Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(11), 58-63
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1611234

Hans汉斯

一类复指数函数两种定义的构造形式

段江梅，杨惠娟，董延寿，虎亚楠，周凤春

昭通学院数学与统计学院，云南 昭通

收稿日期：2026年10月3日；录用日期：2026年11月3日；发布日期：2026年11月11日

摘　要

复指数函数是复变函数论中重要的初等函数。本文在定义了*K*-复数的基础上，给出*K*-复指数函数　　的两种定义，并对这两种定义的构造形式进行探讨。

关键词

***K*-复数，*K*-复指数函数，*K*-解析函数，*K*-*C*.-*R*.方程**

The Construction of Two Definitions for a Class of Complex Exponential Functions

Jiangmei Duan, Huijuan Yang, Yanshou Dong, Yanan Hu, Fengchun Zhou

College of Mathematics and Statistics, Zhaotong University, Zhaotong Yunnan

Received: October 3, 2026; accepted: November 3, 2026; published: November 11, 2026

Abstract

The complex exponential function is an important elementary function in complex analysis. After defining the *K*-complex number, two definitions of the *K*-complex exponential function e^{x+iky} are presented and the construction forms of these two definitions are discussed in this paper.

Keywords

***K*-Complex Number, *K*-Complex Exponential Function, *K*-Analytic Function, *K*-*C*.-*R*. Equation**

文章引用: 段江梅, 杨惠娟, 董延寿, 虎亚楠, 周凤春. 一类复指数函数两种定义的构造形式[J]. 理论数学, 2026, 16(11): 58-63. DOI: 10.12677/pm.2026.1611234

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

复指数函数 e^z 是复变函数论中最基本、最重要的初等函数之一，它不仅是复对数函数、复三角函数、复幂函数等初等函数的构造基础，而且在调和分析、常微分方程、傅里叶分析、信号处理以及量子力学等众多领域中有着广泛而深入的应用。通常，复指数函数 e^z 有两种经典的定义方式：其一是用关系式 $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ 直接规定[1]；其二是仿照实指数函数，用极限 $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{z}{n}\right]^n$ 定义[2]。此外，夏慰慈等[3]-[5]进一步给出这两种定义的构造形式。一个自然的问题是：能否将这一构造过程推广到更一般的数系，从而得到内容更丰富的初等函数理论？

在更广的数系中研究广义复数及其上的初等函数，是数学与物理中的一个经典课题。1843 年 Hamilton 引入四元数以刻画三维空间的旋转，四元数是复数的四维扩展。双曲复数又称裂复数，是形如 $z = x + jy$ 的数，其中 $j^2 = 1$ 且 $j \neq \pm 1$。该概念起源于 1848 年 James Cockle 提出的 Tessarines，1882 年威廉・金顿・克利福德将其用于几何研究。20 世纪，双曲复数被应用于狭义相对论中的洛伦兹变换建模。双复数是一类四维超复数体系，属于抽象代数中的数学概念，是超复数在四维空间中的引申形式。通过线性表示法可将其表达为 $t = w + xi + yj + zk$ 的结构，其中 $ij = k$ 的规则使其能映射为 2×2 复数矩阵组成的可交换代数系统。超复数包含不同维度的代数体系，例如四维的四元数、双复数及伴四元数，八维的八元数与复四元数，以及十六维的十六元数。近年来，张建元[6]引入了 K-复数的概念：形如 $x + iky\,(k \in R, k \neq 0)$ 的复数称为 $z = x + iy$ 的 K-复数，记为 $z(k)$，并在此定义基础上建立了 K-导数、K-C.-R.方程以及 K-解析等概念，从而为 K-复分析奠定了基础。然而，对 K-复指数函数的定义及其构造方式，以及由此派生的 K-复对数函数与 K-复三角函数，现有文献尚未进行系统的讨论。

本文在定义了 K-复数的基础上，给出 K-复指数函数的两种定义：

定义 1 对于任何复数 $z(k) = x + iky$，用关系式

$$e^{z(k)} = e^x(\cos ky + i\sin ky)$$

来规定 K-复指数函数。

定义 2 用极限关系来定义 K-复指数函数

$$e^{z(k)} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{z(k)}{n}\right]^n.$$

下面主要对两种定义的构造形式进行探讨。

2. 预备知识

定义 3 [6]设函数 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z(k)} = \lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z(k)-z_0(k)}$ 存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 是 K-可导，而此极限就定义为 $f(z)$ 在 z_0 处的 K-导数，记为 $f'_{(k)}(z_0)$。

