Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(11), 106-118
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1611239

Hans汉斯

欧式期权定价中分数阶PDE问题的预处理迭代法研究

刘秉京，王超杰，杨涵芮，杨宇恒

北京工商大学数学与统计学院，北京

收稿日期：2026年10月13日；录用日期：2026年11月12日；发布日期：2026年11月24日

摘　要

在欧式期权定价问题中，分数阶算子的非局部性使差分离散产生稠密的结构化方程组，如何利用其Toeplitz结构构造计算代价较低、近似效果较好的预处理矩阵，是快速求解的关键。本文以具有状态切换机制的温和空间分数阶定价模型为背景，介绍离散方程组的结构特点，重点梳理循环预处理、Toeplitz结构化快速直接求解及近似逆预处理方法，并结合相关分数阶扩散问题讨论对角系数变化下的预处理构造。通过比较各类方法的近似方式、谱性质和计算代价，分析矩阵结构保持与预处理数据复用对求解效率的影响。在此基础上，讨论空间变系数、参数变化及非光滑收益条件下的适用性，为欧式期权分数阶定价问题中预处理方法的进一步研究提供参考。

关键词

预处理迭代法，欧式期权定价，温和空间分数阶方程，Toeplitz矩阵，循环预处理，近似逆

Research on Preconditioned Iterative Methods for Fractional PDE Problems in European Option Pricing

Bingjing Liu, Chaojie Wang, Hanrui Yang, Yuheng Yang

School of Mathematics and Statistics, Beijing Technology and Business University, Beijing

Received: October 13, 2026; accepted: November 12, 2026; published: November 24, 2026

Abstract

In European option pricing, the nonlocality of fractional operators gives rise to dense structured

文章引用: 刘秉京, 王超杰, 杨涵芮, 杨宇恒. 欧式期权定价中分数阶 PDE 问题的预处理迭代法研究[J]. 理论数学, 2026, 16(11): 106-118. DOI: 10.12677/pm.2026.1611239

linear systems. Constructing effective and inexpensive preconditioners by exploiting their Toeplitz structure is therefore central to fast solution methods. With tempered space-fractional pricing models incorporating regime switching as the application background, this review introduces the structure of the discretized systems and examines circulant preconditioning, fast structured direct solution of Toeplitz systems, and approximate inverse preconditioning. Related methods for fractional diffusion equations are also discussed to address changes in diagonal coefficients. The methods are compared in terms of their approximation strategies, spectral properties, and computational costs, with particular attention to structure preservation and the reuse of preconditioning data. Their applicability to spatially varying coefficients, changing parameters, and non-smooth payoffs is then discussed to identify directions for further research on preconditioning in fractional European option pricing.

Keywords

Preconditioned Iterative Methods, European Option Pricing, Tempered Space-Fractional Equations, Toeplitz Matrices, Circulant Preconditioning, Approximate Inverse

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 问题背景

1.1. 欧式期权的分数阶定价问题

欧式期权只允许在合约到期时行权，其价值由标的资产价格、执行价格、剩余期限及市场参数共同决定。设标的资产价格为 S，执行价格为 K，到期时间为 T，欧式看涨和看跌期权的到期收益分别为 $(S-K)^+$ 和 $(K-S)^+$，其中 $z^+=\max\{z,0\}$。Black 和 Scholes [1]在连续价格路径和常波动率等假设下建立了经典定价模型，Merton [2]进一步发展了理性期权定价理论，为利用偏微分方程计算期权价值奠定了基础。在无交易成本、连续交易及标的资产不支付红利等假设下，欧式期权价格 $V(S,t)$ 满足

$$\begin{cases} V_t+\frac{1}{2}\sigma^2S^2V_{SS}+rSV_S-rV=0, & S>0,0\le t<T, \\ V(S,T)=\Phi(S), & S>0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 r 为无风险利率，σ 为波动率，Φ 为到期收益函数。在选定风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 且相应期望存在时，期权价格还可表示为贴现后的条件期望

$$V(S,t)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\Phi(S_T)\mid S_t=S\right]. \tag{2}$$

经典模型的连续路径和常波动率假设限制了其对价格跳跃及收益分布非高斯特征的描述。Merton [3]在连续扩散中加入跳跃成分，Kou [4]采用双指数跳幅分布，分别从不同角度扩展了资产价格模型。Madan、Carr 和 Chang [5]提出的方差 Gamma 模型以随机时间变换构造纯跳跃过程；Carr、Geman、Madan 和 Yor [6]提出的 CGMY 模型则通过幂律核和指数尾部衰减描述小跳跃活动及左右跳跃特征。这些模型对应的定价方程包含非局部积分项，数值求解需处理不同价格位置之间的相互作用。

Cont 和 Tankov [7]在专著中系统介绍了指数 Lévy 定价模型，其基本思想是以 Lévy 过程刻画资产对数价格的变化。Cartea 和 del-Castillo-Negrete [8]讨论了跳跃模型与分数阶扩散方程之间的联系，将 CGMY

等具有特定跳跃核的模型下的期权定价问题表示为空间分数阶方程的求解问题。Sabzikar、Meerschaert 和 Chen [9]系统讨论了温和(tempered)分数阶微积分，通过在幂律核中引入指数衰减调节远距离作用，为具有相应跳跃核的定价模型提供了算子描述。这种分数阶表示取决于具体模型的核结构；本文研究的时间导数仍为一阶，非局部性主要体现于价格空间。

欧式期权的数值求解可从条件期望或定价方程出发。Boyle [10]利用 Monte Carlo 模拟近似期望，Cox、Ross 和 Rubinstein [11]通过二叉树和向后递推进行定价。对于特征函数可有效计算的模型，Carr 和 Madan [12]提出 FFT 定价方法，Fang 和 Oosterlee [13]利用 Fourier 余弦展开构造 COS 方法。Almendral 和 Oosterlee [14]研究了带跳跃资产模型下的数值定价，Cont 和 Voltchkova[15]分析了相应有限差分格式及计算域截断误差，Matache、Schwab 和 Wihler[16]则从抛物型偏积分微分方程出发研究金融问题的快速数值求解。本文关注其中由离散方程产生的线性系统及其预处理。

