacobi 迭代矩阵的谱半径直接确定。这里的“最优”是指使 $\rho(B_\omega)$ 取得最小值，从而获得最快的渐近误差衰减。

以一维 Poisson 离散模型为例。对一维 Poisson 方程采用二阶中心差分离散，可得到标准三对角矩阵，其 Jacobi 迭代矩阵满足 $\rho(B_J)=\cos\frac{\pi}{n+1}$。将其代入式(17)，可得

$$\omega_{opt}=\frac{2}{1+\sin\frac{\pi}{n+1}} \tag{18}$$

上述结果为一维 Poisson 离散模型下的经典 SOR 最优参数结论[7]。该模型具有可精确计算的理论最优松弛参数，因此可作为后续数值参数搜索方法的验证基准。后文将选取不同规模的 Poisson 离散矩阵，将数值搜索得到的参数与式(18)的解析结果进行比较，以检验参数搜索方法对理论最优值的识别精度。

对于一般工程稀疏矩阵，其谱结构未必满足定理 4.2 所要求的特殊条件，因此通常难以直接获得最优松弛参数的闭式表达式。针对这一情形，下一章将把松弛参数选择转化为以 SOR 迭代矩阵谱半径最小化为目标的数值优化问题。

5. 近似最优松弛参数选择策略

5.1. 基于谱半径最小化的参数选择模型

对于不满足定理 4.2 解析适用条件的一般工程稀疏矩阵，最优松弛参数通常难以由闭式公式直接确定。鉴于 SOR 迭代的渐近收敛性能主要由 $\rho(B_\omega)$ 决定，本文将松弛参数选择转化为理论收敛区间内的谱半径最小化问题，并将近似最优松弛参数定义为

$$\omega^*=\arg\min_{0<\omega<2}\rho(B_\omega) \tag{19}$$

式(19)给出了本文数值参数搜索的目标模型。与定理 4.2 中的解析最优参数不同，这里的 ω^* 通过数值搜索获得，适用于难以直接得到闭式最优参数的一般稀疏矩阵。

为降低固定网格分辨率对参数识别结果的影响，本文采用逐层细化的多尺度网格搜索。搜索首先在理论可行区间内以较大步长确定谱半径较低的参数区域，再围绕当前最优点逐步缩小搜索范围并提高参数分辨率，直至最优参数在给定精度下保持稳定。在参数评价指标的选择上，本文以谱半径作为主要优化依据，而不直接以某一特定右端项和初始向量下的迭代次数作为搜索目标，这是因为后者还会受到初始条件和停止准则等因素影响。参数确定后，再通过实际迭代次数和相对残差变化检验其有效性，从而兼顾参数选择的稳定性与实际计算表现[11] [12]。

由于式(19)要求在多个候选参数下反复获得 $\rho(B_\omega)$，谱半径的计算方式将直接影响参数搜索的附加成本。对于规模适中的矩阵，可以采用直接特征值计算；对于更高维的稀疏系统，则需要进一步考虑更

高效的谱半径估计方法，相关实现将在 5.3 节讨论。

5.2. Poisson 模型的可解析验证

为检验上述搜索策略对理论最优松弛参数的识别精度，本文选取一维 Poisson 方程的标准离散矩阵作为验证对象，分别考察 $n=20,50,100,200$ 的情形。理论最优参数由式(18)直接计算，并在相同收敛区间内进行多尺度数值搜索。表 1 列出了不同规模下 Jacobi 迭代矩阵的谱半径、理论最优参数、数值搜索结果以及相应的 SOR 谱半径和迭代次数。可以看到，在本文采用的参数精度下，搜索所得 ω^* 与解析值 ω_{opt} 一致，说明搜索程序能够稳定恢复模型问题的理论最优参数[7]。

Table 1. Theoretical optimal relaxation parameters and numerical search results for the one-dimensional Poisson model
表 1. 一维 Poisson 模型的理论最优参数与数值搜索结果

n	$\rho(B_J)$	理论 ω_{opt}	搜索 ω^*	$\rho(B_{\omega^*})$	迭代次数
20	0.988831	1.740580	1.740580	0.740580	70
50	0.998103	1.884018	1.884018	0.884018	161
100	0.999516	1.939676	1.939676	0.939676	304
200	0.999878	1.969223	1.969223	0.969223	603