当 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点是 K-可导时，称 $f(z)$ 在 D 内为 K-可导，其 K-导数记为 $f'_{(k)}(z)$ $(z \in D)$。

定义 4 [6]若函数 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内 K-可导，称 $f(z)$ 在 z_0 是 K-解析。若 $f(z)$ 在区域 D 内 K-可导，称 $f(z)$ 在区域 D 内 K-解析。

定义 5 [6]设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，其中 u,v 为二元实函数，若 $f(z)$ 在区域 D 内是 K-可导，且 K-导数 $f'_{(k)}(z)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+ik\Delta y}$，其中 Δu 和 Δv 分别为 Δf 的实部和虚部。$u_x=\dfrac{v_y}{k},v_x=-\dfrac{u_y}{k}$ 这个方程组称为 K-C.-R.方程。

引理 1 [6]函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z=x+iy\in D$ 是 K-可导的充要条件为 $u(x,y),v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微且满足 K-C.-R.方程。可导时其导函数

$$f'_{(k)}(z)=u_x+iv_x=\frac{v_y}{k}-i\frac{u_y}{k}=u_x-i\frac{u_y}{k}=\frac{v_y}{k}+iv_x.$$

引理 2 [6]函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内 K-解析的充要条件为 $u(x,y),v(x,y)$ 在区域 D 内可微且满足 K-C.-R.方程。

3. 两种定义的构造

3.1. 定义 1 的构造

函数 $f[z(k)]=\mathrm{e}^x[\cos(ky)+i\sin(ky)]$ (这里 $z(k)=x+iky$)具有下面的性质：

(1) 当 $y=0$ 时，$f[z(k)]=\mathrm{e}^x$，这个函数就是实指数函数。

(2) $f[z(k)]$ 在 z 平面上 K-解析，并且 $f'[z(k)]=f[z(k)]$。

事实上，记 $f[z(k)]=u(x,ky)+iv(x,ky)$，那么 $u(x,ky)=\mathrm{e}^x\cos(ky)$，$v(x,ky)=\mathrm{e}^x\sin(ky)$。由于 $u_x=\mathrm{e}^x\cos(ky)$，$u_y=-k\mathrm{e}^x\sin(ky)$，$v_x=\mathrm{e}^x\sin(ky)$，$v_y=k\mathrm{e}^x\cos(ky)$，则 u_x,u_y,v_x,v_y 在 z 平面上都是处处连续的，并且满足 K-C.-R.方程，因此 $f[z(k)]$ 在 z 平面上是 K-解析的，进一步地

$$f'[z(k)]=u_x+iv_x=\mathrm{e}^x\cos(ky)+i\mathrm{e}^x\sin(ky)=f[z(k)],$$

即 $f'[z(k)]=f[z(k)]$，实指数函数具有类似的性质。

(3) 不难验证：对任意 $z_1(k_1),z_2(k_2)\in C$，有 $f[z_1(k_1)+z_2(k_2)]=f[z_1(k_1)]f[z_2(k_2)]$。

事实上，

$$\begin{aligned}
&f[z_1(k_1)+z_2(k_2)]=\mathrm{e}^{x_1+x_2}[\cos(k_1y_1+k_2y_2)+i\sin(k_1y_1+k_2y_2)]\\
&=\mathrm{e}^{x_1+x_2}\{[\cos(k_1y_1)\cos(k_2y_2)-\sin(k_1y_1)\sin(k_2y_2)]+i[\sin(k_1y_1)\cos(k_2y_2)+\cos(k_1y_1)\sin(k_2y_2)]\}\\
&=\mathrm{e}^{x_1}[\cos(k_1y_1)+i\sin(k_1y_1)]\mathrm{e}^{x_2}[\cos(k_2y_2)+i\sin(k_2y_2)]\\
&=f[z_1(k_1)]f[z_2(k_2)].
\end{aligned}$$

类似地，实指数函数也具有这样的性质。

受上述性质启发，我们自然希望构造一个形如 $f[z(k)]=\mathrm{e}^{z(k)}$ 的复指数函数，使得

(i) 对实数 $z(k)=x$，$f(x)=\mathrm{e}^x$；

(ii) $f[z(k)]$ 在 z 平面上都是 K-解析；

(iii) 对任意 $z_1(k_1),z_2(k_2)\in C$，都满足 $f[z_1(k_1)+z_2(k_2)]=f[z_1(k_1)]f[z_2(k_2)]$。