状态切换模型进一步允许资产价格过程的参数随市场状态改变。Elliott 和 Osakwe [17]通过有限状态 Markov 链调制纯跳跃过程，研究了相应的期权定价。不同状态之间的转移使定价方程相互耦合，离散后得到含 Toeplitz 子块的分块系统。如何在保留模型耦合关系的同时利用各状态块的结构，是这类问题中离散格式与预处理方法设计需要共同考虑的问题。

1.2. 结构化方程组的预处理

空间分数阶算子具有非局部性，差分离散得到的系数矩阵往往为稠密矩阵。随着空间网格加密，线性方程组的求解成为定价计算中的主要开销。另一方面，均匀网格上的分数阶差分权重具有卷积形式，在常系数条件下可以形成 Toeplitz 矩阵。Wang 和 Wang [18]利用这一特点研究分数阶对流扩散方程的快速求解，说明矩阵结构可以用于降低稠密系统的存储与运算成本。

预处理方法通过构造易于求解的近似系统，改善原方程组的迭代收敛性质。对于含 Toeplitz 结构的非对称系统，快速 Fourier 变换可以降低矩阵向量乘法的代价，而预处理则用于减少求解所需的迭代次数。两者相结合，构成空间分数阶定价方程快速求解的基本思路。预处理矩阵既要保留影响收敛的主要信息，又要能够低成本地作用于向量，因此其设计需要兼顾近似程度和计算代价。

Chen 等[19]针对具有状态切换机制的温和空间分数阶模型下的欧式期权定价，提出隐显式预处理直接法。该方法通过时间离散保留独立的 Toeplitz 状态块，利用循环预处理迭代计算辅助向量，再将这些向量用于后续时间层的快速求解。Lei 等[20]研究了同类模型下的美式期权罚方法，针对提前行权约束产生的对角修正构造近似逆预处理器。这两类工作分别体现了固定 Toeplitz 矩阵的重复利用和变化对角信息的结构化处理，也为比较不同预处理构造提供了依据。

本文是一篇面向欧式期权分数阶定价问题的综述性研究，主要贡献在于联系模型离散结构、预处理构造与重复求解需求，归纳相关方法的适用条件和计算特点，并通过统一算例说明固定矩阵下预处理与数据复用的作用，为后续方法选择和改进提供依据。

本文围绕欧式期权分数阶定价问题中的结构化方程组展开讨论。第 2 部分介绍定价模型及差分离散，说明 Toeplitz 结构、状态耦合与对角系数变化的来源；第 3 部分整理循环预处理、预处理直接法和近似逆方法，并从构造方式、理论性质及计算代价等方面进行对比分析；第 4 部分给出温和空间分数阶模型下的算例；第 5 部分总结相关方法的特点，讨论可拓展研究的方向。

2. 分数阶定价模型及结构化方程组

本节从温和空间分数阶模型及其差分离散出发，说明 Toeplitz 结构、状态耦合及对角系数变化的来源，为后续预处理方法的讨论给出相应的矩阵形式。

2.1. 温和空间分数阶模型

设 S 为标的资产价格，T 为到期时间，取对数价格 $x=\log S$ 和剩余期限 $\tau=T-t$。对于 $1<\alpha<2$，左右 Riemann–Liouville 分数阶导数定义为

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}D_x^{\alpha}v(x)&=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_{-\infty}^{x}(x-y)^{1-\alpha}\,v(y)\,\mathrm{d}y,\\ {}_{x}D_{\infty}^{\alpha}v(x)&=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_{x}^{\infty}(y-x)^{1-\alpha}\,v(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3}$$

其中函数应满足相应的光滑性和积分存在条件。依据 Sabzikar 等[9]讨论的温和分数阶算子，并采用将一阶补偿项计入漂移的约定，可写为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_L^{\alpha,\lambda}v&=\mathrm{e}^{-\lambda x}\,{}_{-\infty}^{0}D_x^{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\lambda x}v\right)-\lambda^{\alpha}v,\\ \mathcal{D}_R^{\alpha,\xi}v&=\mathrm{e}^{\xi x}\,{}_{x}^{0}D_{\infty}^{\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\xi x}v\right)-\xi^{\alpha}v, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\lambda,\xi\geq 0$ 为温和参数。指数因子改变积分核在远距离处的衰减，相关一阶补偿项统一计入模型的漂移系数。这里研究的是时间导数为一阶的空间分数阶方程，其非局部性体现为不同价格位置之间的耦合。

设市场具有 J 个状态，风险中性测度下的状态转移生成矩阵为 $Q=\left(q_{sj}\right)$，满足 $q_{sj}\geq 0$ ($j\neq s$)及 $\sum_{j=1}^{J}q_{sj}=0$。对于 $s=1,\cdots,J$，欧式期权价值 $v_s(x,\tau)$ 满足以下具有状态切换机制的温和空间分数阶定价模型

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_s}{\partial\tau}=\mathcal{L}_s v_s-rv_s+\sum_{j=1}^{J}q_{sj}v_j, & (x,\tau)\in\mathbb{R}\times(0,T],\\ v_s(x,0)=\Phi\left(\mathrm{e}^{x}\right), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{5}$$

其中空间算子为

$$\mathcal{L}_s=\beta_s\partial_x+d_{s,L}\mathcal{D}_L^{\alpha_s,\lambda_s}+d_{s,R}\mathcal{D}_R^{\alpha_s,\xi_s}.$$

r 为无风险利率，$d_{s,L},d_{s,R}$ 为非负系数，β_s 为与风险中性条件及算子定义相适应的漂移系数。对于执行价格为 K 的欧式看涨期权，$\Phi(S)=(S-K)^{+}$。Chen 等[19]考虑的参数在每个状态内部相对于空间和时间保持常数，不同状态允许采用不同参数。这个条件使各状态的空间离散矩阵保持 Toeplitz 结构。

实际计算需将无界价格域截断为有限区间 $[a,b]$，并利用远场近似确定区间外的价值。设端点近似为 $g_a(\tau)$ 和 $g_b(\tau)$，可引入边界函数

$$F(x,\tau)=g_a(\tau)+\frac{g_b(\tau)-g_a(\tau)}{\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{a}}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{a}\right),u_s=v_s-F. \tag{6}$$

