Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(11), 119-132
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1611240

Hans汉斯

一致连续函数的性质及其应用

——以一元函数为例

张传芳

广东石油化工学院理学院，广东 茂名

收稿日期：2026年10月5日；录用日期：2026年11月16日；发布日期：2026年11月24日

摘　要

本文以一元函数为对象，梳理归纳一致连续函数的系列性质，包含有界性、绝对值性质、四则运算、复合函数、反函数、区间可加性、函数列极限、与Lipschitz连续的关系以及无穷区间上线性增长特征，同时配套典型反例说明各命题成立的条件，厘清充分条件与必要条件的区别，可为一致连续相关习题、考研命题分析提供参考。

关键词

一致连续，一元函数，四则运算

Properties and Applications of Uniformly Continuous Functions

—Taking Functions of One Variable as an Example

Chuanfang Zhang

School of Science, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong

Received: October 5, 2026; accepted: November 16, 2026; published: November 24, 2026

Abstract

Focusing on univariate functions, this paper systematically summarizes the properties of uniformly continuous functions. These properties cover boundedness, absolute value, arithmetic operations, composition, inverse functions, interval additivity, limits of function sequences, relationship with Lipschitz continuity, and linear growth on infinite intervals. Typical counterexamples are also provided to clarify the prerequisites of these propositions and to distinguish between sufficient and

文章引用: 张传芳. 一致连续函数的性质及其应用[J]. 理论数学, 2026, 16(11): 119-132.
DOI: 10.12677/pm.2026.1611240

necessary conditions. This work serves as a useful reference for problem-solving exercises and postgraduate entrance exam research related to uniform continuity.

Keywords

Uniform Continuity, Single-Variable Function, Four Arithmetic Operations

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

一致连续是数学分析中的重要概念，大部分数学分析教材[1]-[6]都只给出了一致连续的定义，没有讨论一致连续函数的性质，而这些性质恰恰是研究生入学考试的重要考点。现有不少教学研究类文献围绕一元函数一致连续开展多角度的专题研讨。薛怀玉系统梳理一致连续等价条件与基础判定定理，区分有限区间与无穷区间下有界性的差异，指出有限区间上一致连续函数必有界，但该结论不能直接推广到无穷区间[7]；金永容梳理四则运算、绝对值变换下一致连续性的保持问题，着重指出乘积、倒数运算不能无条件成立，必须附加区间有限或者函数整体有界等前置约束[8]；徐伟梳理 Lipschitz 条件、导数有界与一致连续之间的逻辑关系，明确 Lipschitz 条件是一致连续的充分而非必要条件，可导函数导数有界可以推出一致连续，但导数无界不能断定函数一定不一致连续[9]；高义、代小丹等通过构造反例研究了一致连续函数的基本问题，讨论了一致连续性和导数的关系，进而给出应用实例和判断函数一致连续性的充分必要条件[10]；郝一凡专门讨论一致连续函数的四则、复合以及反函数运算，系统整理运算后保持一致连续的成立条件，同时通过反例说明，有限区间与无穷区间环境下反函数的一致连续性会表现出截然不同的结论[11]；李锋杰、刘丙辰等从定义出发汇总一致连续各类运算性质与判别条件，重点指出：两个均不一致连续的函数，其和差运算结果既可能一致连续，也可能继续保持不一致连续，不能简单做肯定或者否定推断[12]；闫元朝从函数的一致连续概念出发，总结一致连续的条件及运算性质[13]；裘杨、于辉将导数有界准则与区间类型结合，对比有限开区间、闭区间、无穷区间场景下各个判别准则的适用边界[14]；韦宁等[15]证明了复合函数的一致连续性(连续函数的复合仍一致连续)，并总结了和、差、积、商的一致连续性条件。兰瑞平[16]从定义出发，详细对比了连续与一致连续的异同，并从几何意义上将一致连续函数的图像描述为“平缓变化”，而非一致连续函数的图像则趋于“陡峭”甚至垂直。直观理解这一抽象概念提供了有效路径。林京利等[17]进一步针对有限开区间、无限区间及可导函数给出了具体的判别法，特别证明了无穷区间可导函数一致连续的充要条件是其导函数有界。傅文德[18]则系统归纳了 10 种一致连续性判据，涵盖了 Lipschitz 条件、柯西列判定以及函数列极限判定等，并特别探讨了反函数的一致连续性问题，指出反函数未必保持一致连续性，强调了该结论仅在有限区间上成立。高吉[19]利用有限覆盖定理详细证明了康托定理，并严格证明了一致连续函数的和仍一致连续，以及两个一致连续函数在有限区间上的积仍一致连续。王文华、曹怀信进一步结合 Cantor 定理，研究开区间上一致连续函数延拓性质、周期函数的一致连续性，同时完善复合运算、线性数乘的相关命题[20]。总体来看，现有文献大多是零散给出单一命题、个别判别方法或者几组反例，缺少一篇专门以一元函数为对象，把有界性、绝对值性质、四则、复合、反函数、区间拼接、函数列、Lipschitz 关系、无穷区间增长特征做完整归集梳理的文本。基于此，本文以一元函数为例，整理归纳一致连续函数的各类性质，结合文献中的典型例题与反