由表 1 可见，随着矩阵阶数 n 增大，Jacobi 迭代矩阵的谱半径 $\rho(B_J)$ 逐渐接近 1，理论最优松弛参数 ω_{opt} 也逐步趋近于 2。在本文采用的搜索精度和数值保留位数下，数值搜索得到的 ω^* 与理论值 ω_{opt} 在表中一致，说明多尺度网格搜索能够较准确地识别该模型问题的理论最优参数。这种一致性仅表示二者差异未超过当前搜索或显示精度，并不意味着严格不存在误差。即使采用各自最优参数，迭代次数仍由 70 次增至 603 次，说明参数优化不能消除问题规模增大带来的迭代负担。

5.3. 搜索精度与计算复杂度

5.2 节验证了当矩阵规模较小时，可以通过完整特征值计算获得 SOR 迭代矩阵 B_ω 的谱半径 $\rho(B_\omega)$；但随着矩阵维数增加，完整特征值分解的计算量和存储开销迅速增大，不适合高维稀疏系统。由于参数搜索只需要获得决定谱半径的主导特征值，而无需求得全部特征值，因此可采用 Arnoldi 方法进行迭代谱估计[8]。

Arnoldi 过程只需反复计算矩阵与向量乘积 $B_\omega v$，无需显式构造完整的 B_ω。一次 $B_\omega v$ 的计算可先完成 $\left[(1-\omega)D+\omega U\right]v$ 的稀疏矩阵与向量乘积运算，再通过求解下三角系统获得结果，从而保留原问题的稀疏结构。经过 m 步 Arnoldi 迭代，有

$$B_\omega V_m = V_m H_m + h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^{\mathrm{T}},\ \hat{p}_m(B_\omega) = \max_{\theta\in\sigma(H_m)} |\theta| \tag{20}$$

其中，H_m 的 Ritz 值用于近似原迭代矩阵的主导特征值(即绝对值最大的特征值)。当主导 Ritz 值尚未稳定时，可以通过增加 Krylov 子空间维数或采用重启 Arnoldi 策略提高谱半径估计的稳定性。与完整特征值分解相比，这种处理能够保留原矩阵的稀疏结构，并显著降低高维问题中完整谱计算所带来的存储和运算负担[8]。

为考察该方法在较高维稀疏系统中的适用性，本文进一步选取 $n=1200$ 的一维 Poisson 离散矩阵，并采用 200 步 Arnoldi 过程估计 SOR 迭代矩阵的谱半径。该问题的理论最优参数为 $\omega_{opt}=1.994782$，对应精确渐近因子为 0.994782，Arnoldi 估计值为 0.993009，相对偏差约为 0.18%。本文数值实验程序采用 Python

实现，所有计时均在同一计算环境下完成。单个参数点的谱估计中位耗时约为 0.09 s，若多尺度搜索累计考察约 60 个候选参数，谱估计阶段的总时间约为 5~6 s。按照渐近因子估算，在相对误差衰减至 10^{-8} 的尺度下，Gauss-Seidel 方法约需 2.69×10^{6} 次迭代，而采用理论最优参数的 SOR 方法约需 3.52×10^{3} 次迭代。对于同一系数矩阵需要重复求解多个右端项的情形，前期参数搜索的成本能够由后续迭代次数的减少逐步摊销。

参数搜索精度还应与谱半径曲线在最优点附近的局部形态以及实际求解需求相匹配。若极小值附近曲线较为平坦，进一步增加参数小数位通常不会明显改善实际迭代性能。若曲线在最优点附近变化较快，则较小的参数扰动也可能造成明显的收敛效率差异。后文 bcsstk01 实验中，当 ω 从 1.88 增加至 1.895 时，谱半径由 0.937164 下降至约 0.900，而进一步增加至 1.90 后谱半径开始回升，表明该矩阵在最优区域附近具有较明显的参数敏感性。因此，本文在最终实验中保留四至五位小数以保证结果的稳定复现。对于仅进行一次求解或矩阵规模较小的问题，则应综合谱估计成本和实际迭代收益确定搜索精度，而没有必要机械追求过多参数位数。

