Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(11), 64-71
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.1611235

Hans汉斯

加权Bergman空间上一类调和多项式符号Toeplitz算子的亚正规性

刘宏伟，李宇航

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2026年10月13日；录用日期：2026年11月6日；发布日期：2026年11月16日

摘　要

本文针对加权Bergman空间 A_α^2 上具有三项多项式符号的Toeplitz算子，讨论该参数模型下此类Toeplitz算子的亚正规性必要条件及参数模长为1时的正规性。通过多项式测试函数和Hankel算子的渐近分析，导出一个3 × 3 Hermitian矩阵半正定的必要条件。本文给出对角及交叉项的必要约束，并讨论这些约束与边界导数平方差之间的关系。作为应用，证明了当参数模长为1且算子亚正规时，该算子为正规算子。

关键词

加权Bergman空间，Toeplitz算子，亚正规性，Hankel算子，半正定矩阵

Hyponormality of Toeplitz Operators with a Class of Harmonic Polynomial Symbols on Weighted Bergman Spaces

Hongwei Liu, Yuhang Li

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: October 13, 2026; accepted: November 6, 2026; published: November 16, 2026

Abstract

This paper studies Toeplitz operators with three-term polynomial symbols on the weighted Bergman space A_α^2, focusing on necessary conditions for hyponormality under the given parameter model and on normality when the parameter has modulus one. Using polynomial test functions and asymptotic analysis of Hankel operators, we derive a necessary condition expressed as the positive

文章引用: 刘宏伟, 李宇航. 加权 Bergman 空间上一类调和多项式符号 Toeplitz 算子的亚正规性[J]. 理论数学, 2026, 16(11): 64-71. DOI: 10.12677/pm.2026.1611235

semidefiniteness of a 3 × 3 Hermitian matrix. We obtain necessary constraints involving diagonal and cross terms and discuss their relation to the difference between the squared moduli of the boundary derivatives. As an application, we prove that if the parameter has modulus one and the operator is hyponormal, then the operator is normal.

Keywords

Weighted Bergman Space, Toeplitz Operator, Hyponormality, Hankel Operator, Positive Semi-Definite Matrix

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

设 $\mathbb{D}$ 为复平面上的开单位圆盘，A_α^2 为其上的加权 Bergman 空间，其中 $\alpha > -1$。若有界线性算子 T 满足 $T^*T - TT^* \geq 0$，则称 T 为亚正规算子。Cowen 给出了 Hardy 空间上 Toeplitz 算子亚正规性的等价刻画，其证明使用了 Sarason 的扩张定理[1]。在加权 Bergman 空间上，单项式范数依赖于权重参数，相关判定需要结合该空间的投影与内积结构进行分析。Lu 和 Shi 研究了多项式符号 Toeplitz 算子的亚正规性，在加权 Bergman 空间上给出了涉及对角项及交叉项的亚正规性必要条件，并将相关计算推广到一般有限项多项式符号。对于普通 Bergman 空间上的两项多项式模型，他们在反解析部分的最高次系数模长不小于解析部分对应系数模长的假设下，证明了单位圆上的导数模长不等式是亚正规性的充要条件[2]。对于调和多项式符号，可利用 Hankel 算子的内积计算研究相应 Toeplitz 算子的亚正规性。本文考察解析部分与反解析部分的三个对应系数分别由同一复参数的三个幂次联系的调和多项式符号。选择这一模型，一方面是为了减少独立参数，使系数模长与相位对亚正规性的影响能够在同一参数体系下进行分析；另一方面，不同幂次的绑定方式保留了各项之间的交叉作用，使模型在一般情形下不退化为解析部分与反解析部分互为常数倍的情形。三项结构还允许比较次数成等差数列与非等差数列时交叉项的不同组合方式，从而考察次数关系对必要条件的影响。Lu 和 Shi 已针对一般有限项多项式符号建立了亚正规性的必要条件，其中包含对相同次数差所对应交叉项的合并处理[2]。因此，本文的研究重点是在其内积公式与渐近关系的基础上，对上述参数绑定模型中的系数约束作进一步的具体分析。通过选取单项式及三项多项式作为测试函数，本文将相关约束表示为对角项不等式和三阶极限矩阵的半正定性条件，并利用该矩阵的主子式刻画交叉项之间的联合约束。在此基础上，分析极限矩阵的系数与单位圆上导数模长平方差的对应关系，构造反例说明所得必要条件并不充分，并证明参数模长为 1 时，该模型中的亚正规算子必为正规算子。

2. 预备知识及引理

2.1. 加权 Bergman 空间的定义与内积结构

设 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 为复平面上的开单位圆盘，且 $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ 为其边界。对于实参数 $\alpha > -1$，我们在 $\mathbb{D}$ 上定义正规化的加权面积测度：

$$\mathrm{d}A_\alpha(z) = (\alpha+1)\left(1-|z|^2\right)^\alpha \mathrm{d}A(z), \tag{2.1}$$

其中 $\mathrm{d}A(z)=\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为正规化的 Lebesgue 面积测度。加权 Bergman 空间定义为[3]：

$$A_\alpha^2=\left\{h:h\text{ 在 }\mathbb{D}\text{ 上解析，且}\int_{\mathbb{D}}|h(z)|^2\,\mathrm{d}A_\alpha(z)<\infty\right\},\tag{2.2}$$