于是 u_s 在两个端点满足齐次条件，变换产生的已知项进入方程右端。由于 Q 的行和为零，各状态共用的 F 不产生额外的状态耦合项。以下取 $\lambda_s>0$、$\xi_s>1$，使该边界函数在式(3)~(4)下的算子作用有定义，并采用齐次化变量的零外延近似，由此形成有限区间上的结构化离散系统。该近似对应于以边界函数描述区间外价值，所得定价误差仍与计算区间的选取有关。

2.2. 空间离散与 Toeplitz 矩阵

Meerschaert 和 Tadjeran [21]研究了分数阶对流扩散方程的移位 Grünwald 差分，为构造稳定的空间离散提供了基本方法。Chen 和 Deng [22]进一步研究了温和分数阶算子的高阶离散。本文采用 Chen 等[19]欧式期权算法中的一阶空间近似，以说明其矩阵结构。

取 N 个内部网格点 $x_i = a + ih$，其中 $h = (b-a)/(N+1)$。Grünwald 权重满足

$$g_0^{(\alpha)} = 1, g_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \left(1 \frac{\alpha+1}{k}\right) g_{k-1}^{(\alpha)}, k \geq 1. \tag{7}$$

对于式(4)中的左温和分数阶算子 $\mathcal{D}_L^{\alpha,\lambda}$，相应的温和权重为

$$w_k^{(\alpha,\lambda)} = \begin{cases} g_k^{(\alpha)} \mathrm{e}^{-(k-1)\lambda h}, & k \neq 1, \\ -\alpha - \mathrm{e}^{\lambda h}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda h}\right)^{\alpha}, & k = 1. \end{cases} \tag{8}$$

主对角权重的修正与温和算子中的零阶项相对应。在齐次边界及所选外延条件下，移位差分作用于内部未知向量的矩阵为

$$T_{\alpha,\lambda} = \begin{bmatrix} w_1 & w_0 & 0 & \cdots & 0 \\ w_2 & w_1 & w_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & w_2 & w_1 & \ddots & 0 \\ w_{N-1} & \cdots & \ddots & \ddots & w_0 \\ w_N & w_{N-1} & \cdots & w_2 & w_1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

矩阵沿各条对角线的元素相同，因而具有 Toeplitz 结构。右侧算子的矩阵为 $T_{\alpha,\xi}^{\mathsf{T}}$。将漂移项的迎风差分矩阵记为 $K_{s,h}$，则状态 s 的空间离散算子为

$$L_{s,h} = K_{s,h} + \frac{d_{s,L}}{h^{\alpha_s}} T_{\alpha_s,\lambda_s} + \frac{d_{s,R}}{h^{\alpha_s}} T_{\alpha_s,\xi_s}^{\mathsf{T}}. \tag{10}$$

这里，当 $\beta_s \geq 0$ 时，漂移项采用 $\beta_s (u_{i+1} - u_i)/h$；当 $\beta_s < 0$ 时，采用 $\beta_s (u_i - u_{i-1})/h$。常系数条件下 $K_{s,h}$ 为带状 Toeplitz 矩阵，因此 $L_{s,h}$ 仍为 Toeplitz 矩阵。左右跳跃参数及漂移项决定其对称性，一般情况下需按非对称系统处理。在相应光滑性和可积性条件下，上述空间离散具有一阶精度，温和移位 Grünwald 近似的相关误差分析可见 Chen 和 Deng [22]的研究。

2.3. 状态耦合系统与独立 Toeplitz 系统

按状态排列未知量，令 $\boldsymbol{u} = \left(u_1^{\mathsf{T}}, \cdots, u_J^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}$，其中 $u_s \in \mathbb{R}^N$。空间半离散系统可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbb{L}_h \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(\tau), \\ \mathbb{L}_h = \operatorname{diag}\left(L_{1,h}, \cdots, L_{J,h}\right) - rI_{JN} + Q \otimes I_N. \end{cases} \tag{11}$$

设时间步长为 $\Delta\tau = T/M$，时间节点为 $\tau_n = n\Delta\tau$ $(n = 0, \cdots, M)$，记 $\boldsymbol{u}^n \approx \boldsymbol{u}(\tau_n)$、$\boldsymbol{f}^n = \boldsymbol{f}(\tau_n)$。采用向后 Euler 格式，得到

$$A\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^n + \Delta\tau \boldsymbol{f}^{n+1}, A = I_{JN} - \Delta\tau \mathbb{L}_h. \tag{12}$$

矩阵 A 的对角块是移位 Toeplitz 矩阵，非对角块为 $-\Delta\tau q_{sj} I_N$。这类分块结构保留了各状态之间的隐式耦合。在非负扩散系数、相应迎风离散、齐次外部近似及 $r \geq 0$ 等条件下，离散算子的符号和行和性质可用于建立 A 的 M 矩阵性质，为系统可解性与格式稳定性分析提供依据。

为降低状态耦合带来的求解开销，Chen 等[19]对状态转移项进行分裂。令

$$\rho = \min_{1 \leq s \leq J} q_{ss}, R = Q - \rho I_J, H_s = -L_{s,h} + (r - \rho) I_N, \tag{13}$$

并记 $H = \operatorname{diag}(H_1, \cdots, H_J)$。对各状态的空间项作隐式处理，对 R 对应的耦合项作显式处理，得到两步格

式

$$\left(I_{JN}+\Delta\tau H\right)\boldsymbol{u}^{n+1}=\left(I_{JN}-\Delta\tau H\right)\boldsymbol{u}^{n-1}+2\Delta\tau\left(R\otimes I_N\right)\boldsymbol{u}^{n}+2\Delta\tau\boldsymbol{f}^{n}. \tag{14}$$

其左端系数矩阵为

$$B=\operatorname{diag}\left(B_1,\cdots,B_J\right),B_s=I_N+\Delta\tau H_s. \tag{15}$$

式(14)将每个后续时间层的求解分解为 J 个独立的 Toeplitz 系统，状态耦合通过已知右端保留。第一时间层由全隐式格式启动。Chen 等[19]在相应模型和解的正则性假设下分析了该格式的稳定性，并给出 $O\left(\Delta\tau^2+h\right)$ 的误差估计。

式(12)和式(15)反映了两种不同的求解结构：全隐式格式需要处理状态之间的块耦合，隐显式格式则将后续时间层的计算归结为独立状态块的求解。对于参数与网格固定的模型，B_s 在时间推进过程中保持不变，这为预处理矩阵及相关辅助数据的重复利用创造了条件。