在完成参数搜索策略的可解析验证及高维谱半径估计可行性分析后，下面进一步选取真实结构力学稀疏矩阵 bcsstk01 作为工程基准对象，考察所提出参数选择方法在一般工程稀疏系统中的适用性，并通过谱半径、迭代次数和相对残差变化评价近似最优松弛参数对 SOR 实际收敛性能的改善效果。

6. 真实结构刚度矩阵数值实验

6.1. 数据来源与实验设置

本文选取 SuiteSparse Matrix Collection 中 Harwell-Boeing 组收录的结构刚度矩阵 bcsstk01 作为主要数值实验对象。该矩阵来源于实际结构力学问题，具有实对称正定特征，适合用于检验前文近似最优松弛参数选择方法在工程稀疏矩阵上的实际表现。本文根据 Matrix Market 坐标格式数据恢复系数矩阵，并结合其对称存储方式还原完整矩阵。后续实验将在统一的初始条件与停止准则下，考察不同松弛参数对应的 SOR 迭代矩阵谱半径、迭代次数和相对残差变化，并与 Gauss-Seidel 及加权 Jacobi 方法进行比较。矩阵的基本数值特征见表 2 [14]-[16]。

Table 2. Basic numerical characteristics of the bcsstk01 benchmark matrix
表 2. bcsstk01 基准矩阵的基本数值特征

指标	数值
矩阵阶数 n	48
非零元数 n_{nz}	400
非零密度	17.3611%
对称性误差 $\left\|A-A^{\mathrm{T}}\right\|_{\max}$	0
最小特征值	3.417268×10^{3}
最大特征值	3.015179×10^{9}
2-范数条件数	8.823363×10^{5}

由表 2 可见，bcsstk01 虽然矩阵阶数较小，但其最大与最小特征值相差约六个数量级，2-范数条件数达到 8.823363×10^{5}，具有较明显的谱尺度差异，适合用于考察不同矩阵分裂方式和松弛参数下迭代性能

的变化。为保证各方法在统一条件下比较，实验采用相同的右端项构造规则、初始向量和相对残差停止准则。需要说明的是，系数矩阵 A 来自公开工程基准数据，而右端项和初始向量属于为数值验证构造的实验量，不将其解释为原始结构问题中的实际载荷数据。在统一实验条件下，下面首先考察松弛参数变化对 SOR 迭代矩阵谱半径及实际迭代效率的影响。

6.2. 松弛参数对 SOR 收敛性能的影响

为考察松弛参数对 bcsstk01 上 SOR 收敛性能的影响，本文在理论收敛区间内进行多尺度参数搜索。结果表明，SOR 迭代矩阵谱半径随 ω 变化表现出明显的参数敏感性，逐层细化后得到近似最优松弛参数及相应谱半径

$$\omega^{*} \approx 1.89455, \rho\left(B_{\omega^{*}}\right) \approx 0.899763 \tag{21}$$

为考察整个参数区间内谱半径的变化规律，图 1 给出了 $\rho\left(B_{\omega}\right)$ 随松弛参数变化的结果。

从图 1 可以看出，谱半径在较宽的参数范围内先缓慢下降，进入最优区域后下降速度明显加快，越过极小点后又迅速回升。这说明 $0<\omega<2$ 所给出的理论收敛区间明显宽于实际具有较高迭代效率的参数区域。当 $\omega=1$ 时，SOR 退化为 Gauss-Seidel 方法，其谱半径仍达到 0.996914，虽然满足收敛条件，但距离 1 较近，因而渐近误差衰减较慢。为进一步检验谱半径变化是否能够反映实际迭代效率，表 3 列出了若干代表性松弛参数对应的谱半径和迭代次数。

表 3 表明，ω 在较低区间变化时，谱半径下降相对平缓。参数进入 1.85 附近以后，谱半径下降明显加快，并在 1.895 附近达到较低水平。继续增大参数后，谱半径重新上升，实际迭代次数也随之增加。因此，简单依据松弛参数越接近 2 则收敛越快的经验判断并不可靠。