例，明确每个性质成立的前提条件，区分充分条件与必要条件，帮助厘清连续与一致连续的概念差异，为理解、判别函数一致连续性提供参考。

2. 预备知识

2.1. 连续

定义 1 [1]-[6] 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，$x_0 \in I$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。若 $f(x)$ 在区间 I 内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 为区间 I 上的连续函数。

2.2. 一致连续

定义 2 [1]-[6] 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x', x'' \in I$，只要 $|x' - x''| < \delta$，就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 是一致连续的.

定义 3 [1] [3] 设函数 $f(x)$ 为定义在区间 I 上函数。存在一个 $\varepsilon_0 > 0$，$\forall \delta > 0$，都能找到 $x_1, x_2 \in I$，满足，$|x_1 - x_2| < \delta$ 但

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续。

2.3. 函数连续与一致连续的关系

函数在区间上的连续与一致连续这两个概念有着重要的差别：函数 $f(x)$ 在点 $x_0 \in I$ 连续，一般来说，对于 I 上不同的点，相应的正数 δ 是不同的。也就是说，δ 的取值除了依赖于 ε 之外，还与点 x_0 有关，因此记为 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$，用来表示 δ 与 ε 和 x_0 的依赖关系，即逐点连续是每个点可使用专属 δ；而一致连续则是整个区间共用同一个 δ，即如果能够做到 δ 仅与 ε 有关而与 x_0 无关，或者说存在适合 I 上所有点 x 的公共 δ，即 $\delta = \delta(\varepsilon)$，那么函数不仅在 I 上连续，而且是一致连续[1]。因此说，连续是局部性质，即使是区间 I 内连续也是逐点定义的；而一致连续是一个“整体”的概念，是函数在区间 I 上的性质，与 I 内具体的点无关。存在在区间 I 上连续但不一致连续的函数，如

例 1 [3] [4] 函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不一致连续。

证明 取 $\varepsilon_0 = 1$，$\forall \delta > 0$ (不妨设 $\delta < 1$)，取 $x_1 = \delta$，$x_2 = \dfrac{\delta}{2}$，则有

$$|x_1 - x_2| < \frac{\delta}{2} < \delta,$$

但

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{1}{\delta} > 1$$

故由定义 3 知 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不一致连续。

康托定理[1]-[6] 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

上述的例 1 及康托定理的证明可见相应的参考文献。下文标注文献的性质及例题证明或解题过程均见参考文献，本文不再给出证明或者解题细节。以下均设 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$。区间 I 除特别强调外均指任意区间，可以是有限区间，也可以是无限区间。

3. 一致连续的性质

由康托定理知一致连续函数的性质包括闭区间上连续函数的性质，例如：有界性、最值性，即存在最大值与最小值、零点存在定理、介值定理等。这些性质大家都很熟悉，在此就不一一列出了。除去这些性质外，一致连续函数还有很多特殊的性质。

3.1. 一致连续函数在区间 (a,b) 上的有界性

性质 1 [7]-[10] 如果函数 $f(x)$ 在有限区间 I 内一致连续，则函数 $f(x)$ 在 I 上有界。

注 1 若 $f(x)$ 在无穷区间 I 内一致连续，则 $f(x)$ 在 I 上不一定有界，如

例 2 [1] [10] 函数

$$f(x)=x,x\in(-\infty,+\infty)$$

函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，但显然函数 $f(x)$ 在该区间上无界。

利用绝对值不等式很容易的如下的绝对值性质：

3.2. 一致连续函数的绝对值性质

性质 2 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，则函数 $|f(x)|$ 在 I 上也一致连续。

注 2 反之，若 $|f(x)|$ 在 I 上一致连续， $f(x)$ 在区间 I 上不一定一致连续，可能都不连续，如

例 3 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap Q\\ -1, & x\in[0,1]\cap Q^{C}\end{cases}$$

