Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(11), 72-85
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1611236

Hans汉斯

四元数射影空间中超曲面的平均曲率流

胡琪慧，王　陈，王慧娟*

湖北大学数学与统计学学院，湖北　武汉

收稿日期：2026年10月9日；录用日期：2026年11月6日；发布日期：2026年11月16日

摘　要

平均曲率流(MCF)是研究子流形几何与拓扑的重要方法之一。本文研究四元数射影空间 $\mathbb{QP}^{(n+1)/4}(4)$ 中超曲面的平均曲率流，证明了若初始超曲面满足一定的积分曲率拼挤条件，则平均曲率流在有限时间区间 $[0,T)$ 内存在唯一解，且当 $t\to T$ 时收敛到一个圆点。

关键词

平均曲率流，四元数射影空间，超曲面，积分曲率拼挤

The Mean Curvature Flow of Hypersurfaces in the Quaternionic Projective Spaces

Qihui Hu, Chen Wang, Huijuan Wang*

Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan Hubei

Received: October 9, 2026; accepted: November 6, 2026; published: November 16, 2026

Abstract

Mean curvature flow (MCF) is one of the important methods for studying the geometry and topology of submanifolds. In this paper, we study the mean curvature flow of hypersurfaces in the quaternionic projective spaces $\mathbb{QP}^{(n+1)/4}(4)$, and prove that if the initial hypersurfaces satisfy a certain integral curvature pinching condition, then the mean curvature flow has a smooth solution on a finite maximal time interval $[0,T)$, and converges to a round point as $t\to T$.

*通讯作者。

文章引用: 胡琪慧, 王陈, 王慧娟. 四元数射影空间中超曲面的平均曲率流[J]. 理论数学, 2026, 16(11): 72-85.
DOI: 10.12677/pm.2026.1611236

Keywords

Mean Curvature Flow, Quaternionic Projective Spaces, Hypersurfaces, Integral Curvature Pinching

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

设 $F:M^n\to N^{n+d}$ 是黎曼流形 N^{n+d} 中的 n 维子流形，平均曲率流 $F_t=F(\cdot,t):M^n\times[0,T)\to N^{n+d}$ 是一族单参数浸入，满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}F(x,t)=H(x,t), & x\in M\\ F(x,0)=F_0(x),\end{cases}$$

其中 $H(x,t)$ 表示子流形 $M_t=F_t(M)$ 的平均曲率向量。

平均曲率流最初由 Mullins [1]用于描述物理学中晶体的生长规律，随后在微分几何中成为研究子流形几何与拓扑的重要方法之一，在国际数学界广受关注。回顾平均曲率流的收敛性研究，早期开创性工作主要集中在超曲面情形。上世纪八十年代，Huisken [2]证明了欧氏空间中的紧致凸超曲面在平均曲率流下必在有限时间内收缩成一个圆点，随后又将该结果推广至某些黎曼流形和球面[3] [4]。后来，学者们将目光投向更一般的高余维情形。2010 年，Andrews-Baker [5]证明了高余维子流形在欧氏空间中的收敛性定理：若紧致子流形满足二次曲率拼挤条件，则平均曲率流在有限时间内将其收缩为一个圆点。受此启发，Baker [6]将 Huisken 球面中超曲面平均曲率流的收敛定理推广到了高余维情况。关于平均曲率流研究的其他结果详见[7]-[12]。

这些经典结果大多依赖于逐点曲率拼挤(pointwise curvature pinching)条件。然而，从几何与应用角度看，逐点拼挤的假设要求子流形每一点的曲率都满足严格的不等式。相比之下，积分曲率拼挤(integral curvature pinching)条件仅控制曲率的全局平均，更关注子流形的整体几何结构。例如，考虑：

$$\|A\|_{L^p}<C_1 \text{ 或 } \left\|\mathring{A}\right\|_{L^p}<C_2$$

其中 A，$\mathring{A}$ 和 H 分别表示子流形的第二基本形式、无迹第二基本形式和平均曲率向量，p 的取值与子流形的维数 n 有关，C_1，C_2 是依赖于 n，p 以及初始子流形几何量的常数。

近年来，刘克峰等人在文[13] [14]中利用演化方程，Sobolev 不等式和 Moser 迭代等方法，成功将一些依赖逐点曲率拼挤的收敛结果推广到了更弱的积分曲率条件，获得了欧氏空间与球面中任意余维闭子流形平均曲率流的收敛定理。在我们最近的工作[15]中，进一步研究了复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 中的闭子流形在积分曲率拼挤条件下的平均曲率流。

四元数射影空间是一类重要的紧致正曲率对称空间，对其子流形的平均曲率流的研究同样具备重要的意义。Pipoli-Sinestrari [16]研究了四元数射影空间中超曲面在逐点曲率拼挤条件下的平均曲率流，随后李世阳等人在文[17]中对相关收敛性结果作了进一步推广。然而，目前关于四元数射影空间中超曲面在积分曲率拼挤条件下的收敛性结果尚不完善。

受上述文献启发，本文研究积分曲率拼挤条件下 $\mathbb{QP}^{n+1/4}(4)$ 中超曲面的平均曲率流的光滑收敛性。我们假设初始超曲面的第二基本形式的范数 L_p 充分小，证明了如下结论：

定理 1.1 设 $F_0: M \to \mathbb{QP}^{(n+1)/4}(4)$ 是四元数射影空间中的 $n(n \geq 11)$ 维闭超曲面，$F: M \times [0,T) \to \mathbb{QP}^{n+1/4}(4)$ 是以 F_0 为初始值的平均曲率流。对于任意的正常数 $p \in (n,\infty)$，存在仅依赖于 n, p 的正常数 D，若 F_0 满足

$$\|A\|_{L^p} < D,$$

则平均曲率流在有限时间区间内存在唯一解，且当 $t \to T$ 时收敛到一个圆点。

注记 1.2 此处的“圆点”指超曲面在有限时间内收缩到一点，且其爆破极限为标准球面 $\mathbb{S}^n$，即在该点附近具有渐近圆球的几何形态。

2. 准备工作

设 $F: M \times [0,T) \to \mathbb{QP}^{(n+1)/4}$ 是一个光滑的平均曲率流，且初始时刻 $F_0: M \to \mathbb{QP}^{(n+1)/4}$ 是一个闭浸入。四元数射影空间 $\mathbb{QP}^{(n+1)/4}$ 是具有 Fubini-Study 度量的实 $n+1$ 维黎曼流形，其复结构记作 $J_{k_0}\ (k_0 = 1,2,3)$。