从表 3 可以看出，迭代次数在近似最优参数附近形成较明显的低谷，并在该区域两侧迅速增加，其变化趋势与图 1 中的谱半径曲线基本一致。这说明谱半径能够较好地解释该问题稳定迭代阶段的收敛效率，也表明在最优区域附近进行局部参数细化具有实际意义。上述比较仅限于 SOR 方法内部不同松弛参数之间的差异，下面进一步与 Gauss-Seidel 和加权 Jacobi 方法进行横向比较，以区分参数优化效应与迭代结构本身的影响。

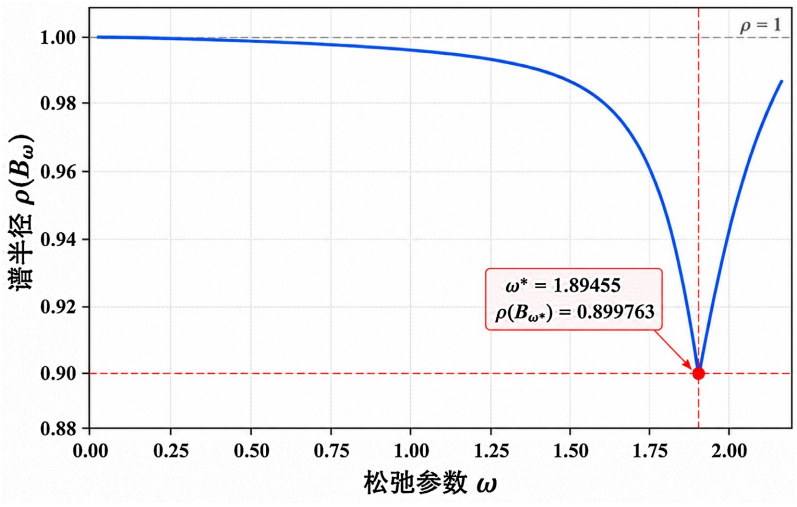


Figure 1. Spectral radius of the SOR iteration matrix versus the relaxation parameter for bcsstk01
图 1. bcsstk01 矩阵上 SOR 迭代矩阵谱半径随松弛参数的变化

Table 3. Parameter sensitivity of SOR for bcsstk01
表 3. bcsstk01 矩阵上 SOR 迭代的参数敏感性

ω	$\rho(B_\omega)$	迭代次数
0.50	0.998971	5098
0.80	0.997942	2801
1.00	0.996914	2031
1.20	0.995370	1493
1.50	0.990712	881
1.70	0.982200	530
1.80	0.970641	355
1.85	0.956864	260
1.88	0.937164	193
1.895	0.900192	166
1.90	0.904955	177
1.92	0.923999	223
1.95	0.952534	361

6.3. 不同迭代方法的性能比较

在完成 SOR 内部参数敏感性分析后，为进一步区分松弛参数优化带来的收益与不同迭代结构本身的影响，本文比较加权 Jacobi、Gauss-Seidel 以及不同松弛参数下的 SOR 方法。对于加权 Jacobi 方法，记 $S = D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}$。由于 A 为实对称正定矩阵，S 同样为实对称正定矩阵。根据经典加权 Jacobi 的最优参数理论[6] [8]，得到其谱区间意义下的最优加权参数为

$$\tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min}(S) + \lambda_{\max}(S)} \tag{22}$$

将 bcsstk01 对应的 $\lambda_{\min}(S)$ 和 $\lambda_{\max}(S)$ 代入式(22)，得到 $\tau_{opt} = 0.951024$，其对应的最优谱半径为 0.998531，仍明显高于近似最优 SOR 的 0.899763。为在统一条件下比较不同方法的实际收敛性能，本文采用相同的右端项构造方式、初始向量，并以相对残差不超过 10^{-8} 作为统一停止准则，各方法的比较结果见表 4。

Table 4. Performance comparison of different iterative methods for the bcsstk01 matrix
表 4. bcsstk01 矩阵上不同迭代方法的性能比较

方法	参数	谱半径	迭代次数	最终相对残差
加权 Jacobi	0.951024	0.998531	8049	9.991×10^{-9}
Gauss-Seidel	1.000000	0.996914	2031	9.999×10^{-9}
SOR	1.500000	0.990712	881	9.996×10^{-9}
SOR	1.800000	0.970641	355	9.906×10^{-9}
SOR	1.894550	0.899763	166	8.867×10^{-9}