2.4. 对角系数变化引起的结构

当模型中的扩散系数随空间位置变化时，离散矩阵中会出现对角矩阵与 Toeplitz 矩阵的乘积。对单个状态，典型形式为

$$\mathcal{A}=I_N-\Delta\tau\left(D_LT_L+D_RT_R\right)+\mathcal{K}, \tag{16}$$

其中 D_L,D_R 保存网格点上的系数，T_L,T_R 已包含分数阶算子的空间步长缩放，$\mathcal{K}$ 表示漂移和反应项对时间步矩阵的贡献。空间系数变化破坏了严格的 Toeplitz 结构，但矩阵向量乘法仍可以通过 Toeplitz 快速乘法与对角乘法完成。若左右系数具有公共可逆对角因子，且其余项与该缩放相容，则可进一步转化为对角加 Toeplitz 结构。

另一类对角修正来自合约约束。Lei 等[20]对美式期权的提前行权条件采用罚方法，并通过半光滑 Newton 迭代求解。由于状态耦合在其半隐式格式中进入已知右端，每个状态的 Newton 矩阵具有形式

$$\mathcal{J}_k=M_0+\eta E_k,\eta=\Delta\tau\mu>0, \tag{17}$$

其中 M_0 为 Toeplitz 矩阵，μ 为罚参数，E_k 为由当前罚项活动集确定的二值对角矩阵。随着外层迭代进行，E_k 会发生变化。虽然欧式期权不含提前行权约束，但这一结构说明，对角项的取值特点及更新方式会直接影响预处理构造。后文将其作为结构相近的扩展问题，与欧式期权中的固定 Toeplitz 系统进行比较。

3. 预处理方法

针对上述结构化方程组，本节介绍循环预处理、预处理迭代与快速直接法的结合，以及对角系数变化下的近似逆构造，并比较其近似方式、理论性质和计算代价。

3.1. 循环预处理

3.1.1. 预处理形式及性质

Toeplitz 矩阵可由第一行和第一列确定，其存储量为 $O(N)$。Chan 和 Jin [23]系统介绍了 Toeplitz 方程组的迭代求解方法，其中利用循环嵌入实现矩阵向量乘法，可将一次乘法的计算量降为 $O(N\log N)$。对于非对称线性系统，Saad 和 Schultz [24]提出的广义极小残量法(GMRES)是一类常用的 Krylov 子空间方法，可与上述快速乘法结合实施。对于 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，右预处理形式为

$$AP^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}=P^{-1}\boldsymbol{y}. \tag{18}$$

预处理的主要计算是施加 P^{-1} 对向量的作用。循环矩阵能够由离散 Fourier 矩阵对角化，即

$$C = F_N^{*}\Lambda F_N, C^{-1}z = F_N^{*}\Lambda^{-1}F_N z, \tag{19}$$

其中 F_N 为单位化 Fourier 矩阵，Λ 为特征值对角阵。当 C 可逆时，预先计算 Λ 后，一次循环求解只需 FFT、逐分量相除和逆 FFT，运算量为 $O(N\log N)$。

Strang [25]通过保留 Toeplitz 矩阵靠近主对角线的部分并作循环延拓，提出了经典循环预处理构造。T. Chan [26]则从矩阵逼近的角度出发，在循环矩阵集合 $\mathcal{C}_N$ 中求解

$$c(T) = \arg\min_{C\in\mathcal{C}_N} \|T - C\|_F. \tag{20}$$

这两类构造均能利用 Fourier 变换快速求解，但分别强调对主要对角线信息的保留和整体 Frobenius 范数意义下的逼近。

Chan 和 Ng[27]系统讨论了 Toeplitz 系统的预处理共轭梯度方法，为循环近似的构造与谱分析提供了基础。Pang 等[28]针对跳扩散期权定价中的 Toeplitz 系统研究循环预处理，并分析相应正规方程的谱性质；Lei 和 Sun [29]则将循环预处理与共轭梯度正规残差方法结合，用于移位 Grünwald 离散形成的分数阶系统。这些研究说明，循环近似可用于不同非局部模型产生的结构化方程组，其收敛分析与所采用的外层迭代方法有关。

针对式(15)，Chen 等[19]采用 Strang 循环块预处理矩阵

$$P_B = \mathrm{diag}\left(s(B_1),\cdots,s(B_J)\right), \tag{21}$$

其中 $s(B_s)$ 表示 B_s 的 Strang 循环近似。各状态块可分别求解，一次预处理作用的成本为 $O(JN\log N)$。利用差分权重及循环矩阵的性质，作者证明了该构造的可逆性，并得到 $\|P_B^{-1}\|_2 \le 1$ 的估计。

循环预处理的理论分析通常将原矩阵与循环近似之间的差分解为小范数部分和低秩部分。在状态数固定、各状态的 $\Delta\tau/h^{\alpha_s}$ 一致有界及相关系数条件下，Chen 等[19]对左预处理矩阵的分析可写为

$$P_B^{-1}B = I_{JN} + E_N + R_N, \|E_N\|_2 \le \varepsilon, \mathrm{rank}(R_N) \le JN_c, \tag{22}$$

其中对给定 $\varepsilon > 0$，N_c 不随充分大的 N 增长。这个分解揭示了预处理后矩阵与单位阵之间的结构关系，为解释迭代加速提供了理论依据。对于非正规系统，GMRES 的残差还受到特征向量及矩阵多项式范数的影响，因此其收敛分析需要在上述结构结论之外考虑非正规性。

3.1.2. 对比分析

从近似方式看，Strang 构造保留原矩阵的主要对角线信息，构造较为直接；T. Chan 构造以整体矩阵误差最小为目标，综合利用不同对角线的信息。式(20)给出的是特定范数下的最优逼近准则，实际迭代效果则还与预处理后矩阵的性质有关。因此，两类循环近似的选择需要结合分数阶权重衰减、漂移强度及左右算子的非对称程度进行分析。

从计算代价看，循环预处理的优势在于构造简单、存储量较低，且原矩阵乘法与预处理作用都能利用 FFT。Chen 等[19]的欧式期权数值结果表明，在所考察的网格加密过程中，未预处理 GMRES 的迭代次数增长较快，而循环预处理后的迭代次数变化较小，整体求解时间也相应下降。这说明，仅降低单次矩阵乘法的成本仍可能受到迭代次数增长的限制，循环近似在控制总计算量方面发挥了作用。