约定指标范围为

$$1 \leq A, B, C, \cdots \leq n+1,\ \alpha = n+1,\ 1 \leq i, j, k, \cdots \leq n.$$

选取 $\{e_i\}$，$\{e_\alpha\}$ 分别为切丛 TM 和法丛 NM 的局部单位正交基，并令 $\{\omega^A\}$ 为 $\{e_A\}$ 的对偶基。令 g_{ij} 表示 M_t 上的诱导度量，$\mathrm{d}\mu_t$ 表示 M_t 上相应的体积形式。设 A 和 H 分别表示 M_t 的第二基本形式和平均曲率向量，即 $A = \sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha} \omega_i \otimes \omega_j \otimes e_\alpha$，$H = \sum_{\alpha} H^{\alpha} e_\alpha = \sum_{i,\alpha} h_{ii}^{\alpha} e_\alpha$，我们有以下发展方程

引理 2.1 ([17])对于平均曲率流 $F: M \times [0,T) \to \mathbb{QP}^{(n+1)/4}(4)$，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{d}\mu_t = -|H|^2 \mathrm{d}\mu_t,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 = \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 - 2n|A|^2 + 2|h|^4 + 18|A|^2 + 4|H|^2 + 12S_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|H|^2 = \Delta|H|^2 - 2|\nabla H|^2 + 2|H|^2\left(|A|^2 + n + 9\right),$$

其中 $S_1 = \sum_{k_0=1}^{3} \sum_{i,j,k,l} \left(\mathring{h}_{ij} \mathring{h}_{kl} J_{il}^{(k_0)} J_{jk}^{(k_0)} - \mathring{h}_{ik} \mathring{h}_{jk} J_{il}^{(k_0)} J_{jl}^{(k_0)} \right)$。

对于超曲面情形，文献[17]利用反对称矩阵的基本性质对 $J_{k_0}\ (k_0 = 1,2,3)$ 进行了计算且得到 $S_1 \leq 0$。由此可进一步得到

$$\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 \leq \Delta|A|^2 + 2|A|^4 + 2(n+9)|A|^2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|H|^2 \leq \Delta|H|^2 + 2|H|^2\left(|A|^2 + n + 9\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\mathring{A}\right|^2 \leq \Delta\left|\mathring{A}\right|^2 + 2\left|\mathring{A}\right|^2\left(|A|^2 - n + 9\right). \tag{3}$$

为了证明本文的主要定理，我们需要利用四元数射影空间 $\mathbb{QP}^{(n+1)/4}$ 中范数形式的 Sobolev 不等式，引理如下。

引理 2.2 设 M 是四元数射影空间 $\mathbb{QP}^{(n+1)/4}(4)$ 中的一个 $n(n\geq 11)$ 维闭超曲面，对于 M 上所有 Lipschitz 函数 v，并且 $\alpha\geq\alpha_0>n$，有

$$\|v\|^2_{\frac{2n}{L^{n-2}(M)}}\leq Q_{n,\alpha_0}\left(\|\nabla v\|^2_{L^2(M)}+\left(1+\|H\|^{\frac{2\alpha}{\alpha-n}}_{L^{\alpha}(M)}\right)\|v\|^2_{L^2(M)}\right), \tag{4}$$

其中 Q_{n,α_0} 是一个依赖于 n 和 α_0 的正常数。

证明 沿用文献[15]中类似的方法。考虑等距浸入 $M^n\to\mathbb{QP}^{(n+1)/4}\subset\mathbb{R}^{n+1}$。令 $\bar{H}$，H 分别为 M 在欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 和四元数射影空间 $\mathbb{QP}^{(n+1)/4}$ 中的平均曲率向量，由[18]可知此复合浸入的平均曲率向量估计为

$$|\bar{H}|^2\leq|H|^2+\frac{2(n+4)}{n}.$$

由于后续论证只依赖于该平均曲率估计的具体数值形式，与射影空间的具体类型无关，故在此不再赘述。最终常数记为 Q_{n,α_0}，引理得证。

注记 2.3 需要指出的是，维数条件 $n\geq 11$ 并非由上述 Sobolev 不等式的证明直接得到，而是源于后续应用文献[16]中的平均曲率流收敛定理时所需的维数假设。因此，为了保证该收敛定理能够适用，本文在引理 2.2 中要求维数 $n\geq 11$。

在有限的曲率积分条件下，平均曲率流的延拓性已有文献[14]证明，其结论如下。

引理 2.3 ([14])设 $F:M\times[0,T)\to N$ 是定义在有限时间区间 $[0,T)$ 上，具有紧致初始值的平均曲率流的解，其中 N 为具有有界几何的黎曼流形。如果存在满足 $n<p<+\infty$ 的实数 p，使得 $\int_{M_t}|A|^p\,\mathrm{d}\mu_t$ 在 $[0,T)$ 上有界，则该平均曲率流可以光滑地延拓至时间区间 $[0,T+\omega)$，其中 $\omega>0$。

3. 定理的证明

引理3.1 设当 $t=0$ 时，对于任意的 $p>n$，有 $\|A\|_{L^p}\leq\Lambda$，那么存在一个依赖于 n，p，Λ 的时间 $T_1>0$，使得当 $t\in[0,T_1]$ 时，平均曲率流有一个光滑解，且 $\|A\|_{L^p(M_t)}\leq 2\Lambda$。

证明 令 $u=|A|^2+\eta$，其中 η 为一个充分小的正常数，根据(1)可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t}u\leq\Delta u+2u^2+2(n+9)u.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t&=\int_{M_t}\frac{p}{2}u^{\frac{p}{2}-1}\frac{\partial}{\partial t}u\,\mathrm{d}\mu_t+\int_{M_t}u^{\frac{p}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{d}\mu_t\\&\leq\frac{p}{2}\int_{M_t}u^{\frac{p}{2}-1}\left(\Delta u+2u^2+2(n+9)u\right)\mathrm{d}\mu_t-\int_{M_t}|H|^2u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\\&\leq-\frac{4(p-2)}{p}\int_{M_t}\left|\nabla u^{\frac{p}{4}}\right|^2\mathrm{d}\mu_t+p\int_{M_t}u^{\frac{p}{2}+1}\mathrm{d}\mu_t+(n+9)p\int_{M_t}u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t.\end{aligned}$$