下面将求解满足上述三个条件的函数，发现 $f[z(k)]$ 必可以表为

$$f\left[z(k)\right]=\mathrm{e}^{x}\left[\cos(ky)+i\sin(ky)\right].$$

事实上，结合条件(i)与(iii)可得

$$f\left[z(k)\right]=f(x+iky)=f(x)f(iky)=\mathrm{e}^{x}f(iky),$$

记 $f(iky)=A(ky)+iB(ky)$，这里 $A(ky)$、$B(ky)$ 都是一元实值函数。于是

$$f\left[z(k)\right]=\mathrm{e}^{x}\left[A(ky)+iB(ky)\right],$$

从而 $u(x,y)=\mathrm{e}^{x}A(ky)$，$v(x,y)=\mathrm{e}^{x}B(ky)$。

分别求偏导数得

$$u_x=\mathrm{e}^{x}A(ky),\ u_y=k\mathrm{e}^{x}A'(ky),\ v_x=\mathrm{e}^{x}B(ky),\ v_y=k\mathrm{e}^{x}B'(ky).$$

又因 $f\left[z(k)\right]$ 在 z 平面上都是 K-解析，故由引理 2 知 $u(x,y),v(x,y)$ 满足 K-C.-R.方程。由 $u_x=\dfrac{v_y}{k}$ 可得 $\mathrm{e}^{x}A(ky)=\dfrac{k\mathrm{e}^{x}B'(ky)}{k}=\mathrm{e}^{x}B'(ky)$，两边约去 e^{x}，即得

$$A(ky)=B'(ky).$$

再由 $v_x=-\dfrac{u_y}{k}$ 得 $\mathrm{e}^{x}B(ky)=-\dfrac{k\mathrm{e}^{x}A'(ky)}{k}=-\mathrm{e}^{x}A'(ky)$，两边约去 e^{x}，即得

$$A'(ky)=-B(ky).\tag{1}$$

于是 $A''(ky)=-B'(ky)=-A(ky)$，那么

$$A''(ky)+A(ky)=0,\tag{2}$$

这是二阶常系数齐次线性微分方程，其特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda=\pm i$，故其通解为

$$A(ky)=c_1\cos(ky)+c_2\sin(ky),\tag{3}$$

这里 c_1，c_2 是任意常数。由于 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$，故 $f(0)=A(0)+iB(0)=1$，从而 $A(0)=1$，$B(0)=0$，进一步地 $A'(0)=-B(0)=0$。把 $A(0)=1$，$A'(0)=0$ 代入(3)式，然后得到方程(2)的解为 $A(ky)=\cos(ky)$，再由(1)式得 $B(ky)=\sin(ky)$。于是

$$f\left[z(k)\right]=\mathrm{e}^{x}\left[\cos(ky)+i\sin(ky)\right].$$

以上推理说明了把 K-复指数函数定义为 $\mathrm{e}^{z(k)}=\mathrm{e}^{x}\left(\cos ky+i\sin ky\right)$ 的合理性。

3.2. 定义 2 的构造

与实分析中一样，也可以通过极限关系来定义 K-复指数函数：

$$\mathrm{e}^{z(k)}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{z(k)}{n}\right]^{n}.\tag{4}$$

下面证明对任意 $z(k)=x+iky\in C$，这个极限都存在。

先求模的极限。由模的运算性质可知

$$\left|1+\frac{z(k)}{n}\right|^2=\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{ky}{n}\right)^2=1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+k^2y^2}{n^2},$$

进而

$$\rho_n:=\left|\left(1+\frac{z(k)}{n}\right)^n\right|^2=\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+k^2y^2}{n^2}\right)^n.$$

两边取自然对数，并令$t=\frac{1}{n}$，得

$$\ln\rho_n=n\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+k^2y^2}{n^2}\right)=\frac{\ln\left[1+2xt+\left(x^2+k^2y^2\right)t^2\right]}{t}.$$

当$t\to0^+$时，上式为$\frac{0}{0}$型不定式，由洛必达法则得

$$\lim_{t\to0^+}\ln\rho_n=\lim_{t\to0^+}\frac{2x+2\left(x^2+k^2y^2\right)t}{1+2xt+\left(x^2+k^2y^2\right)t^2}=2x.$$

故$\rho_n\to\mathrm{e}^{2x}$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z(k)}{n}\right)^n\right|=\mathrm{e}^x$。