循环预处理对系数矩阵的平移结构依赖较强。对于式(15)的常系数状态块，这种近似与原矩阵较为相容；当系数随空间明显变化时，单个循环矩阵对局部信息的表示能力减弱。此外，全隐式系统中的状态耦合会影响分块预处理的效果。由此可见，循环近似的改进既可以着眼于单个状态块的逼近，也可以结合状态耦合设计分块构造，二者所需的谱分析有所不同。

3.2. 预处理迭代与快速直接法的结合

3.2.1. 方法构造及计算性质

在欧式期权的时间推进中，同一个系数矩阵通常对应多个右端项。基于辅助系统的 Toeplitz 逆表示是结构化快速求解的一类基本工具，Chan 和 Jin [23]对相关方法作了介绍。Chen 等[19]利用这一特点，将循环预处理迭代用于 Toeplitz 逆表示的准备阶段。对于每个状态块 B_s，先求解两个辅助系统

$$\begin{cases} B_s \boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{e}_1, \\ B_s \boldsymbol{b}_s = \boldsymbol{e}_N. \end{cases} \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_N$ 分别为单位阵的首列和末列。两个系统可使用相同的 Strang 循环预处理器加速 GMRES，其解分别给出逆矩阵的首列和末列。

为说明辅助向量的用途，暂省略状态下标。记 $C(\boldsymbol{z})$ 和 $S(\boldsymbol{z})$ 分别为以 $\boldsymbol{z}$ 为第一列的循环矩阵和斜循环矩阵，后者在元素循环越过边界时改变符号。令 $\boldsymbol{p} = (b_N, b_1, \cdots, b_{N-1})^{\mathsf{T}}$，$\boldsymbol{q} = (-b_N, b_1, \cdots, b_{N-1})^{\mathsf{T}}$，则在 $a_1 \neq 0$ 时，逆矩阵可表示为

$$B_s^{-1} = \frac{1}{2a_1}\left[S(\boldsymbol{a}) C(\boldsymbol{p}) - S(\boldsymbol{q}) C(\boldsymbol{a}) \right]. \tag{24}$$

Chen 等[19]证明了其离散矩阵满足上述表示所需的可逆性及首分量非零条件。由于循环与斜循环矩阵的作用均可通过 FFT 及相位变换完成，式(24)将逆矩阵对向量的作用转化为固定次数的快速变换，无需显式形成稠密逆矩阵。

当模型参数、空间网格和时间步固定时，辅助向量及相关频域数据可以在后续时间层重复利用。若状态转移矩阵稠密，则一个后续时间层的主要计算量为

$$O\left(JN \log N + J^2 N \right). \tag{25}$$

其中第一项来自各状态块的结构化运算，第二项来自状态耦合右端的计算。总计算量还包括全隐式启动和辅助系统的求解，准备阶段的代价由预处理迭代的实际收敛情况决定。

3.2.2. 迭代法与直接法的效率比较

逐时间层的循环预处理 GMRES 与上述预处理直接法利用了相同的 Toeplitz 结构，但预处理迭代在两者中的作用不同。前者在每个时间层求解新的右端项，后者先通过少量辅助系统获得逆表示所需的数据，再用于整个时间推进过程。因此，预处理直接法的效率与矩阵的重复使用次数密切相关。

Chen 等[19]的数值比较表明，在固定状态块的欧式期权算例中，预处理直接法进一步减少了重复时间推进的计算耗时。其优势来自辅助数据的复用：当时间层数增加时，准备成本被更多次求解分摊，后续计算不再逐层承担完整的 Krylov 迭代开销。这一结果说明，对固定矩阵和多个右端项的问题，预处理方法的设计可以同时考虑单次求解与整体时间推进两个层面。

从适用范围看，循环预处理 GMRES 的实施较为灵活，右端项和矩阵发生变化时仍可按新的系统组织计算；结构化直接法则更依赖固定矩阵。如果模型参数随时间改变，或参数校准过程中需要频繁更新 B_s，辅助向量可能需要重新计算，其复用优势随之减弱。此外，辅助系统的求解误差会影响后续逆作用的精度，准备阶段的容差应与离散误差和目标定价精度相协调。

两类方法的比较表明，预处理的效果应结合完整的求解过程判断。较准确的准备计算可以降低后续重复求解的成本，而较简单的逐层迭代具有更新方便的特点。对于欧式期权问题，时间层数、矩阵变化频率及辅助数据的存储成本共同决定了二者的适用性。

3.3. 对角系数变化下的近似逆预处理

3.3.1. 近似逆预处理的构造及性质

对角系数变化使单个循环矩阵难以充分表示原系统的局部差异。近似逆方法通过组合若干容易求逆的结构化矩阵，将对角信息直接纳入预处理作用。Pan 等[30]针对空间分数阶扩散离散中的对角乘 Toeplitz 系统，提出利用局部系数构造矩阵并逐行组合其近似逆的思路，再借助循环近似和 FFT 降低运算成本。这种构造能够保留不同位置的系数信息，为式(16)一类系统提供了参考。

对具有对角加 Toeplitz 结构的系统

$$\mathcal{A} = D + T, \tag{26}$$

Zeng 等[31]在 D 为非负对角矩阵、T 为对称正定 Toeplitz 矩阵的条件下，采用 τ 矩阵逼近与分段插值构造近似逆。这里的 τ 矩阵是可由离散正弦变换对角化的一类矩阵。用 C_j 表示由参考系数构造的可快速求解矩阵，Φ_j 表示插值的对角权重，其作用机制可概括为

$$\mathcal{P}^{-1}z = \sum_{j=1}^{\ell} \Phi_j C_j^{-1} z. \tag{27}$$

通过少量参考求解及逐分量组合，一次作用的主要成本为 $O(\ell N \log N)$。该构造将系数近似精度与插值规模联系起来，适用于具有上述对称正定结构的系统。

对于式(17)的二值对角修正，Lei 等[20]利用活动集信息构造了更具体的组合。由

$$\mathcal{J}_k = (I - E_k) M_0 + E_k (M_0 + \eta I), \tag{28}$$

可形成近似逆预处理作用

$$\mathcal{P}_k^{-1} = (I - E_k)\left[s(M_0)\right]^{-1} + E_k\left[s(M_0 + \eta I)\right]^{-1}. \tag{29}$$