对于上式右边的第二项，利用 Hölder 不等式可以得到

$$\begin{aligned}\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}+1}\mathrm{d}\mu_t &\le \left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{2}{p}}\cdot\left(\int_{M_t}\left(u^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p-2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p-2}{p}}\\ &\le \left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{2}{p}}\cdot\left(\int_{M_t} u^{\frac{p(p-n)}{2(p-2)}\frac{p-2}{p-n}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p-n}{p-2}\frac{p-2}{p}}\cdot\left(\int_{M_t} u^{\frac{np}{2(p-2)}\frac{p-2}{n-2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{n-2}{p-2}\frac{p-2}{p}}\\ &= \left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{2}{p}}\cdot\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p-n}{p}}\cdot\left(\int_{M_t}\left(u^{\frac{p}{4}}\right)^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{n-2}{p}}.\end{aligned}$$

再利用引理 2.2 中的 Sobolev 不等式和 Young 不等式，则对于任意的$\epsilon>0$，有

$$\begin{aligned}\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}+1}\mathrm{d}\mu_t &\le \left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{2}{p}}\cdot\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p-n}{p}}\\ &\quad\times\left\{Q_{n,p}\left(\int_{M_t}\left|\nabla u^{\frac{p}{4}}\right|^2\mathrm{d}\mu_t+\left[1+\left(\int_{M_t}|H|^p\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{2}{p-n}}\right]\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)\right\}^{\frac{n}{p}}\\ &\le \left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p-n+2}{p}}\cdot\left(Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\left(\int_{M_t}\left|\nabla u^{\frac{p}{4}}\right|^2\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{n}{p}}+Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{n}{p}}\right)\\ &\quad+\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p-n+2}{p}}\cdot n^{\frac{n}{p-n}}Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\left(1+\frac{2}{p-n}\right)\frac{n}{p}}\\ &\le Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p+2}{p}}+n^{\frac{n}{p-n}}Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p-n+2}{p-n}}\\ &\quad+Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\frac{p-n}{p}\epsilon^{\frac{p}{p-n}}\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p-n+2}{p-n}}+Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\frac{n}{p}\epsilon^{-\frac{p}{n}}\left(\int_{M_t}\left|\nabla u^{\frac{p}{4}}\right|^2\mathrm{d}\mu_t\right).\end{aligned}$$

从而可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t &\le \left(nQ_{n,p}^{\frac{n}{p}}\epsilon^{-\frac{p}{n}}-\frac{4(p-2)}{p}\right)\int_{M_t}\left|\nabla u^{\frac{p}{4}}\right|^2\mathrm{d}\mu_t\\ &\quad+(n+9)p\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t+pQ_{n,p}^{\frac{n}{p}}\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p+2}{p}}\\ &\quad+p\left(n^{\frac{n}{p-n}}Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}+Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\frac{p-n}{p}\epsilon^{\frac{p}{p-n}}\right)\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p-n+2}{p-n}}.\end{aligned}$$

令$\epsilon=\left(\frac{np}{4(p-2)}\cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{n}{p}}$，则有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t \le (n+9)p\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t+pQ_{n,p}^{\frac{n}{p}}\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p+2}{p}}+c_1\left(\int_{M_t} u^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\mu_t\right)^{\frac{p-n+2}{p-n}},$$

其中 $c_1 = p\left(n^{\frac{p}{p-n}} Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} + Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \dfrac{p-n}{p} \left(\dfrac{np}{4(p-2)} Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \right)^{\frac{n}{p-n}} \right)$。

根据极大值原理和引理 2.3，存在一个仅依赖于 n, p, Λ 的正常数 T_1，使得在 $[0, T_1]$ 内平均曲率流的解是光滑的且 $\|A\|_{L^p(M_t)} \le 2\Lambda$。 □

引理 3.2 设当 $t=0$ 时，对于任意 $q>1$，有 $\left\| \overset{\circ}{A} \right\|_{L^q} \le \varepsilon$，那么存在一个依赖于 n， p， q， Λ 的时间 $T_2 \in (0, T_1]$，使得当 $t \in [0, T_2]$ 时，$\left\| \overset{\circ}{A} \right\|_{L^q(M_t)} \le 2\varepsilon$。

证明 根据引理 2.2 和引理 3.1，对于任意一个 Lipschitz 函数 v，当 $t \in [0, T_1]$ 时，有

$$\|v\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(M_t)} \le Q_{n,p} \left(\|\nabla v\|^2_{L^2(M_t)} + \left(1 + n^{\frac{p}{p-n}} (2\Lambda)^{\frac{2p}{p-n}} \right) \|v\|^2_{L^2(M_t)} \right), \tag{5}$$

其中 $Q_{n,p}$ 是一个仅依赖于 n 和 p 的正常数。

令 $h_\sigma = \sqrt{\left| \overset{\circ}{A} \right|^2 + \sigma}$，其中 σ 为任意正数。由(3)，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} h_\sigma \le \Delta h_\sigma + 2|A|^2 h_\sigma + 2(9-n) h_\sigma .$$

因此，对于任意的 $r \ge q > 1$，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_{M_t} h_\sigma^r \, \mathrm{d}\mu_t &= \int_{M_t} h_\sigma^{r-1} \frac{\partial}{\partial t} u \, \mathrm{d}\mu_t + \frac{1}{r} \int_{M_t} h_\sigma^r \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{d}\mu_t \\ &\le -\frac{4(r-1)}{r^2} \int_{M_t} \left| \nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}} \right|^2 \mathrm{d}\mu_t + 2 \int_{M_t} |A|^2 h_\sigma^r \, \mathrm{d}\mu_t + 2(9-n) \int_{M_t} h_\sigma^r \, \mathrm{d}\mu_t . \end{aligned}$$