则在闭区间 $[0,1]$ 函数 $|f(x)|=1$，显然是一致连续的，但 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处不连续，因此不一致连续。

若此时还有 $f(x)$ 的连续性，则由 $|f(x)|$ 一致连续，可得 $f(x)$ 也一致连续，即

推论 1 若 $f(x)$ 在 I 上连续， $|f(x)|$ 在 I 上一致连续，则 $f(x)$ 在 I 上也一致连续。

证明 由 $|f(x)|$ 在 I 上一致连续得 $\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$\big||f(x_1)|-|f(x_2)|\big|<\varepsilon.$$

若 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 同号或者其中至少有一个为 0，则

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\big||f(x_1)|-|f(x_2)|\big|<\varepsilon.$$

此时结论显然成立；

若 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 异号，不妨设 $f(x_1)>0$， $f(x_2)<0$，由连续函数的介值定理知，在 x_1 与 x_2 之间存在一点 c，使得 $f(c)=0$。还可得 $|x_1-c|<\delta$ 且 $|x_2-c|<\delta$。故

$$|f(x_1)|=|f(x_1)-0|=\big||f(x_1)|-|f(c)|\big|<\varepsilon;$$

$$|f(x_2)|=|f(x_2)-0|=\big||f(x_2)|-|f(c)|\big|<\varepsilon.$$

于是

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=\left|f\left(x_1\right)+\left(-f\left(x_2\right)\right)\right|=\left|f\left(x_1\right)\right|+\left|f\left(x_2\right)\right|<2\varepsilon$$

综上可得 $f\left(x\right)$ 在 I 上一致连续。

3.3. 一致连续函数的四则运算性质

性质 3 [2] [8]-[18] [21] 若函数 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 在区间 I 上一致连续，则 $f\left(x\right)\pm g\left(x\right)$ 在 I 上一致连续。

证明 由 $f\left(x\right)$ 在区间 I 上一致连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，使得当 $x_1,x_2\in I$ 且 $\left|x_1-x_2\right|<\delta_1$ 时，有

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $g\left(x\right)$ 在区间 I 上一致连续知，$\exists\delta_2>0$，使得当 $x_1,x_2\in I$ 且 $\left|x_1-x_2\right|<\delta_2$ 时，有

$$\left|g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}$，则当 $x_1,x_2\in I$ 且 $\left|x_1-x_2\right|<\delta$ 时，有

$$\left|f\left(x_1\right)\pm g\left(x_1\right)-\left[f\left(x_2\right)\pm g\left(x_2\right)\right]\right|\le\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|+\left|g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$$

故 $f\left(x\right)\pm g\left(x\right)$ 在 I 上一致连续。

利用反证法结合性质 3 易得如下推论：

推论 2 [22] 若 $f\left(x\right)$ 在区间 I 上一致连续，$g\left(x\right)$ 在区间 I 上不一致连续，则 $f\left(x\right)\pm g\left(x\right)$ 在 I 上一定不一致连续。

注 3 若函数 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 在 I 上都不一致连续，则它们的和或差可能一致连续也可能不一致连续，如

例 4 [3] 已知函数 $f\left(x\right)=x^2$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上不一致连续，令 $g\left(x\right)=f\left(x\right)$，则

$$f\left(x\right)+g\left(x\right)=2x^2$$

在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上不一致连续，但

$$f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$$

在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上一致连续。

推论 3 若函数 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 在区间 I 上一致连续，则函数 $\max\limits_{x\in I}\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}$ 与 $\min\limits_{x\in I}\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}$ 在区间 I 上均一致连续。

证明 因为

$$\max_{x\in I}\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}=\frac{f\left(x\right)+g\left(x\right)+\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|}{2}$$

$$\min_{x\in I}\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}=\frac{f\left(x\right)+g\left(x\right)-\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|}{2}$$

再由性质 2 及性质 3 即可得结论成立。

性质 4 [7]-[18] [20] [22]-[24] 设函数 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 在有限区间 I 上一致连续，那么 $f\left(x\right)g\left(x\right)$ 在 I 上也一致连续。

证明 因为函数 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 在有限区间 I 上一致连续，由性质 1 知，$\exists M>0$，使得

$$|f(x)|<M,|g(x)|<M\ .$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，使得当$x_1,x_2\in I$且$|x_1-x_2|<\delta_1$时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