由表 4 可知，近似最优 SOR 达到统一停止精度仅需 166 次迭代，相比 Gauss-Seidel 的 2031 次减少约 91.8%，相比最优加权 Jacobi 的 8049 次减少约 97.9%。这表明参数优化能够显著改善同一迭代族内部的收敛效率，但不同矩阵分裂结构形成的误差传播方式同样会对最终性能产生重要影响。加权 Jacobi 即使采用其谱区间意义下的最优参数，仍存在衰减较慢的特征误差分量，因此整体收敛速度仍然较慢。

6.4. 不同停止精度下的稳健性

为检验近似最优松弛参数在不同停止精度下所表现出的迭代效率优势是否稳定，本文进一步比较 Gauss-Seidel 与不同松弛参数 SOR 方法的相对残差收敛过程。本文以相对残差作为统一评价指标，图 2 给出了四组代表性参数对应的相对残差随迭代次数的变化。

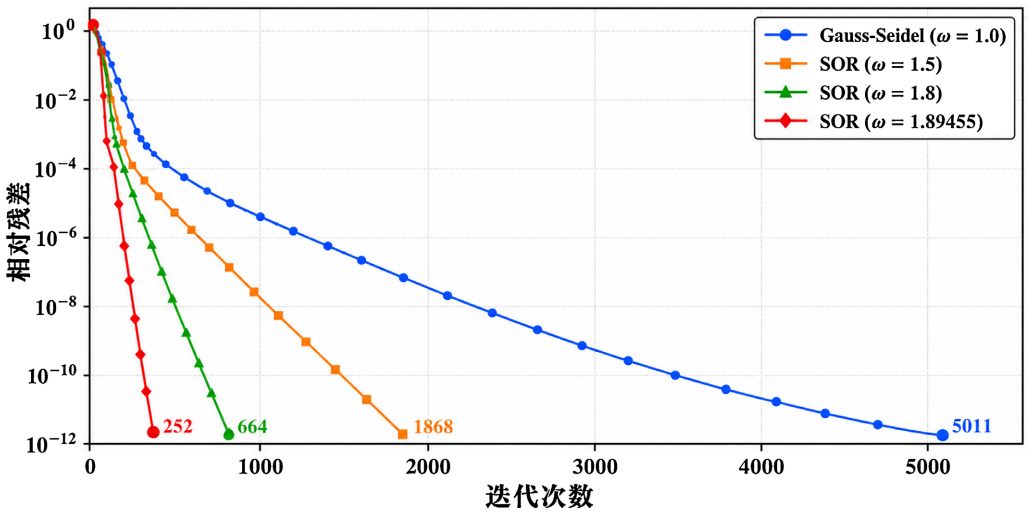


Figure 2. Relative residual histories of Gauss-Seidel and SOR with different relaxation parameters for bcsstk01
图 2. bcsstk01 矩阵上 Gauss-Seidel 与不同松弛参数 SOR 方法的相对残差收敛曲线

从图 2 可以看出，Gauss-Seidel 的相对残差下降最慢，而 $\omega = 1.89455$ 对应的 SOR 方法具有更快的残差衰减速度，这与其较小的迭代矩阵谱半径相一致。为进一步考察这一性能优势在不同停止精度下是否保持稳定，本文将相对残差停止阈值 ε 依次取为 10^{-6},10^{-8},10^{-10} 和 10^{-12}，各方法达到相应停止条件所需的迭代次数列于表 5。

Table 5. Comparison of iteration counts under different relative residual tolerances for the bcsstk01 matrix
表 5. bcsstk01 矩阵上不同相对残差阈值下的迭代次数比较

相对残差阈值	GS ($\omega = 1$)	SOR (1.5)	SOR (1.8)	SOR (1.89455)
10^{-6}	555	388	201	123
10^{-8}	2031	881	355	166
10^{-10}	3521	1375	510	209
10^{-12}	5011	1868	664	252

表 5 显示，在不同停止精度下，近似最优 SOR 始终具有更少的迭代次数；随着停止阈值收紧，其相

对 Gauss-Seidel 的优势进一步扩大，表明该参数选择具有较好的稳定性。鉴于 bcsstk01 规模较小，本文主要以谱半径、迭代次数和相对残差作为性能评价指标，而不以单次运行时间作为主要依据。