对于上式右边第二项，利用 Hölder 不等式和(5)，可得

$$\begin{aligned} \int_{M_t} |A|^2 h_\sigma^r \, \mathrm{d}\mu_t &\le \left(\int_{M_t} |A|^p \, \mathrm{d}\mu_t \right)^{\frac{2}{p}} \cdot \left(\int_{M_t} h_\sigma^{r \cdot \frac{p}{p-2}} \, \mathrm{d}\mu_t \right)^{\frac{p-2}{p}} \\ &\le (2\Lambda)^2 \left(\int_{M_t} h_\sigma^r \, \mathrm{d}\mu_t \right)^{\frac{p-n}{p}} \cdot \left(\int_{M_t} \left(h_\sigma^r \right)^{\frac{n}{n-2}} \mathrm{d}\mu_t \right)^{\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n}{p}} \\ &\le (2\Lambda)^2 \left(\int_{M_t} h_\sigma^r \, \mathrm{d}\mu_t \right)^{\frac{p-n}{p}} \cdot \left[Q_{n,p} \left(\int_{M_t} \left| \nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}} \right|^2 \mathrm{d}\mu_t \right) + \left(1 + n^{\frac{p}{p-n}} (2\Lambda)^{\frac{2p}{p-n}} \right) \int_{M_t} h_\sigma^r \, \mathrm{d}\mu_t \right]^{\frac{n}{p}} \\ &\le (2\Lambda)^2 \left(\int_{M_t} h_\sigma^r \, \mathrm{d}\mu_t \right)^{\frac{p-n}{p}} \cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \left(\int_{M_t} \left| \nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}} \right|^2 \mathrm{d}\mu_t \right)^{\frac{n}{p}} \\ &\quad + (2\Lambda)^2 \left(\int_{M_t} h_\sigma^r \, \mathrm{d}\mu_t \right)^{\frac{p-n}{p}} \cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \left(1 + n^{\frac{p}{p-n}} (2\Lambda)^{\frac{2p}{p-n}} \right)^{\frac{n}{p}} \left(\int_{M_t} h_\sigma^r \, \mathrm{d}\mu_t \right)^{\frac{n}{p}} . \end{aligned}$$

再利用 Young 不等式，则对任意的 $\mu > 0$，有

$$\int_{M_t}|A|^2 h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t \le (2\Lambda)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\left(1+n^{\frac{p}{p-n}}(2\Lambda)^{\frac{2p}{p-n}}\right)^{\frac{n}{p}}\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t$$
$$+(2\Lambda)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\cdot\frac{p-n}{p}\mu^{\frac{p}{p-n}}\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t$$
$$+(2\Lambda)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\cdot\frac{n}{p}\mu^{-\frac{p}{n}}\int_{M_t}\left|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}\right|^2 \mathrm{d}\mu_t.$$

进一步得到估计

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t \le \left(2r\cdot(2\Lambda)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\cdot\frac{n}{p}\mu^{-\frac{p}{n}}-\frac{4(r-1)}{r}\right)\int_{M_t}\left|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}\right|^2 \mathrm{d}\mu_t$$
$$+2r\cdot\left((2\Lambda)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\cdot\frac{p-n}{p}\mu^{\frac{p}{p-n}}+(9-n)\right)\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t$$
$$+2r\cdot(2\Lambda)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\left(1+n^{\frac{p}{p-n}}(2\Lambda)^{\frac{2p}{p-n}}\right)^{\frac{n}{p}}\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t.$$

令 $\mu=\left(\frac{2r^2\cdot(2\Lambda)^2}{3(r-1)}\cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\cdot\frac{n}{p}\right)^{\frac{n}{p}}$，则有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t+\left(1-\frac{1}{q}\right)\int_{M_t}\left|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}\right|^2 \mathrm{d}\mu_t \le c_2 r^{1+\frac{n}{p-n}}\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t, \tag{6}$$

其中 $c_2=2(2\Lambda)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\left(\left(1+n^{\frac{p}{p-n}}(2\Lambda)^{\frac{2p}{p-n}}\right)^{\frac{n}{p}}\cdot q^{\frac{-n}{p-n}}+\frac{p-n}{p}\left(\frac{2q\cdot(2\Lambda)^2}{3(q-1)}\cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\cdot\frac{n}{p}\right)^{\frac{n}{p-n}}\right)+2(9-n)\cdot q^{\frac{-n}{p-n}}$。

当 $r=q$ 时，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^q \mathrm{d}\mu_t \le c_2 q^{1+\frac{n}{p-n}}\int_{M_t} h_\sigma^q \mathrm{d}\mu_t,$$

再根据极大值原理，对于 $t\le\min\left\{T_1,\frac{q\ln 2}{c_2}\cdot q^{-\left(\frac{p}{p-n}+1\right)}\right\}$，有 $\int_{M_t} h_\sigma^q \mathrm{d}\mu_t \le 2^q\int_{M_0} h_\sigma^q \mathrm{d}\mu_0 \le (2\varepsilon)^q$。

因此，令 $\sigma\to 0$，取 $T_2=\min\left\{T_1,\frac{q\ln 2}{c_2}\cdot q^{-\left(\frac{p}{p-n}+1\right)}\right\}$，有 $\left\|\mathring{A}\right\|_{L^q(M_t)}\le 2\varepsilon$。 □

引理 3.3 对于任意的 $t\in(0,T_2]$，有

$$\left|\mathring{A}\right|^2 \le\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{np(n+2)}{2q(p-n)}} c_3^{\frac{n}{q}}\left(c_2 q^{\frac{2n}{p-n}+1}+\frac{(n+2)^2}{2nt}\right)^{\frac{n+2}{q}}\left(\int_0^t\int_{M_t}\left|\mathring{A}\right|^q \mathrm{d}\mu_t\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{q}},$$

其中 c_2 和 c_3 是依赖于 n， p， q， Λ 的正常数。

证明 固定 $t_0\in(0,T_2]$，对于任意的 τ,τ' 满足 $0<\tau<\tau'<t_0$，在 $[0,t_0]$ 上定义函数 ψ 如下

$$\psi(t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le\tau,\\ \dfrac{t-\tau}{\tau'-\tau} & \tau\le t\le\tau',\\ 1 & \tau'\le t\le t_0.\end{cases}$$

由(6)有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\int_{M_t}h_\sigma^r\mathrm{d}\mu_t\right)+\left(1-\frac{1}{q}\right)\psi\int_{M_t}\left|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}\right|^2\mathrm{d}\mu_t\le\left(c_2r^{\frac{p}{p-n}}\psi+\psi'\right)\int_{M_t}h_\sigma^r\mathrm{d}\mu_t. \tag{7}$$

对于任意的$t\in[\tau',t_0]$，考虑在$[\tau,t]$上对上式两端进行积分，可得

$$\int_{M_t}h_\sigma^r\,\mathrm{d}\mu_t+\left(1-\frac{1}{q}\right)\int_{\tau'}^t\int_{M_s}\left|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}\right|^2\mathrm{d}\mu_s\,\mathrm{d}s\le\left(c_2r^{\frac{p}{p-n}}+\frac{1}{\tau'-\tau}\right)\int_\tau^{t_0}\int_{M_s}h_\sigma^r\,\mathrm{d}\mu_s\,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