$\exists\delta_2>0$，使得当$x_1,x_2\in I$且$|x_1-x_2|<\delta_2$时，有

$$|g(x_1)-g(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$x_1,x_2\in I$且$|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$\begin{aligned}|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|&\le|f(x_1)||g(x_1)-g(x_2)|+|g(x_2)||f(x_1)-f(x_2)|\\&<M\frac{\varepsilon}{2M}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

根据定义 2 可知$f(x)g(x)$在有限区间I上一致连续。

注 4 若把性质 4 中有限区间上一致连续扩展成任意区间，则命题不真。如

例 5 函数$f(x)=g(x)=x$在$(-\infty,+\infty)$一致连续，但$f(x)g(x)=x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续[3]。这是因为在有限区间一致连续是为了保证$f(x)$和$g(x)$有界。

因此，若把有限区间扩展成任意区间，则需加上$f(x)$和$g(x)$在任意区间上有界。

性质 5 [10]-[12] [18] [20] [21] [23] [25] [26] 若$f(x)$和$g(x)$都在区间I上一致连续且有界，则$f(x)g(x)$在I上也一致连续。

推论 4 [9] [10] [12] [18] [20] [21] 设函数$f(x)$在区间I上一致连续，对任意的实数k，有$kf(x)$在I上一致连续。

注 5 性质 5 要求两个函数必须都是有界且一致连续才能保证乘积函数的一致连续性，若仅有一个函数有界无法得出乘积的一致连续性，如

例 6 函数$f(x)=x$在区间$[0,+\infty)$上一致连续，$g(x)=\sin x$在$[0,+\infty)$上一致连续且有界[4]，但乘积函数$f(x)g(x)=x\sin x$在$[0,+\infty)$上不一致连续[3]。

性质 6 [11] [18] [20] 若函数$f(x)$在区间I上一致连续，且$\exists M>0$，$\forall x\in I$都有$|f(x)|\ge M$，则函数$\frac{1}{f(x)}$在区间I也上一致连续。

证明 由函数$f(x)$在区间I上一致连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$x_1,x_2\in I$且$|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<M^2\varepsilon.$$

从而

$$\left|\frac{1}{f(x_1)}-\frac{1}{f(x_2)}\right|=\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_1)f(x_2)}\right|\le\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{M^2}<\varepsilon.$$

根据定义 2 可知，函数$\frac{1}{f(x)}$在区间I上一致连续。

注 6 若仅有函数$f(x)$在区间I上一致连续，得不出倒数函数$\frac{1}{f(x)}$在区间I上一致连续，如

例 7 $f(x)=x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上一致连续[6]，但 $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续[4]。

由性质 4 和性质 6 易得

性质 7 [9] [11] 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在有限区间 I 上一致连续，且 $\exists M>0$，$\forall x\in I$ 有 $|g(x)|\geq M$，那么函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 I 上一致连续。

推论 5 [11] 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上一致连续且存在正数 M,m 使得 $|f(x)|\leq M$，$|g(x)|\geq m>0$，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 I 上一致连续。

3.4. 一致连续函数的复合运算性质

性质 8 [8] [9] [11] [14] [15] [18] [20] [21] [23] [27]-[29] 设函数 $f(x)$ 在区间 I_1 上一致连续，函数 $g(u)$ 在 I_2 上一致连续，且 $f(x)$ 的值域包含在 I_2 中，则函数 $g(f(x))$ 在 I_1 上一致连续。

证明 由 $g(u)$ 在 I_2 上一致连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，使得当 $u_1,u_2\in I_2$ 且 $|u_1-u_2|<\eta$ 时，有

$$|g(u_1)-g(u_2)|<\varepsilon.$$

再由 $f(x)$ 在区间 I_1 上一致连续，对于上述的 $\eta>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $x_1,x_2\in I_1$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\eta.$$

所以，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $x_1,x_2\in I_1$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，就有

$$|g(f(x_1))-g(f(x_2))|<\varepsilon.$$

即函数 $g(f(x))$ 在 I_1 上一致连续。

例 8 证明 $y=\sin\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续。

证明 此函数看成 $g(x)=\sin x$ 与 $f(x)=\sqrt{x}$ 复合而成。由 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续[4]，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续[6]。由性质 8 得 $y=\sin\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续。

注 7 此类题型常见于数学分析考研证明题。

3.5. 一致连续函数的反函数的一致连续性

性质 9 [11] 设函数 $y=f(x)$ 在有限区间 I 上严格单调且连续，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在区间 $\{y\mid y=f(x),x\in I\}$ 上严格单调且一致连续。