6.5. 谱结构与结果解释

为进一步解释加权 Jacobi 收敛较慢以及 SOR 最优区域较为敏感的原因，本文考察普通 Jacobi 迭代矩阵 $B_J = D^{-1}(L+U)$ 的谱结构。记 $S = D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}$，根据经典加权 Jacobi 迭代的谱分析结果[6] [8]，加权 Jacobi 迭代矩阵 $B_J(\tau) = I - \tau D^{-1}A$ 的特征值为 $\mu_i(\tau) = 1 - \tau\lambda_i(S)$，其谱半径及最优谱半径分别为

$$\rho\left[B_J(\tau)\right] = \max_i \left|1 - \tau\lambda_i(S)\right|, \rho_{opt}^{(J)} = \frac{\lambda_{\max}(S) - \lambda_{\min}(S)}{\lambda_{\max}(S) + \lambda_{\min}(S)} \tag{23}$$

对于 bcsstk01，普通 Jacobi 迭代矩阵的 48 个特征值均为实数，其取值范围约为 $[-1.101452, 0.998456]$，因而 $\rho(B_J) = 1.101452 > 1$，说明未加权 Jacobi 在该矩阵上并不收敛。相应地，S 的最小和最大特征值约为 0.001544 和 2.101452。图 3 给出了 B_J 的特征值分布，用于直观展示其谱结构。

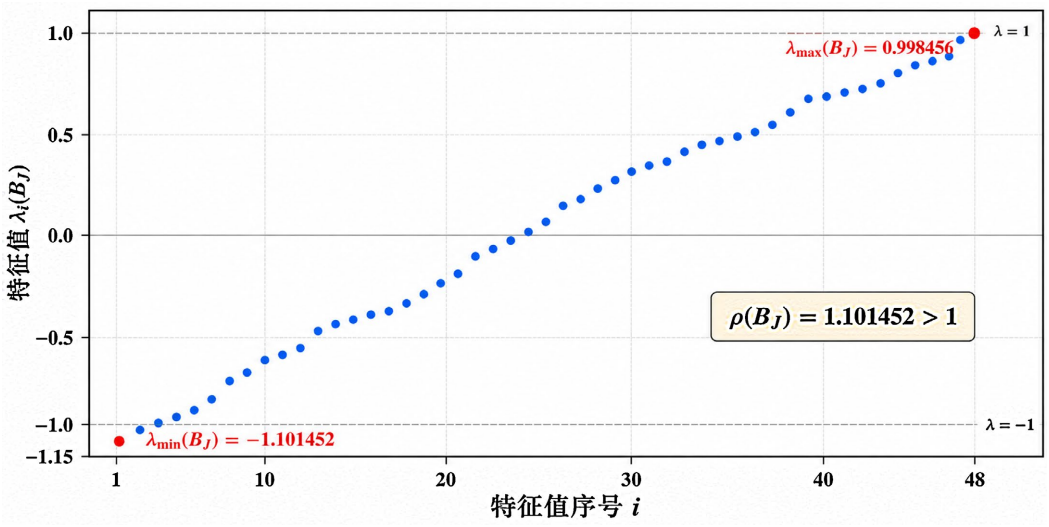


Figure 3. Eigenvalue distribution of the Jacobi iteration matrix for bcsstk01
图 3. bcsstk01 矩阵的 Jacobi 迭代矩阵特征值分布

由图 3 和式(23)可以看出，即使采用最优加权参数，谱区间两端对应的误差模态仍会映射到非常接近单位圆的位置，因此加权 Jacobi 的最小谱半径仍达到 0.998531，这从谱结构上解释了其需要 8049 次迭代才能达到 10^{-8} 相对残差的原因。SOR 利用当前迭代步中已经更新的下三角分量改变误差传播结构，使占优误差模态得到更强抑制，并将最优谱半径降低至约 0.899763。在最优参数附近，不同占优模态对谱半径的控制发生转换，使 $\rho(B_\omega)$ 在局部呈现较明显的尖锐谷值，与图 1 和表 3 所反映的参数敏感性相一致。