另一方面，由 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式(5)，有

$$\begin{aligned}&\int_{\tau'}^{t_0}\int_{M_s}h_\sigma^{r\left(1+\frac{2}{n}\right)}\mathrm{d}\mu_s\mathrm{d}s\\ &\le\int_{\tau'}^{t_0}\left(\int_{M_s}h_\sigma^r\mathrm{d}\mu_s\right)^{\frac{2}{n}}\cdot\left(\int_{M_s}h_\sigma^{\frac{nr}{n-2}}\mathrm{d}\mu_s\right)^{\frac{n-2}{n}}\mathrm{d}s\\ &\le\max_{s\in[\tau',t_0]}\left(\int_{M_s}h_\sigma^r\,\mathrm{d}\mu_s\right)^{\frac{2}{n}}\cdot\int_{\tau'}^{t_0}\left(\int_{M_s}h_\sigma^{\frac{nr}{n-2}}\mathrm{d}\mu_s\right)^{\frac{n-2}{n}}\mathrm{d}s\\ &\le Q_{n,p}\cdot\max\nolimits_{s\in[\tau',t_0]}\left(\int_{M_s}h_\sigma^r\mathrm{d}\mu_s\right)^{\frac{2}{n}}\\ &\quad\times\int_{\tau'}^{t_0}\left(\int_{M_s}\left|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}\right|^2\mathrm{d}\mu_s+\left(1+n^{\frac{p}{p-n}}(2\Lambda)^{\frac{2p}{p-n}}\right)\int_{M_s}h_\sigma^r\mathrm{d}\mu_s\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

根据(7)和(8)，可得

$$\int_{\tau'}^{t_0}\int_{M_s}h_\sigma^{r\left(1+\frac{2}{n}\right)}\mathrm{d}\mu_s\mathrm{d}s\le c_3\left(c_2r^{\frac{p}{p-n}}+\frac{1}{\tau'-\tau}\right)^{1+\frac{2}{n}}\left(\int_\tau^{t_0}\int_{M_s}h_\sigma^r\mathrm{d}\mu_s\mathrm{d}s\right)^{1+\frac{2}{n}}, \tag{9}$$

其中$c_3=Q_{n,p}\cdot\max\left\{\dfrac{q}{q-1},\left(1+n^{\frac{p}{p-n}}(2\Lambda)^{\frac{2p}{p-n}}\right)T_2\right\}$。容易看出，$c_3$仅依赖于$n$，$p$，$q$，$\Lambda$。

令

$$J(r,t)=\int_t^{t_0}\int_{M_s}h_\sigma^r\,\mathrm{d}\mu_s\,\mathrm{d}s.$$

我们定义迭代序列

$$\mu:=1+\frac{2}{n},\qquad r_k:=q\mu^k,\qquad \tau_k:=\left(1-\mu^{-k}\right)t_0.$$

于是$\tau_0=0$，并且$\tau_{k+1}-\tau_k=t_0\mu^{-(k+1)}(\mu-1)$。

由(9)，取$r=r_k$和$\tau'=\tau_{k+1}$可得

$$J\left(r_{k+1},\tau_{k+1}\right)\le c_3\left(c_2 r_k^{\frac{p}{p-n}}+\frac{1}{\tau_{k+1}-\tau_k}\right)^{\mu}J\left(r_k,\tau_k\right)^{\mu}.$$

两边同时取$\frac{1}{r_{k+1}}$次幂，得到

$$J\left(r_{k+1},\tau_{k+1}\right)^{\frac{1}{r_{k+1}}}\le c_3^{\frac{1}{r_{k+1}}}\left(c_2 r_k^{\frac{p}{p-n}}+\frac{1}{\tau_{k+1}-\tau_k}\right)^{\frac{1}{r_k}}J\left(r_k,\tau_k\right)^{\frac{1}{r_k}}.$$

对上述不等式从$k=0,\cdots,m$进行迭代，并利用$r_k=q\mu^k$，可得

$$J\left(r_{m+1},\tau_{m+1}\right)^{\frac{1}{r_{m+1}}}\le c_3^{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{r_{k+1}}}\left(c_2 q^{\frac{p}{p-n}}+\frac{\mu}{(\mu-1)t_0}\right)^{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{r_k}}\mu^{\frac{p}{p-n}\sum_{k=0}^{m}\frac{k}{r_k}}J\left(q,0\right)^{\frac{1}{q}}.$$

因为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_{k+1}}=\frac{n}{2q},\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}=\frac{n+2}{2q},\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{r_k}=\frac{n(n+2)}{4q},$$

令$m\to\infty$，$\sigma\to 0$得到

$$\left|\mathring{A}\right|^2\le\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{np(n+2)}{2q(p-n)}}c_3^{\frac{n}{q}}\left(c_2 q^{\frac{p}{p-n}}+\frac{(n+2)^2}{2nt_0}\right)^{\frac{n+2}{q}}\left(\int_0^{t_0}\int_{M_s}h_\sigma^q\mathrm{d}\mu_s\mathrm{d}s\right)^{\frac{2}{q}}.$$

由于$t_0\in(0,T_2]$是任意的，引理即证。 □

根据引理 3.2 和引理 3.3，对于任意的$t\in\left[\frac{1}{2}T_2,T_2\right]$，有

$$\left|\mathring{A}\right|^2\le\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{np(n+2)}{2q(p-n)}}c_3^{\frac{n}{q}}\left(c_2 q^{\frac{p}{p-n}}+\frac{(n+2)^2}{nT_2}\right)^{\frac{n+2}{q}}T_2^{\frac{2}{q}}(2\varepsilon)^2:=c_4\varepsilon^2,$$

其中c_4是仅依赖于n,p,q,Λ的正常数。

设$\varepsilon_0=\sqrt{\frac{2}{c_4}}$，如果$\varepsilon\le\varepsilon_0$，那么在$M_{T_2}$上，有$|A|^2\le\frac{1}{n-1}|H|^2+2$。由收敛定理[16]及平均曲率流的唯一性可知，以$F_0$为初值的平均曲率流在有限时间内收敛到一个圆点，从而可以得到以下引理。