注 8 性质 9 表明若 $f(x)$ 是某有限区间上的严格单调连续函数的反函数，则 $f(x)$ 必是一致连续的。

例 9 $y=\mathrm{e}^x,x\in(-\infty,0)$ 是 $y=\ln x,x\in(0,1)$ 的反函数，且 $y=\ln x$ 在 $(0,1)$ 上严格单调连续，故 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,0)$ 上一致连续。

注 9 无穷区间上的严格单调连续函数其反函数不一定一致连续，如

例 10 函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续[6] [30]，但其反函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内不一致连续[4]。

3.6. 一致连续函数的确界函数的一致连续性

性质 9 [31] 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\forall x\in[a,+\infty)$，记

$$M(x)=\sup_{a\le t\le x} f(t), m(x)=\inf_{a\le t\le x} f(t),$$

则 $M(x)$ 和 $m(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

由此易得如下两个推论：

推论 6 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致连续，$\forall x\in[a,b)$，记

$$M(x)=\sup_{a\le t\le x} f(t), m(x)=\inf_{a\le t\le x} f(t),$$

则 $M(x)$ 和 $m(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致连续。

推论 7 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致连续，$\forall x\in[a,b]$，记

$$M(x)=\sup_{a\le t\le x} f(t), m(x)=\inf_{a\le t\le x} f(t),$$

则 $M(x)$ 和 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

3.7. 一致连续函数列的极限函数的一致连续性

性质 10 [32] [33] 设在区间 I 上的一致连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于函数 $f(x)$，则 $f(x)$ 在区间 I 上的也一致连续。

3.8. 一致连续函数的幂函数的一致连续性

性质 11 若 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，且 $f(x)\ge 0(\forall x\in I)$，则 $(f(x))^p\ (0<p\le 1)$ 在区间 I 上也一致连续。

证明 由 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续性有 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

再由 $0<p\le 1$，故有

$$\left|(f(x'))^p-(f(x''))^p\right|\le|f(x')-f(x'')|^p<\varepsilon^p$$

从而得 $(f(x))^p\ (0<p\le 1)$ 在区间 I 上也一致连续。

例 11 证明 $y=\sqrt[3]{\sin x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

证明 因为 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且 $0<p=\frac{1}{3}\le 1$，由性质 11 得 $f(x)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\sin x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

注 10 此类题型常见于考研数学分析证明题。

3.9. 一致连续的区间可加性

性质 12 [1] [7]-[9] [14] [16] [32] 设区间 I_1 的右端点为 $c\in I_1$，区间 I_2 的左端点也为 $c\in I_2$ (I_1,I_2 可分别为有限或无限区间)，若 $f(x)$ 分别在在区间 I_1 和 I_2 上一致连续的，则 $f(x)$ 在 $I=I_1\cup I_2$ 也一致连续。

引理[4] 函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在。

注 11 若 $f(x)$ 在区间 I_1 和 I_2 上都是一致连续的，但 $I_1\cap I_2=\varnothing$，则 $f(x)$ 在 $I_1\cup I_2$ 未必一致连续，如

例 12 设 $I_1=(-1,0)$，$I_2=(0,1)$，证明：函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ 在 $I_1\cup I_2$ 上不一致连续。

证明 在 I_1 上，有

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{\sin x}{|x|}=-\sin 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=-1$$

由上述引理知 $f(x)$ 在区间 $I_1=(-1,0)$ 上一致连续。类似地，在 I_2 上，可得

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin x}{|x|}=\sin 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=1$$

故由引理 $f(x)$ 在区间 $I_2=(0,1)$ 也上一致连续，但 $f(x)$ 在区间 $I_1\cup I_2=(-1,0)\cup(0,1)$ 上不一致连续。因为取 $\varepsilon_0=1$，$\forall\delta>0$ (不妨设 $\delta<1$)，令 $x_1=-\dfrac{\delta}{4}\in I_1, x_2=\dfrac{\delta}{4}\in I_2$，显然有

$$|x_1-x_2|=\frac{\delta}{2}<\delta$$

但由重要极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 可得

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{\sin\left(-\frac{\delta}{4}\right)}{\frac{\delta}{4}}-\frac{\sin\frac{\delta}{4}}{\frac{\delta}{4}}\right|=2\frac{\sin\frac{\delta}{4}}{\frac{\delta}{4}}>1=\varepsilon_0\ (\text{当}\ \delta\ \text{充分小})$$