需要说明的是，近似最优 SOR 并没有改变原系数矩阵 A 的条件数，其加速来源于迭代矩阵误差传播结构的调整，而不是原线性方程组本身变成了条件数更低的问题。松弛参数优化与预条件方法虽然都可以改善迭代性能，但二者作用机制并不相同。前者是在既定矩阵分裂结构下调节误差传播过程，后者则通过构造等价系统改善求解问题的谱性质。本文所观察到的收敛加速主要来源于松弛参数对 SOR 迭代矩阵谱结构的调节。

7. 讨论

7.1. 参数选择的适用边界与方法比较

本文的理论分析与数值结果表明，SOR 方法的理论收敛区间与实际具有较高计算效率的参数区域并不完全一致。对于实对称正定矩阵，$0<\omega<2$ 可以保证迭代收敛，但不同松弛参数对应的谱半径仍可能存在较大差异。因此，满足理论收敛条件只是参数选择的基本要求，实际收敛效率还取决于迭代矩阵的谱结构以及占优误差模态的衰减程度。本文对 bcsstk01 的实验结果进一步表明，在理论可行区间内部仍有必要对参数进行细化选择。

参数优化的效果还受到矩阵分裂结构本身的制约。本文对加权 Jacobi、Gauss-Seidel 和 SOR 方法的比较显示，即使某一迭代方法已经采用自身意义下的最优参数，也不能据此认为其性能能够接近其他分裂方法。不同分裂方式对应不同的误差传播结构，参数优化主要改善给定迭代族内部的收敛性能。对于具有特殊谱结构的模型问题，经典解析公式可以提供明确的最优参数，但一般工程矩阵未必满足相应理论条件，因此不宜直接套用模型问题中的闭式结果。

固定参数 SOR 具有结构清晰、实现简单和结果易于复现的特点，但其计算性能依赖于预先选定的松弛参数。SSOR 通过前向和反向扫描增强迭代结构的对称性，可进一步用于构造对称预条件器，但每个完整迭代周期需要更多三角求解操作。自适应 SOR 根据残差变化、局部谱信息或历史迭代表现动态调整参数，可以减弱对单一固定参数的依赖，但相应的参数更新机制和收敛分析更加复杂。本文采用固定参数 SOR，主要是为了在统一的定常迭代框架下清晰分析松弛参数、谱半径与实际迭代性能之间的关系[7] [8] [11]。

本文的严格理论结论主要建立在实对称正定矩阵条件下，不能直接推广到 H-矩阵以及一般非对称、非正规系统。在这些问题中，SOR 迭代矩阵的谱性质还会受到矩阵非对称性和非正规性的影响，理论收敛区间与实际高效率参数区域之间的关系更加复杂，有限步迭代过程中也可能出现暂态增长。AOR 等多参数方法虽然增加了参数调节自由度，但同时扩大了参数空间，使收敛性分析与参数优化面临更高的复杂度[9] [12]。

7.2. 局限性与进一步研究

本文仍存在一定的适用范围限制。现有理论分析和主要数值实验集中于实对称正定矩阵，对 H-矩阵、鞍点系统和一般非正规矩阵尚未建立统一的参数优化结论。对于更高维的稀疏系统，谱半径估计也可能成为参数搜索中的主要附加成本。Arnoldi 方法能够避免完整特征值分解，但随着矩阵规模进一步增大，仍需要结合重启机制、稀疏结构和搜索精度控制计算开销。对于 AOR、块松弛以及其他多参数分裂方法，一维参数搜索还将扩展为更高维的参数优化问题，需要进一步研究更加高效的搜索策略[8] [11]-[13]。

此外，本文的参数选择策略主要针对 SOR 作为独立定常迭代方法的情形。若将 SOR 用于 Krylov 子空间方法的预处理环节或多重网格方法的平滑器，其参数选择目标将受到整体求解框架、误差分量抑制需求及计算成本等因素影响。后续可进一步研究固定参数、自适应松弛与预条件技术之间的协同机制，以拓展参数选择方法在复杂求解框架中的适用范围。

8. 结论

本文以实对称正定稀疏线性系统中的 SOR 迭代为研究对象，在经典矩阵分裂与定常迭代理论基础上，分析松弛参数对 SOR 收敛性能的影响，并研究近似最优松弛参数的选择问题。依据已有 SOR 收敛理论，本文区分了“能够收敛”与“具有较高收敛效率”两个层次，说明理论收敛区间并不等同于实际具有较快收敛速度的参数区域。对于满足经典相容排序等条件的模型问题，结合已有谱理论讨论松弛参数、