引理 3.4 设$F_0:M\to\mathbb{QP}^{\frac{n+1}{4}}(4)$是四元数射影空间中的$n(n\ge 11)$维闭超曲面，$F:M\times[0,T)\to\mathbb{QP}^{\frac{n+1}{4}}(4)$是以$F_0$为初始值的平均曲率流。对于给定的正常数$p\in(n,\infty)$，$q\in(1,\infty)$，假设有$\|A\|_{L^p}<\Lambda$，则存在仅依赖于$n,p,q,\Lambda$的正常数$D_1$，若

$$\left\|\mathring{A}\right\|_{L^p}<D_1,$$

则平均曲率流在有限的时间区间内存在唯一解，且当$t\to T$时收敛到一个圆点。

若将初始条件由第二基本形式的L^p小性改为平均曲率的L^p有界性，则通过相同的证明框架得到如下平行结论。

引理 3.5 设 $F_0 : M \to \mathbb{QP}^{\frac{n+1}{4}}(4)$ 是四元数射影空间中的 $n(n \geq 11)$ 维闭超曲面，$F : M \times [0,T) \to \mathbb{QP}^{\frac{n+1}{4}}(4)$ 是以 F_0 为初始值的平均曲率流。对于给定的正常数 $p \in (n,\infty)$，$q \in (n,\infty)$，假设有 $\|H\|_{L^p} \leq \Theta$，则存在仅依赖于 n, p, q, Θ 的正常数 D_2，若

$$\left\| \overset{\circ}{A} \right\|_{L^p} < D_2,$$

则平均曲率流在有限的时间区间内存在唯一解，且当 $t \to T$ 时收敛到一个圆点。

证明 在 $t = 0$ 时，假设对于某些 $p, q > n$ 有 $\|H\|_{L^p} \leq \Theta$，$\left\| \overset{\circ}{A} \right\|_{L^q} < \varepsilon$，且 $\varepsilon \in (0, 60]$，令

$$T = \sup\left\{ t \in [0, T_{\max}) : \|H\|_{L^p} < 2\Theta, \left\| \overset{\circ}{A} \right\|_{L^q} < 2\varepsilon \right\}.$$

令 $w = |H|^2 + \kappa$，其中 κ 为一个充分小的正常数，由(2)可得

$$\frac{\partial}{\partial t} w \leq \Delta w + 2\left| \overset{\circ}{A} \right|^2 w + \frac{2}{n} w^2 + 2(n+9) w.$$

对于 $r \geq \frac{p}{2} \geq \frac{11}{2}$，我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_{M_t} w^r \, \mathrm{d}\mu_t \leq & -\frac{4(r-1)}{r^2} \int_{M_t} \left| \nabla w^{\frac{r}{2}} \right|^2 \mathrm{d}\mu_t + 2\int_{M_t} \left| \overset{\circ}{A} \right|^2 w^r \, \mathrm{d}\mu_t \\ & + \frac{2}{n} \int_{M_t} w^{r+1} \mathrm{d}\mu_t + 2(n+9) \int_{M_t} w^r \, \mathrm{d}\mu_t. \end{aligned}$$

由引理 2.2，对于任意一个 Lipschitz 函数 v，当 $t \in [0,T)$ 时，可得

$$\left(\int_{M_t} v^{\frac{2n}{n-2}} \mathrm{d}\mu_t \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq Q_{n,p} \left(\int_{M_t} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}\mu_t + \left(1 + (2\Theta)^{\frac{2p}{p-n}} \right) \int_{M_t} v^2 \mathrm{d}\mu_t \right).$$

则对于任意的 $\mu > 0$，有

$$\begin{aligned} \int_{M_t} \left| \overset{\circ}{A} \right|^2 w^r \mathrm{d}\mu_t \leq & 120^2 \left(1 + (2\Theta)^{\frac{2p}{p-n}} \right)^{\frac{n}{q}} Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} \int_{M_t} w^r \mathrm{d}\mu_t \\ & + 120^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} \cdot \frac{q-n}{q} \mu^{\frac{q}{q-n}} \int_{M_t} w^r \mathrm{d}\mu_t \\ & + 120^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} \cdot \frac{n}{q} \mu^{-\frac{q}{n}} \int_{M_t} \left| \nabla w^{\frac{r}{2}} \right|^2 \mathrm{d}\mu_t. \end{aligned}$$

对于任意的 $\upsilon > 0$，有

$$\begin{aligned} \int_{M_t} w^{r+1} \mathrm{d}\mu_t \leq & (2\Theta)^2 \left(1 + (2\Theta)^{\frac{2p}{p-n}} \right)^{\frac{n}{p}} \cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \cdot \int_{M_t} w^r \mathrm{d}\mu_t \\ & + (2\Theta)^2 \cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \frac{p-n}{p} \upsilon^{\frac{p}{p-n}} \cdot \int_{M_t} w^r \mathrm{d}\mu_t + (2\Theta)^2 \cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \frac{n}{p} \upsilon^{-\frac{p}{n}} \cdot \int_{M_t} \left| \nabla w^{\frac{p}{4}} \right|^2 \mathrm{d}\mu_t. \end{aligned}$$

从而可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} w^r \mathrm{d}\mu_t \le \left(2r\cdot 120^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} \frac{n}{q}\mu^{-\frac{n}{q}} + \frac{2}{n}r(2\Theta)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \frac{n}{p}\upsilon^{-\frac{p}{n}} - \frac{4(r-1)}{r}\right)\int_{M_t}\left|\nabla w^{\frac{r}{2}}\right|^2 \mathrm{d}\mu_t$$
$$+\left(2r\cdot 120^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{q}}\cdot\frac{q-n}{q}\mu^{\frac{q}{q-n}} + \frac{2}{n}r\cdot(2\Theta)^2\cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\cdot\frac{p-n}{p}\upsilon^{\frac{p}{p-n}} + 2(n+9)r\right)\int_{M_t} w^r \mathrm{d}\mu_t$$
$$+\left(2r\cdot 120^2\left(1+(2\Theta)^{\frac{2p}{p-n}}\right)^{\frac{n}{q}}\cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} + \frac{2}{n}r\cdot(2\Theta)^2\left(1+(2\Theta)^{\frac{2p}{p-n}}\right)^{\frac{n}{p}} Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\right)\int_{M_t} w^r \mathrm{d}\mu_t.$$

令 $\mu=\left(\frac{c_5 r^2}{4(r-1)}\right)^{\frac{n}{q}}$，$\upsilon=\left(\frac{c_5 r^2}{4(r-1)}\right)^{\frac{n}{p}}$，进而有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} w^r \mathrm{d}\mu_t \le c_6 r^{\max\left\{\frac{n}{p-n},\frac{n}{q-n}\right\}+1}\int_{M_t} w^r \mathrm{d}\mu_t,$$