式(29)根据当前节点是否属于罚项活动集，选取两个循环求解结果中的对应分量。固定模型与罚参数时，两个循环矩阵可以重复使用，活动集变化只需更新 E_k。因此，一次预处理作用仍能以 $O(N \log N)$ 的主要成本完成。

Lei 等[20]对右预处理矩阵 $\mathcal{J}_k \mathcal{P}_k^{-1}$ 进行了小范数加低秩分析。其中的秩估计含有 $\min\{\operatorname{rank}(E_k), N - \operatorname{rank}(E_k)\}$，表明活动集规模会影响理论界。相关性质还与时间和空间步长的比例、罚参数尺度有关。这些条件刻画了二值对角信息在预处理分析中的作用。

3.3.2. 近似逆方法的特点与适用性

从构造对象看，循环预处理直接逼近系数矩阵，而上述近似逆方法着重逼近逆矩阵对向量的作用。Pan 等[30]通过局部系数和逐行组合处理空间变化，Zeng 等[31]结合正弦变换与插值减少参考求解的数量，Lei 等[20]则利用二值对角结构将组合简化为两类循环求解。它们的共同特点是保留对角信息，并将主要计算归结为易于实施的结构化运算。

正弦变换近似在期权定价中也有直接应用。Lei 等[32]针对 Merton 和 Kou 跳扩散模型，采用 τ 预处理加速 Crank-Nicolson 离散形成的 Toeplitz 系统求解。该方法直接逼近系数矩阵，与 Zeng 等[31]通过插值组合近似逆的构造不同，体现了正弦变换在不同预处理形式中的应用。

从计算量看，保留更多局部信息有助于提高近似程度，也会增加参考矩阵或插值节点的数量。插值构造的效果取决于系数变化与参考求解的逼近质量；二值活动集构造只需两类基础矩阵，但其特殊形式依赖罚项对角元的取值特点。因此，近似逆方法的复杂程度应与对角系数的实际结构相适应。对一般空间变系数系统，需要同时考虑局部变化的描述能力和每次预处理作用的成本。

Lei 等[20]的美式期权数值结果显示，保留活动集信息的近似逆预处理能够减少内层迭代的计算开销。这一结果说明，变化的对角项可能包含影响收敛的重要信息，利用其取值结构有助于改进预处理。对于欧式期权，相关思路可用于研究空间变系数产生的局部差异；具体构造则应由系数分布确定，并重新分析其与漂移、温和参数及状态耦合的关系。

对于式(26)，还可以通过矩阵分裂保留对角部分。Bai 等[33]提出对角与 Toeplitz 分裂(DTS)方法，并由此构造对角与循环分裂预处理器。其思路是将对角求解与 Toeplitz 求解分配到不同步骤，再用快速结构近似后者。与逐行组合近似逆相比，分裂方法的构造较集中，但引入了影响收敛的迭代参数。将 Toeplitz 因子替换为循环近似后，还需在分析中计入替代误差。

由此可见，对角信息的处理可以采用局部组合、插值压缩或矩阵分裂等方式。对于系数变化较弱的系统，简单近似可能已能取得较好的成本收益；对于局部变化明显的系统，保留空间分布或活动集信息更有研究价值。将这些方法用于欧式期权定价时，首先需要确定实际得到的是对角乘 Toeplitz、对角加 Toeplitz 还是含状态耦合的分块结构，再选择与之相容的预处理形式。

对上述归纳差别，表 1 从计算代价、结构条件和更新需求比较三类方法。循环与预处理直接法采用 Chen 等[19]讨论的构造，近似逆一栏对应 Lei 等[20]及 Zeng 等[31]所用的快速变换组合。

Table 1. Main features of three structured solution approaches
表 1. 三类结构化求解方法的主要特点

比较维度	循环预处理 GMRES	预处理直接法	组合近似逆预处理
准备成本	$O(N\log N)$	两个辅助系统迭代及 $O(N\log N)$ 变换	$O(\ell N\log N)$，另含参考节点选择
单次作用或求解成本	矩阵与预处理作用 $O(N\log N)$	准备后每个右端求解 $O(N\log N)$	预处理作用 $O(\ell N\log N)$
结构化数据存储	$O(N)$	$O(N)$	$O(\ell N)$
主要结构条件	Toeplitz 结构明显；可逆	固定可逆 Toeplitz 矩阵，且逆矩阵首列首分量非零	二值对角修正，或满足对称正定条件的插值构造
参数变化与更新	重建成本较低；参数变化仍可能增加迭代次数	矩阵改变通常需重算辅助解；精度受辅助误差影响	模型及罚参数固定时，二值活动集更新只改对角选择；一般系数变化可能需调整参考节点
典型适用情形	常系数、右端或参数需要更新	固定矩阵、多时间层或重复右端	空间变系数、变化活动集等对角信息显著的问题

表中 ℓ 为参考求解数，式(29)对应 $\ell=2$。GMRES 还需存储 Krylov 基；若重启长度为 m，其工作存储为 $O(mN)$，一次迭代的正交化成本至多为 $O(mN)$。预处理直接法的准备阶段同样包含这部分开销，而后续逆作用无需逐层构造 Krylov 基。表中的计算阶数并不等价于参数无关的收敛保证；非对称性、对角占优程度及步长比例仍会影响预处理质量。

4. 数值实验

本节设置一个常系数单状态基准，比较循环预处理对逐层迭代的影响，并考察固定 Toeplitz 矩阵的逆表示复用效果。选取式(5)在 $J=1$ 时的欧式看跌模型，收益为 $\left(K-\mathrm{e}^{x}\right)^{+}$，取 $K=T=1$、$r=0.03$、$\alpha=1.5$、$d_L=d_R=0.1$、$\lambda=3$、$\xi=4$。按式(4)的算子约定，令 $\beta=r-d_L\left[(\lambda+1)^{\alpha}-\lambda^{\alpha}\right]-d_R\left[(\xi-1)^{\alpha}-\xi^{\alpha}\right]=0.03$，