迭代矩阵谱半径与理论最优参数之间的关系；对于难以直接获得解析最优参数的一般工程稀疏矩阵，则采用以谱半径最小化为目标的多尺度网格搜索策略，并利用一维 Poisson 离散模型验证参数搜索结果的可靠性。

在结构刚度矩阵 bcsstk01 上的数值实验表明，近似最优松弛参数为 $\omega^* \approx 1.89455$，对应 SOR 迭代矩阵谱半径约为 0.899763，低于 Gauss-Seidel 方法的 0.996914。在相对残差达到 10^{-8} 的统一停止准则下，Gauss-Seidel 方法需要 2031 次迭代，而近似最优 SOR 仅需 166 次。与加权 Jacobi 方法的比较进一步表明，不同迭代结构即使均进行参数优化，其最终收敛性能仍可能存在明显差异。上述结果说明，合理选择松弛参数能够有效降低 SOR 迭代矩阵的谱半径，并显著改善实对称正定稀疏系统中的实际收敛效率。

需要说明的是，本文严格的收敛理论分析及主要数值结论均限定在实对称正定矩阵范围内，所得近似最优参数也应理解为定常迭代渐近收敛意义下的最优参数。对于非对称矩阵、非正规系统以及更高维稀疏问题，参数可行范围、谱半径估计成本与实际计算收益仍需进一步研究。后续可结合 Arnoldi 谱估计、自适应松弛策略及更一般的矩阵分裂方法，进一步拓展参数选择方法的适用范围。

参考文献

[1] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 第 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2008.

[2] 曹志浩. 数值线性代数[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1996.

[3] 徐树方, 高立, 张平文. 数值线性代数[M]. 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2013.

[4] 向华, 杨志坚. 数值线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 2024.

[5] 高卫国, 魏轲, 柏兆俊. 数值线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2025.

[6] Varga, R.S. (2000) Matrix Iterative Analysis. 2nd Edition, Springer.

[7] Young, D.M. (1971) Iterative Solution of Large Linear Systems. Academic Press.

[8] Saad, Y. (2003) Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2nd Edition, SIAM.

[9] Hadjidimos, A. (1978) Accelerated Overrelaxation Method. *Mathematics of Computation*, **32**, 149-157. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1978-0483340-6

[10] Bai, Z.Z. (2024) On Convergence of the Matrix Splitting Iteration Paradigm for Solving Systems of Linear Equations. *Applied Mathematics Letters*, **150**, Article ID: 108969. https://doi.org/10.1016/j.aml.2023.108969

[11] Li, W., Wang, W., Dai, P. and Wu, Q. (2025) A Fast Parameter Optimization Framework for Iterative Solvers in Linear and Nonlinear Systems. *Applied Mathematics Letters*, **171**, Article ID: 109660. https://doi.org/10.1016/j.aml.2025.109660

[12] Ren, L., Ren, F. and Wen, R. (2016) A Selected Method for the Optimal Parameters of the AOR Iteration. *Journal of Inequalities and Applications*, **2016**, Article No. 279. https://doi.org/10.1186/s13660-016-1196-8

[13] Barrett, R., Berry, M., Chan, T.F., Demmel, J., Donato, J., Dongarra, J., *et al.* (1994) Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9781611971538

[14] Davis, T.A. and Hu, Y. (2011) The University of Florida Sparse Matrix Collection. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **38**, 1-25. https://doi.org/10.1145/2049662.2049663

[15] Duff, I.S., Grimes, R.G. and Lewis, J.G. (1989) Sparse Matrix Test Problems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **15**, 1-14. https://doi.org/10.1145/62038.62043

[16] Boisvert, R.F., Pozo, R., Remington, K., Barrett, R.F. and Dongarra, J.J. (1997) Matrix Market: A Web Resource for Test Matrix Collections. In: Boisvert, R.F., Eds., *Quality of Numerical Software*, Springer, 125-137. https://doi.org/10.1007/978-1-5041-2940-4_9