故由不一致连续定义 3 得 $f(x)$ 在区间 $I_1\cup I_2=(-1,0)\cup(0,1)$ 上不一致连续。

注 12 此类题型常见于考研数学分析证明题，考查交集为空集时的反例构造。

3.10. 一致连续性与 Lipschitz 连续的关系

性质 13 [7]-[10] [14] [18] [29] [30] [32]-[34] 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 Lipschitz 条件，则 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

注 13 反之不一定成立，即一致连续函数不一定满足 Lipschitz 条件，如

例 13 [10] 函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，但不满足 Lipschitz 条件。事实上，对于任意 $L>0$，都存在 $x'=0, x''=\dfrac{1}{4L^2}$，且 $x', x''\in[0,+\infty)$，使得

$$\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}|x'-x''|>L|x'-x''|$$

成立，其中 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{4L^2}\right)$。

实际上由 Lipschitz 条件还可得：

性质 14 [20] [28] 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)(a>0)$ 上满足 Lipschitz 条件，则 $\frac{f(x)}{x}$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

由性质 14 易得如下结论：

推论 8 [7] [10] [18] [20] [25] [27] [29] [32]-[35] 设函数 $f(x)$ 是区间 I 上的可导函数，且 $f'(x)$ 在区间 I 上有界，则函数 $f(x)$ 区间 I 上一致连续。

推论 9 [17] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续的充要条件是 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。

注 14 对于有限区间上的可导函数，推论 8 的导数有界这一条件只是一致连续的充分条件，不是必要条件，如

例 14 函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 上一致连续，因此可知其在 $(0,1]$ 上也一致连续，但是

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

在 $(0,1]$ 上却是无界的，这就说明在有限区间上，导数无界并不能得到不一致连续。

虽然例 13 表明一致连续函数不一定满足 Lipschitz 条件，但实际上一致连续函数是“几乎”满足 Lipschitz 条件的，即

性质 15 [13] [29] 函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A>0$，使得对任意的 $x_1,x_2\in I$，都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le A|x_1-x_2|+\varepsilon.$$

证明 必要性 由 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

取 $A=\frac{2\varepsilon}{\delta}$，$\forall x',x''\in I$，不妨设 $x'<x''$，则存在正整数 n 使得

$$(n-1)\delta\le x''-x'<n\delta,$$

将区间 $[x',x'']$ n 等分：$x'=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=x''$，则每个小区间长度都小于 δ，于是

$$|f(x')-f(x'')|\le\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_k)-f(x_{k+1})|<n\varepsilon,$$

而

$$A|x'-x''|+\varepsilon=\frac{2\varepsilon}{\delta}|x'-x''|+\varepsilon\ge\frac{2\varepsilon}{\delta}(n-1)\delta+\varepsilon=(2n-1)\varepsilon,$$

故

$$|f(x')-f(x'')|<A|x'-x''|+\varepsilon.$$

充分性 由条件知，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2A}$，则 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le A|x_1-x_2|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

故得函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

推论 10 [29] 设 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，则存在 $A>0, B>0$ 使得 $\forall x', x'' \in I$，都有

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le A|x_1-x_2|+B.$$

性质 16 [36] 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续，令

$$f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\mathrm{d}y, t>0$$

则

$$\limsup_{t\to 0^+}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_t(x)-f(x)|=0.$$

证明 因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续，由性质 15 知，$\forall \varepsilon>0$，$\exists A>0$，有

$$|f(x)-f(y)| \le A|x-y|+\varepsilon, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

再由

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4t}}\mathrm{d}z=1,$$

对于 $x\in\mathbb{R}, t>0$，利用变量变换 $z=y-x$，有

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\mathrm{d}y=1$$

故

$$\begin{aligned}|f_t(x)-f(x)| &= \left|\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}(f(y)-f(x))\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\mathrm{d}y\right| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}(A|y-x|+\varepsilon)\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\mathrm{d}y \\ &= \varepsilon+\frac{A}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}|y-x|\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\mathrm{d}y \\ &= \varepsilon+\frac{2A}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^{+\infty} z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4t}}\mathrm{d}z=\varepsilon+\frac{2A\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

于是

$$0 \le \limsup_{t\to 0^+}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_t(x)-f(x)| \le \varepsilon,$$

即

$$\limsup_{t\to 0^+}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_t(x)-f(x)|=0.$$

3.11. 无穷区间上一致连续函数的线性增长性

性质 17 [9] [11] [28]-[30] [37] 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，则存在非负实数 a 与 b，使对一切