从而满足 $\mathcal{L}e^{x}=re^{x}$ 的风险中性条件。上述参数为检验求解方法而设置，不对应市场数据校准。

取 $x\in[-4,4]$、$M=256$，空间离散与时间推进分别采用第 2.2 节的移位差分和第 2.3 节的两步格式，并由向后 Euler 格式启动。对非局部外部值，左侧采用看跌远场 $Ke^{-r\tau}-e^{x}$，右侧取零，将相应已知尾项计入右端。式(6)仅用于端点齐次化，本算例保留上述外部信息，不采用齐次化变量的零外延；这一处理保持内部系数矩阵的 Toeplitz 结构。尾项按 Grünwald 权重累加，其遗漏部分的离散算子系数上界小于 10^{-22}。

比较无预处理 GMRES、Strang 循环右预处理 GMRES 和式(24)的结构化直接法，分别记为 G、P 和 D。三者均采用 FFT 矩阵向量乘法，GMRES 重启长度为 50、初值为零，相对残差阈值为 10^{-10}；D 方法的两个辅助系统采用 P 方法求解，阈值为 10^{-13}，随后复用循环与斜循环逆表示。实验使用 MATLAB R2025a，在 Intel Core i9-14900HX 上以单计算线程运行。表 2 中，$\bar{k}$ 为每个时间层的平均迭代次数，t 为包含方法准备与全部时间推进的运行时间，取预热后三次重复运行的中位数；公共离散矩阵组装及结果检查不计时。

Table 2. Benchmark results for the three solvers
表 2. 三种求解方法的基准结果

N	$\bar{k}_{\mathrm{G}}$	$\bar{k}_{\mathrm{P}}$	t_{G} /s	t_{P} /s	t_{D} /s	$v(0,T)$ (D)
255	7.02	5.00	0.0483	0.0547	0.0118	0.10315904
511	10.00	5.00	0.1277	0.1143	0.0323	0.09873137
1023	15.04	6.00	0.1977	0.1325	0.0394	0.09655326
2047	25.02	6.00	0.8495	0.4329	0.1138	0.09547242

各方法在全部时间层的实际相对残差均小于 10^{-10}；同一网格下，两种迭代法所得最终价格向量与 D 方法之差的无穷范数均小于 3.2×10^{-9}。在 $N=31$ 的独立检查中，FFT 乘法及结构化逆作用相对于稠密运算的相对误差均小于 4×10^{-16}，三种方法的完整时间推进与稠密直接求解之差均小于 2.8×10^{-10}。这些结果用于体现代数求解的一致性，不代表连续模型的定价误差。另取 $N=4095$、$M=1024$，得到 $v(0,T)=0.09493374$；保持空间步长不变并将区间扩大为 $[-6,6]$，该价格变化约 1.3×10^{-12}。表中价格随网格加密仍有变化，表明空间离散误差与线性系统残差应分别评价。

表 2 显示，随着网格加密，无预处理迭代次数增加，而循环预处理的平均迭代次数维持在 5 至 6 次，一定程度说明该预处理构造的谱性质良好。最小网格上，预处理的额外运算尚未转化为时间收益；较大网格上，其迭代次数优势逐渐体现。

5. 总结与展望

预处理方法为欧式期权空间分数阶定价方程的快速求解提供了重要途径。常系数模型在均匀网格上离散后具有 Toeplitz 结构，状态切换引入块耦合，而适当的隐显式处理能够将后续时间层组织为独立状态块。围绕这些结构，循环预处理利用可快速求解的循环矩阵改善 Krylov 迭代；预处理直接法进一步将迭代计算用于辅助数据的准备，并在时间推进中复用；近似逆与分裂方法则为处理对角系数变化提供了不同途径。

本文作为针对上述定价离散系统的综述，将模型结构、预处理近似与重复求解联系起来，形成了方法选择的比较依据。通过对比可以看出，各类方法的差别主要在于近似对象、保留的信息及重复利用的方式。循环近似的构造简便，适合平移结构较强的系统；局部近似逆能够保留更多系数信息，其计算量

与组合规模有关；结构化直接法通过复用辅助数据降低重复求解成本，对矩阵保持不变的条件较为敏感。因而，预处理研究的关键在于使近似程度与整体计算代价相适应，并将单次迭代的改进与完整定价过程的效率联系起来。

对于进一步的方法改进，空间变系数下的结构保持值得关注。当不同位置的系数差异较大时，可考虑利用局部参考矩阵或分段插值保留系数变化，同时控制参考求解数量。相关分析需要结合漂移项、左右温和参数及状态耦合，研究近似误差对预处理后矩阵性质的影响。在非对称情形下，谱分析还需与非正规性及实际残差衰减相联系，以更充分地解释迭代行为。

参数变化时的预处理更新也是一个可继续研究的方向。参数校准或时变模型会产生一系列相近的离散系统，完全重建辅助数据可能增加计算成本。可考虑依据矩阵变化程度复用已有预处理数据，或通过局部修正更新近似逆。此类策略的有效性取决于更新误差及重建成本，需要结合具体模型进行分析和数值比较。实际参数校准中，小幅参数变化也可能改变温和核的衰减和离散矩阵的尺度；因此，复用策略应以新系统的真实残差和总耗时为依据，比较继续复用、局部更新与完全重建的代价。第 4 部分固定参数算例所体现的复用收益，尚需在这类变化矩阵序列中进一步检验。

此外，期权收益在执行价格处通常不光滑，有限区间截断也会影响定价精度。后续研究可将预处理容差与离散误差相协调，使线性系统的求解精度适应实际定价需求。执行价格附近的局部加密有利于分辨收益折点，却可能破坏均匀网格形成的 Toeplitz 结构；扩大截断区间则会在保持空间步长时增加未知量。这要求分别检查网格与区间误差，再确定线性求解容差，避免将残差很小误认为价格已经充分准确。对方法效率的评价，应在可比的价格精度下综合考虑准备阶段、时间推进及矩阵更新的成本。围绕矩阵结构、近似质量和重复求解特点开展研究，有助于进一步提高欧式期权分数阶定价问题中预处理迭代法的效率与适用性。

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654. https://doi.org/10.1086/260062

[2] Merton, R.C. (1973) Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141-183. https://doi.org/10.2307/3003143

[3] Merton, R.C. (1976) Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, **3**, 125-144. https://doi.org/10.1016/0304-405x(76)90022-2

[4] Kou, S.G. (2002) A Jump-Diffusion Model for Option Pricing. *Management Science*, **48**, 1086-1101. https://doi.org/10.1287/mnsc.48.8.1086.166

[5] Madan, D.B., Carr, P.P. and Chang, E.C. (1998) The Variance Gamma Process and Option Pricing. *Review of Finance*, **2**, 79-105. https://doi.org/10.1023/a:1009703431535

[6] Carr, P., Geman, H., Madan, D.B. and Yor, M. (2002) The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation. *The Journal of Business*, **75**, 305-333. https://doi.org/10.1086/338705

[7] Cont, R. and Tankov, P. (2004) Financial Modelling with Jump Processes. Chapman & Hall/CRC.