其中

$$c_5 = 2\cdot 120^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{q}}\frac{n}{q} + \frac{2}{n}(2\Theta)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\frac{n}{p},$$

$$c_6 = 2\cdot 120^2\left(1+(2\Theta)^{\frac{2p}{p-n}}\right)^{\frac{n}{q}} Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} + 2\cdot 120^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{q}}\cdot\frac{q-n}{q}\left(\frac{c_5 p}{4(p-2)}\right)^{\frac{n}{q-n}}$$
$$+\frac{2}{n}\cdot(2\Theta)^2\left(1+(2\Theta)^{\frac{2p}{p-n}}\right)^{\frac{n}{p}}\cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} + \frac{2}{n}\cdot(2\Theta)^2\cdot Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\frac{p-n}{p}\left(\frac{c_5 p}{4(p-2)}\right)^{\frac{n}{p-n}}$$
$$+2(n+9).$$

取 $r=\frac{p}{2}$ 并令 $\kappa\to 0$，由极大值原理，当 T_3 满足

$$T_3 = \frac{p\ln\frac{3}{2}}{c_6}\left(\frac{2}{p}\right)^{\max\left\{\frac{n}{p-n},\frac{n}{q-n}\right\}+1},$$

对于任意的 $t\in\left[0,\min\{T,T_3\}\right)$，有 $\|H\|_{L^p}<\frac{3}{2}\Theta$ 成立。

接下来对无迹第二基本形式进行估计。

根据(3)，有

$$\frac{\partial}{\partial t}h_\sigma \le \Delta h_\sigma + 2\left|\mathring{A}\right|^2 h_\sigma + 2(9-n)h_\sigma + \frac{2}{n}|H|^2 h_\sigma.$$

对于任意的 $r\ge q>1$，可得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t \le -\frac{4(r-1)}{r^2}\int_{M_t}\left|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}\right|^2 \mathrm{d}\mu_t + 2\int_{M_t}\left|\mathring{A}\right|^2 h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t$$
$$+\frac{2}{n}\int_{M_t}|H|^2 h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t + 2(9-n)\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t.$$

同理，对 $\left|\mathring{A}\right|^2 h_\sigma$ 和 $|H|^2 h_\sigma$ 采用类似的放缩，则对于任意的 $\nu>0$， $\theta>0$ 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t \le & \left(2r\cdot 120^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} \frac{n}{q}\nu^{-\frac{n}{q}} + \frac{2}{n} r(2\Theta)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \frac{n}{p}\theta^{-\frac{p}{n}} - \frac{4(r-1)}{r}\right)\int_{M_t}\left|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}\right|^2 \mathrm{d}\mu_t \\ & + \left(2r\cdot 120^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} \cdot \frac{q-n}{q}\nu^{\frac{q}{q-n}} + \frac{2}{n} r\cdot(2\Theta)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \cdot \frac{p-n}{p}\theta^{\frac{p}{p-n}} + 2r(9-n)\right)\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t \\ & + \left(2r\cdot 120^2\left(1+(2\Theta)^{\frac{2p}{p-n}}\right)^{\frac{n}{q}} Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} + \frac{2}{n} r\cdot(2\Theta)^2\left(1+(2\Theta)^{\frac{2p}{p-n}}\right)^{\frac{n}{p}} Q_{n,p}^{\frac{n}{p}}\right)\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t .\end{aligned}$$

令 $\nu=\left(\frac{c_7 r^2}{3(r-1)}\right)^{\frac{n}{q}}$， $\theta=\left(\frac{c_7 r^2}{3(r-1)}\right)^{\frac{n}{p}}$，进而有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t + \left(1-\frac{1}{q}\right)\int_{M_t}\left|\nabla h_\sigma^{\frac{r}{2}}\right|^2 \mathrm{d}\mu_t \le c_8 r^{\max\left\{\frac{n}{p-n},\frac{n}{q-n}\right\}+1}\int_{M_t} h_\sigma^r \mathrm{d}\mu_t . \tag{10}$$

其中

$$c_7 = 2\cdot 120^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} \frac{n}{q} + \frac{2}{n}(2\Theta)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \frac{n}{p},$$

$$\begin{aligned}c_8 = & 2\cdot 120^2\left(1+(2\Theta)^{\frac{2p}{p-n}}\right)^{\frac{n}{q}} Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} + 2\cdot 120^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{q}} \cdot \frac{q-n}{q}\left(\frac{c_7 q}{3(q-1)}\right)^{\frac{n}{q-n}} + 2(9-n) \\ & + \frac{2}{n}\cdot(2\Theta)^2\left(1+(2\Theta)^{\frac{2p}{p-n}}\right)^{\frac{n}{p}} Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} + \frac{2}{n}\cdot(2\Theta)^2 Q_{n,p}^{\frac{n}{p}} \cdot \frac{p-n}{p}\left(\frac{c_7 q}{3(q-1)}\right)^{\frac{n}{p-n}}.\end{aligned}$$

取 $r=q$，当 T_4 满足

$$T_4 = \frac{p\ln\frac{3}{2}}{c_8}\left(\frac{1}{q}\right)^{\max\left\{\frac{n}{p-n},\frac{n}{q-n}\right\}+1},$$

对于任意的 $t\in\left[0,\min\{T,T_4\}\right)$，有 $\left\|\mathring{A}\right\|_{L^q} < \frac{3}{2}\varepsilon$ 成立。

根据文献[13]可知 $T>\min\{T_3,T_4\}$。设 $T_0=\min\{T_3,T_4\}$，我们考虑 $\left[0,\frac{1}{2}T_0\right]$ 上的平均曲率流。对于任意的 $t\in\left[0,\frac{1}{2}T_0\right]$，可知(10)始终成立。再次使用 Moser 迭代，对于任意的 $t\in\left(0,\frac{1}{2}T_0\right]$ 有

$$h_\sigma(x,t) \le \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\hat{q}} c_9^{\frac{n}{2q}}\left(c_8 q^{\max\left\{\frac{n}{p-n},\frac{n}{q-n}\right\}+1} + \frac{(n+2)^2}{2nt}\right)^{\frac{n+2}{2q}}\left(\int_0^{\frac{T_0}{2}}\int_{M_t} h_\sigma^q \mathrm{d}\mu_t \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中

$$c_9 = Q_{n,p} \cdot \max\left\{\frac{q}{q-1}, \left(1+(2\Lambda)^{\frac{2p}{p-n}}\right)\cdot T_0\right\},$$

$$\hat{q} = \frac{n(n+2)}{4q}\cdot\left(\max\left\{\frac{n}{p-n}, \frac{n}{q-n}\right\}+1\right).$$