$x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$|f(x)|\le a|x|+b.$$

注 15 性质 17 表明一致连续函数 $f(x)$ 不超过线性增长速度。

由性质 17 易得如下结论：

推论 11 [28] 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上一致连续，则 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界。

注 16 推论 11 在 $[0,+\infty)$ 上不成立，如

例 15 [30] $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，但 $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界。

注 17 在 $(-\infty,+\infty)$ 上推论 11 也不成立，如

例 16 $f(x)=\sqrt{|x|}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，但 $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上无界。

3.12. 一致连续函数在无穷远处的极限

性质 18 [9] 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

注 18 仅有 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续的条件无法得出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，如

例 17 $f(x)=x$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续[30]，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$。

注 19 仅由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续及 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，也无法得出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，如

例 18 $f(x)=\sin x^2$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，且 $\int_1^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x^2$ 不存在，更不可能等于 0。

事实上，更准确的结果是

性质 19 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

证明 充分性由性质 18 即得，下面只证必要性。

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>a$，当 $x>M$ 时，有

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此，$\forall x_1,x_2>M$ 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)|+|f(x_2)|<\varepsilon$$

即 $f(x)$ 在 $[M,+\infty)$ 上一致连续。

由康托定理可得 $f(x)$ 在 $[a,M+1]$ 上一致连续，再由性质 12 即可得函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

性质 20 [9] [37] 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且 $\forall x>0$ 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x+n)=0$ (n 为正整数)，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

注 20 仅有 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $\forall x>0$ 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x+n)=0$ (n 为正整数)，无法得出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，如

例 19 对于 $n\in\mathbb{Z}^+$，在区间 $[n,n+1]$ 上定义

$$f(x)=\begin{cases}2n(x-n), & x\in\left[n,n+\dfrac{1}{2n}\right],\\ 2n\left(n+\dfrac{1}{n}-x\right), & x\in\left[n+\dfrac{1}{2n},n+\dfrac{1}{n}\right],\\ 0, & x\in\left[n+\dfrac{1}{n},n+1\right]\end{cases}$$

在$[0,1]$上令$f(x)\equiv 0$。则易知$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\forall t\in(0,1]$，当n充分大时，有$t>\dfrac{1}{n}$，故$n+t>n+\dfrac{1}{n}$，于是$f(n+t)=0$，故$\lim\limits_{n\to+\infty}f(t+n)=0$。但取点列$x_n=n+\dfrac{1}{2n}$，则$f(x_n)=1$，故无法得出$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

4. 结束语

一致连续性是函数的一种重要性质，在后续课程中有诸多应用，例如在数学分析中，闭区间上的连续函数一定黎曼可积、第一型曲线积分化为定积分或者第二型曲线积分化为定积分的过程中均有一致连续性的应用；在其它数学分支，如泛函分析的课程中还会进一步推广到一般度量空间探讨一致连续性，可见文献[38]；此外，在泛函分析中还会考虑一致有界等度连续(比一致连续性更强)的函数；在微分方程中，性质 16 就是一致连续性的一个典型应用，表明热方程的解在全空间上一致收敛于初值。

本文系统整理了一元一致连续函数的主要性质，从有界性、绝对值性质、四则运算、复合运算、反函数性质、区间可加性、函数列极限、Lipschitz 连续、无穷区间增长特性等多个维度进行归纳，并借助反例说明了各类命题成立的限制条件。可以看到：很多对连续函数成立的性质，并不能直接移植到一致连续函数；有限区间和无穷区间之上，一致连续函数表现出显著不同的行为；导数有界、Lipschitz 条件只是判定一致连续的充分条件，而不是必要条件。一元情形下一致连续的这些性质常见于各个高校数学分析考研证明题，有的直接考查性质是否成立，有的考查性质的应用，有的考查某性质中某条件不成立时的反例构造等。系统梳理这些性质、反例既可以加深对数学分析中连续与一致连续概念的理解，也对求解考研习题、开展相关教学有一定参考价值。本文只讨论一元实函数情形，对于多元函数的一致连续性质，还可以作为后续进一步研究方向。

基金项目

1、广东省教育科学规划课题(高等教育专项)，项目编号：2025GXJK0456；2、广东石油化工学院科研基金人才引进项目，项目编号：2019rc101。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析: 上册[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[2] 刘名生, 冯伟贞, 韩彦昌. 数学分析(一) [M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2019.

[3] 刘玉琏, 傅沛仁, 刘伟等. 数学分析讲义: 上册[M]. 第 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[4] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析: 上册[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[5] 张筑生. 数学分析新讲: 第一册(重排本) [M]. 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2021.