[8] Cartea, Á. and del-Castillo-Negrete, D. (2007) Fractional Diffusion Models of Option Prices in Markets with Jumps. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **374**, 749-763. https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.08.071

[9] Sabzikar, F., Meerschaert, M.M. and Chen, J. (2015) Tempered Fractional Calculus. *Journal of Computational Physics*, **293**, 14-28. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.04.024

[10] Boyle, P.P. (1977) Options: A Monte Carlo Approach. *Journal of Financial Economics*, **4**, 323-338. https://doi.org/10.1016/0304-405x(77)90005-8

[11] Cox, J.C., Ross, S.A. and Rubinstein, M. (1979) Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, **7**, 229-263. https://doi.org/10.1016/0304-405x(79)90015-1

[12] Carr, P. and Madan, D. (1999) Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *The Journal of Computational Finance*, **2**, 61-73. https://doi.org/10.21314/jcf.1999.043

[13] Fang, F. and Oosterlee, C.W. (2008) A Novel Pricing Method for European Options Based on Fourier-Cosine Series Expansions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**, 826-848. https://doi.org/10.1137/080718061

[14] Almendral, A. and Oosterlee, C.W. (2005) Numerical Valuation of Options with Jumps in the Underlying. *Applied Numerical Mathematics*, **53**, 1-18. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2004.08.037

[15] Cont, R. and Voltchkova, E. (2005) A Finite Difference Scheme for Option Pricing in Jump Diffusion and Exponential Lévy Models. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **43**, 1596-1626. https://doi.org/10.1137/s0036142903436186

[16] Matache, A., Schwab, C. and Wihler, T.P. (2005) Fast Numerical Solution of Parabolic Integrodifferential Equations with Applications in Finance. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **27**, 369-393. https://doi.org/10.1137/030602617

[17] Elliott, R.J. and Osakwe, C.U. (2006) Option Pricing for Pure Jump Processes with Markov Switching Compensators. *Finance and Stochastics*, **10**, 250-275. https://doi.org/10.1007/s00780-006-0004-6

[18] Wang, K. and Wang, H. (2011) A Fast Characteristic Finite Difference Method for Fractional Advection-Diffusion Equations. *Advances in Water Resources*, **34**, 810-816. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2010.11.003

[19] Chen, X., Ding, D., Lei, S. and Wang, W. (2021) An Implicit-Explicit Preconditioned Direct Method for Pricing Options under Regime-Switching Tempered Fractional Partial Differential Models. *Numerical Algorithms*, **87**, 939-965. https://doi.org/10.1007/s11075-020-00994-7

[20] Lei, S., Wang, W., Chen, X. and Ding, D. (2018) A Fast Preconditioned Penalty Method for American Options Pricing under Regime-Switching Tempered Fractional Diffusion Models. *Journal of Scientific Computing*, **75**, 1633-1655. https://doi.org/10.1007/s10915-017-0602-9

[21] Meerschaert, M.M. and Tadjeran, C. (2004) Finite Difference Approximations for Fractional Advection-Dispersion Flow Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **172**, 65-77. https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.01.033

[22] Chen, M. and Deng, W. (2015) High Order Algorithms for the Fractional Substantial Diffusion Equation with Truncated Lévy Flights. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **37**, A890-A917. https://doi.org/10.1137/14097207x

[23] Chan, R.H. and Jin, X.-Q. (2007) An Introduction to Iterative Toeplitz Solvers. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9780898718850

[24] Saad, Y. and Schultz, M.H. (1986) GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **7**, 856-869. https://doi.org/10.1137/0907058

[25] Strang, G. (1986) A Proposal for Toeplitz Matrix Calculations. *Studies in Applied Mathematics*, **74**, 171-176. https://doi.org/10.1002/sapm1986742171

[26] Chan, T.F. (1988) An Optimal Circulant Preconditioner for Toeplitz Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **9**, 766-771. https://doi.org/10.1137/0909051

[27] Chan, R.H. and Ng, M.K. (1996) Conjugate Gradient Methods for Toeplitz Systems. *SIAM Review*, **38**, 427-482. https://doi.org/10.1137/s0036144594276474

[28] Pang, H.-K., Zhang, Y.-Y., Vong, S.-W. and Jin, X.-Q. (2011) Circulant Preconditioners for Pricing Options. *Linear Algebra and Its Applications*, **434**, 2325-2342. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.03.034

[29] Lei, S. and Sun, H. (2013) A Circulant Preconditioner for Fractional Diffusion Equations. *Journal of Computational Physics*, **242**, 715-725. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.02.025

[30] Pan, J., Ke, R., Ng, M.K. and Sun, H. (2014) Preconditioning Techniques for Diagonal-Times-Toeplitz Matrices in Fractional Diffusion Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **36**, A2698-A2719. https://doi.org/10.1137/130931795

[31] Zeng, M., Yang, J. and Zhang, G. (2022) On τ Matrix-Based Approximate Inverse Preconditioning Technique for Diagonal-plus-Toeplitz Linear Systems from Spatial Fractional Diffusion Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **407**, Article ID: 114088. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114088

[32] Lei, S., Wu, S., Chou, L. and Chen, X. (2026) A τ Preconditioner for Options Pricing Problem under Jump-Diffusion Models. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **33**, e70057. https://doi.org/10.1002/nla.70057

[33] Bai, Z.-Z., Lu, K.-Y. and Pan, J.-Y. (2017) Diagonal and Toeplitz Splitting Iteration Methods for Diagonal-plus-Toeplitz Linear Systems from Spatial Fractional Diffusion Equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **24**, e2093. https://doi.org/10.1002/nla.2093