再求辐角的极限。当$n>|x|$时，有$1+\frac{x}{n}>0$，此时$1+\frac{z(k)}{n}$落在右半平面，故其主辐角为

$$\arg\left(1+\frac{z(k)}{n}\right)=\arctan\frac{\frac{ky}{n}}{1+\frac{x}{n}}.$$

于是

$$\theta_n:=\arg\left(1+\frac{z(k)}{n}\right)^n=n\arctan\frac{\frac{ky}{n}}{1+\frac{x}{n}}.$$

令$t=\frac{1}{n}$，并记$g(t)=\frac{kyt}{1+xt}$，则$g(0)=0$，且

$$\theta_n=\frac{\arctan g(t)}{t}.$$

当$t\to0^+$时，上式也为$\frac{0}{0}$型不定式。注意到$g'(t)=\frac{ky(1+xt)-kyt\cdot x}{(1+xt)^2}=\frac{ky}{(1+xt)^2}$，故$g'(0)=ky$。于是由洛必达法则得

$$\lim_{t\to0^+}\theta_n=\lim_{t\to0^+}\frac{g'(t)}{1+g(t)^2}=\frac{ky}{1+0}=ky.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\arg\left(1+\dfrac{z(k)}{n}\right)^n = ky$。

由此可见，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(1+\dfrac{z(k)}{n}\right)^n\right| = \mathrm{e}^x$，$\lim\limits_{n\to\infty}\arg\left(1+\dfrac{z(k)}{n}\right)^n = ky$。这表明极限(4)存在，且

$$\mathrm{e}^{z(k)} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{z(k)}{n}\right]^n = \mathrm{e}^x\left[\cos(ky)+i\sin(ky)\right].$$

4. *K*-复指数函数的性质

对于 *K*-复指数函数 $\mathrm{e}^{z(k)}$ 具有如下的性质：

(1) 当 $k=1$ 时，与通常的复指数函数的定义是一致的。

(2) $\left|\mathrm{e}^{z(k)}\right| = \mathrm{e}^x > 0$，$\arg \mathrm{e}^{z(k)} = ky$；在 z 平面上 $\mathrm{e}^{z(k)} \neq 0$。

(3) $\mathrm{e}^{z(k)}$ 在 z 平面上 *K*-解析，且 $\left[\mathrm{e}^{z(k)}\right]' = \mathrm{e}^{z(k)}$。

(4) $\mathrm{e}^{z_1(k_1)+z_2(k_2)} = \mathrm{e}^{z_1(k_1)}\cdot\mathrm{e}^{z_2(k_2)}$。

5. 结论

本文以 *K*-复数 $z(k)=x+iky$ 为起点，给出了 *K*-复指数函数 $\mathrm{e}^{z(k)}$ 的两种定义：一种由关系式 $\mathrm{e}^{z(k)} = \mathrm{e}^x(\cos ky + i\sin ky)$ 直接规定，另一种仿照实分析通过极限 $\mathrm{e}^{z(k)} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{z(k)}{n}\right]^n$ 来定义。进一步地分别讨论了这两种定义的构造形式，阐明了这两个定义的合理性，可见两种定义殊途同归，从不同角度刻画了同一类复指数函数。最后给出复指数函数 $\mathrm{e}^{z(k)}$ 的一些简单性质。

此外，*K*-复指数函数保持了实指数函数与通常复指数函数的基本特征，当 $k=1$ 时即化为通常的复指数函数，故它是后者的自然推广。在此基础上，可进一步探讨 *K*-复对数函数、*K*-复三角函数等初等函数以及 *K*-解析函数的一般理论，以不断充实复变函数的研究内容。

基金项目

云南省教育厅科学研究基金项目(2023J1212)；昭通学院教学改革研究项目(Ztjx202508)；昭通学院一流本科课程《复变函数》线下课程建设项目(Ztujk202520)；昭通学院学科均衡发展专项资助科研项目(XKJHY2026061)；昭通学院一流本科课程《实变函数》建设项目(Ztujk202585)。

参考文献

[1] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[2] Б.В. 沙巴特. 复分析导论(第一卷): 单复变函数[M]. 第 4 版. 胥鸣伟, 李振宇, 译. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[3] 夏慰慈. 复指数函数的两种构造形式[J]. 湘潭师范学院学报自然科学版, 1989(6): 99-102.

[4] 苑秀白. 关于复指数函数定义的讨论[J]. 廊坊师专学报(自然科学版), 1995(4): 55-57.

[5] 孙小康, 徐松金. 复指数函数的定义问题[J]. 铜仁学院学报, 2012, 14(2): 141-143.

[6] 张建元. K-解析函数及其存在的条件[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2007, 16(4): 298-302.