令 $\sigma \to 0$，当 $t = \frac{1}{2}T_0$ 时，有

$$\left|\overset{\circ}{A}\right|^2 \le \left(1+\frac{2}{n}\right)^{2\hat{q}} c_9^{\frac{n}{q}}\left(c_8 q^{\max\left\{\frac{n}{p-n},\frac{n}{q-n}\right\}+1} + \frac{(n+2)^2}{nT_0}\right)^{\frac{n+2}{q}}\left(\frac{T_0}{2}\right)^{\frac{2}{q}}(2\varepsilon)^2 = c_{10}\varepsilon^2.$$

其中 c_{10} 是仅依赖于 n, p, q, Θ 的正常数。

设 $\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{c_{10}}}$，如果 $\varepsilon \le \varepsilon_0$，那么在 $M_{\frac{T_0}{2}}$ 上，有 $|A|^2 \le \frac{1}{n-1}|H|^2 + 2$。由收敛定理[16]及平均曲率流的唯一性可知，以 F_0 为初值的平均曲率流在有限时间内收敛到一个圆点。引理 3.5 得证。 □

将引理 3.4 中得到的常数记为 $D_1 = D_1(n, p, q, \Lambda)$，引理 3.5 中得到的常数记为 $D_2 = D_2(n, p, q, \Theta)$。令

$$D = \min\left\{60, \max\left\{D_1(n, p, p, 60), D_2\left(n, p, p, 60\cdot\sqrt{n}\right)\right\}\right\},$$

由于 $\left\|\overset{\circ}{A}\right\|_{L^p} \le \|A\|_{L^p}$，于是主定理 1.1 得证。

注记 3.6 引理 3.4、引理 3.5 以及主定理 1.1，共同体现了本文所建立的收敛理论的逐步深化过程。引理 3.4 在第二基本形式 A 的 L_p 范数有界、且无迹第二基本形式 $\overset{\circ}{A}$ 的 L_q 范数充分小的假设下，建立了平均曲率流的收敛性。同时，该引理也建立了 Moser 迭代方法以及后续论证所需的先验估计。引理 3.5 进一步将 A 的 L_p 界减弱为 H 上的 L_p 界，并保持相同的收敛性结论。最后，取 $q = p$，即可得到主定理 1.1 所述的收敛性结果。

基金项目

本研究得到湖北省自然科学基金计划项目资助，项目编号：2024AFB445。

参考文献

[1] Mullins, W.W. (1957) Theory of Thermal Grooving. *Journal of Applied Physics*, **28**, 333-339. https://doi.org/10.1063/1.1722742

[2] Huisken, G. (1984) Flow by Mean Curvature of Convex Surfaces into Spheres. *Journal of Differential Geometry*, **20**, 237-266. https://doi.org/10.4310/jdg/1214438998

[3] Huisken, G. (1986) Contracting Convex Hypersurfaces in Riemannian Manifolds by Their Mean Curvature. *Inventiones Mathematicae*, **84**, 463-480. https://doi.org/10.1007/bf01388742

[4] Huisken, G. (1987) Deforming Hypersurfaces of the Sphere by Their Mean Curvature. *Mathematische Zeitschrift*, **195**, 205-219. https://doi.org/10.1007/bf01166458

[5] Andrews, B. and Baker, C. (2010) Mean Curvature Flow of Pinched Submanifolds to Spheres. *Journal of Differential Geometry*, **85**, 357-396. https://doi.org/10.4310/jdg/1292940688

[6] Baker, C. (2010) The Mean Curvature Flow of Submanifolds of High Codimension. Ph.D. Thesis, Australian National University.

[7] Liu, K.F., Xu, H.W., Ye, F. and Zhao, E.T. (2013) Mean Curvature Flow of Higher Codimension in Hyperbolic Spaces. *Communications in Analysis and Geometry*, **21**, 651-669. https://doi.org/10.4310/cag.2013.v21.n3.a8

[8] Liu, K.F., Xu, H.W. and Zhao, E.T. (2012) Mean Curvature Flow of Higher Codimension in Riemannian Mani-Folds. arXiv: 1204.0107v1.

[9] Wang, M.T. (2001) Mean Curvature Flow of Surfaces in Einstein Four-Manifolds. *Journal of Differential Geometry*, **57**, 301-338. https://doi.org/10.4310/jdg/1090348113

[10] Smoczyk, K. and Wang, M. (2002) Mean Curvature Flows of Lagrangian Submanifolds with Convex Potentials. *Journal of Differential Geometry*, **62**, 243-257. https://doi.org/10.4310/jdg/1090950193

[11] Li, Y., Xu, H.W. and Zhao, E.T. (2015) Contracting Pinched Hypersurfaces in Spheres by Their Mean Curvature. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, **11**, 329-368. https://doi.org/10.4310/pamq.2015.v11.n2.a8

[12] Baker, C. and Nguyen, H.T. (2023) Evolving Pinched Submanifolds of the Sphere by Mean Curvature Flow. *Mathematische Zeitschrift*, **303**, Article No. 50. https://doi.org/10.1007/s00209-022-03179-1

[13] Liu, K.F., Xu, H.W., Ye, F. and Zhao, E.T. (2018) The Extension and Convergence of Mean Curvature Flow in Higher Codimension. *Transactions of the American Mathematical Society*, **370**, 2231-2262. https://doi.org/10.1090/tran/7281

[14] Liu, K.F., Xu, H.W. and Zhao, E.T. (2025) Deforming Submanifolds of Arbitrary Codimension in a Sphere. *Science China Mathematics*, **68**, 2933-2954. https://doi.org/10.1007/s11425-025-2407-4

[15] Hu, Q.H., Sun, A.X. and Wang, H.J. (2026) A Convergence Theorem for Mean Curvature Flow of Submanifolds in Complex Projective Spaces. *Mathematics*, **14**, Article 3170. https://doi.org/10.3390/math14173170

[16] Pipoli, G. and Sinestrari, C. (2017) Mean Curvature Flow of Pinched Submanifolds of CP^n. *Communications in Analysis and Geometry*, **25**, 799-846. https://doi.org/10.4310/cag.2017.v25.n4.a3

[17] Li, S.Y., Xu, H.W. and Zhao, E.T. (2024) A New Convergence Theorem for Mean Curvature Flow of Hypersurfaces in Quaternionic Projective Spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, **332**, 219-241. https://doi.org/10.2140/pjm.2024.332.219

[18] Chen, D.G. (2009) Extrinsic Estimates for Eigenvalues of the Dirac Operator. *Mathematische Zeitschrift*, **262**, 349-361. https://doi.org/10.1007/s00209-008-0376-8