[6] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程: 上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[7] 薛怀玉. *f*(*x*)的一致连续性研究[J]. 咸阳师范专科学校学报, 2000(6): 4-6.

[8] 金永容. “一致连续性”的几点注记[J]. 安徽教育学院学报, 2005(6): 12-14.

[9] 徐伟. 一致连续函数的探讨[J]. 科技信息, 2011(30): 114-116.
[10] 高义, 代小丹. 关于函数一致连续性的反例及其应用[J]. 宁夏师范学院学报, 2011, 32(6): 88-91.
[11] 郝一凡. 一致连续函数的运算与判别[J]. 沈阳大学学报, 1996(2): 76-81.
[12] 李锋杰, 刘丙辰, 李发宝, 等. 关于函数的一致连续问题[J]. 烟台师范学院学报(自然科学版), 2001(4): 305-309.
[13] 闫元朝. 函数在区间 I 上一致连续性的问题[J]. 廊坊师范学院学报(自然科学版), 2012, 12(2): 20-21.
[14] 裘杨, 于辉. 浅析一致连续函数[J]. 黑龙江科技信息, 2008(27): 224.
[15] 韦宁, 王恩亮. 论基本初等函数的一致连续性[J]. 河北能源职业技术学院学报, 2006(1): 87-88.
[16] 兰瑞平. 对函数一致连续性的讨论[J]. 廊坊师范学院学报(自然科学版), 2011, 11(6): 21-23.
[17] 林京利, 林甫. 关于函数 y = f(x)的一致连续性判别法[J]. 鞍山师范学院学报, 1986(3): 1-3.
[18] 傅文德. 函数 f(x)一致连续性判据[J]. 黔东南民族师范高等专科学校学报, 2004(3): 1-2+7.
[19] 高吉. 浅析函数的一致连续性[J]. 包头职业技术学院学报, 2011, 12(3): 40-41.
[20] 王文华, 曹怀信. 一元函数一致连续性的性质[J]. 榆林学院学报, 2016, 26(4): 31-34+40.
[21] 高英, 辛玉东. 一致连续函数的一些性质[J]. 科技信息, 2010(19): 195.
[22] 余桂东. 一致连续性的条件[J]. 安庆师范学院学报(自然科学版), 2004(4): 85-86.
[23] 费时龙, 占伟军. 函数一致连续性的几个判别法及其应用[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2013, 30(8): 1-3.
[24] 陈白棣. 一致连续函数的运算性质[J]. 九江学院学报(自然科学版), 2004(4): 7-8.
[25] 刘良臣. 关于函数一致连续性的几个命题[J]. 聊城师院学报(自然科学版), 1995(3): 24-26.
[26] 李江华. 关于一致连续的判定与应用[J]. 赤峰学院学报(自然科学版), 2015, 31(22): 1-2.
[27] 姚云飞, 孙方芳. 关于映射的一致连续性的若干注记[J]. 阜阳师范学院学报(自然科学版), 2013, 30(3): 10-14+18.
[28] 张建建. 函数一致连续性的几个证明方法[J]. 和田师范专科学校学报, 2005(1): 148-149.
[29] 杜家祥. 函数在无穷区间上一致连续性的判定[J]. 宿州教育学院学报, 2001(1): 91-92.
[30] 成波, 赵临龙. 函数一致连续的一个充要条件[J]. 大学数学, 2007(4): 188-190.
[31] 邢家省, 吴桑, 杨义川. 变动区间上的确界函数是连续函数的证明[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2020, 41(5): 1-4.
[32] 刘勇. 关于一元函数一致连续性的讨论[J]. 赤峰学院学报(自然科学版), 2009, 25(11): 7-10.
[33] 杨中南. 函数在无穷远处的一致连续性[J]. 集美大学学报(自然科学版), 1997(1): 70-75.
[34] 洪敏. 关于一致连续函数的判别[J]. 惠州学院学报(自然科学版), 2005(3): 114-116.
[35] 甘宗怀, 李秋林. 关于可导函数一致连续性的判定定理[J]. 高师理科学刊, 2009, 29(5): 38-39.
[36] 清疏竞赛考研数学. 挑战传说虎哥改编的浙江大学考研真题-能赢吗[EB/OL]. 2026-10-11. https://mp.weixin.qq.com/s/usZyfauDop4LPoWGf-MMgw, 2026-10-15.
[37] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2021.
[38] 李子平. 函数一致连续的一个充要条件[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 1989(2): 19-21.