在 A_α^2 中，任意两个解析函数 f,g 之间的内积定义为：

$$\langle f,g\rangle_\alpha=\int_{\mathbb{D}}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}A_\alpha(z),\tag{2.3}$$

其诱导的范数记为 $\|f\|_\alpha=\sqrt{\langle f,f\rangle_\alpha}$。单项式序列 $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ 构成了 A_α^2 的一组正交基[3]。记 $\gamma_n=\|z^n\|_\alpha$，由极坐标积分可得：

$$\gamma_n^2=\frac{n!\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)},\quad n=0,1,2,\cdots.\tag{2.4}$$

其中，Γ 表示 Gamma 函数。

2.2. Toeplitz 算子与 Hankel 算子

设 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A_\alpha)$ 为由平方可积的可测函数构成的Hilbert空间，则 A_α^2 是其闭子空间。记 P 为从 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A_\alpha)$ 到 A_α^2 的正交投影，即 Bergman 投影。

对于有界可测符号函数 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D})$，作用在 A_α^2 上的 Toeplitz 算子 T_φ 与 Hankel 算子分别定义为[3]：

$$T_\varphi:A_\alpha^2\to A_\alpha^2,T_\varphi(h)=P(\varphi h),\tag{2.5}$$

$$H_\varphi:A_\alpha^2\to L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A_\alpha)\ominus A_\alpha^2,H_\varphi(h)=(I-P)(\varphi h),\tag{2.6}$$

其中，I 为 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A_\alpha)$ 上的恒等算子，$L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A_\alpha)\ominus A_\alpha^2$ 表示 A_α^2 在该 Hilbert 空间中的正交补。

记 $H^\infty(\mathbb{D})$ 为单位圆盘上的有界解析函数空间。当 $\varphi=f+\overline{g}$，其中 $f,g\in H^\infty(\mathbb{D})$ 时，由正交投影的性质可得自换位子恒等式[2]：

$$\left[T_\varphi^*,T_\varphi\right]=T_\varphi^*T_\varphi-T_\varphi T_\varphi^*=H_{\bar f}^*H_{\bar f}-H_{\bar g}^*H_{\bar g}.\tag{2.7}$$

2.3. 单项式 Hankel 算子的内积与渐近关系

下面引理由文献[2]可得。

引理 2.1 [2]设 $\alpha>-1$，m_1,m_2 为正整数，p,q 为非负整数，并记 $\gamma_j=\|z^j\|_\alpha$，则有

(1) 当 $p-m_2\neq q-m_1$ 时，

$$\left\langle H_{\overline{z^{m_1}}}^*H_{\overline{z^{m_2}}}z^p,z^q\right\rangle_\alpha=0.\tag{2.8}$$

(2) 对于任意正整数 r，

$$\left\langle H_{\overline{z^r}}^*H_{\overline{z^r}}z^p,z^p\right\rangle_\alpha=\left\|H_{\overline{z^r}}z^p\right\|_\alpha^2=\begin{cases}\gamma_{p+r}^2, & 0\le p<r,\\ \gamma_{p+r}^2-\dfrac{\gamma_p^4}{\gamma_{p-r}^2}, & p\ge r.\end{cases}\tag{2.9}$$

(3) 设 n,m,k 为满足 $0<n<m<k$ 的正整数，则：

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\left\|H_{\overline{z^m}}z^{p+m-n}\right\|_\alpha^2}{\left\|H_{\overline{z^k}}z^{p+k-n}\right\|_\alpha^2}=\frac{m^2}{k^2}.\tag{2.10}$$

(4) 在(3)的次数假设下，当非负整数 p 趋于无穷时，有：

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\left\langle H^{*}_{z^{m}}H_{\overline{z}^{n}}z^{p},z^{p+m-n}\right\rangle_{\alpha}}{\left\|H_{\overline{z}^{k}}z^{p+k-n}\right\|_{\alpha}^{2}}=\frac{mn}{k^{2}}. \tag{2.11}$$

3. 三项多项式参数模型的亚正规性必要条件

本节讨论解析部分与反解析部分分别由至多三个单项式构成的参数模型。设：

$$f(z)=a_{1}z^{n}+a_{2}z^{m}+a_{3}z^{k}, \tag{3.1}$$

$$g(z)=a_{1}\lambda z^{n}+a_{2}\lambda^{2}z^{m}+a_{3}\lambda^{3}z^{k}, \tag{3.2}$$

其中 n,m,k 为满足 $0<n<m<k$ 的正整数，$a_{1},a_{2},a_{3},\lambda\in\mathbb{C}$。考察调和符号 $f+\overline{g}$ 对应的 Toeplitz 算子。

由亚正规性的定义及自换位子恒等式可知，$T_{f+\overline{g}}$ 是亚正规算子，当且仅当：

$$\left\langle\left(H^{*}_{\overline{f}}H_{\overline{f}}-H^{*}_{\overline{g}}H_{\overline{g}}\right)h,h\right\rangle_{\alpha}\geq 0,\quad\forall h\in A^{2}_{\alpha}, \tag{3.3}$$

为统一表示各项，分别用下列指标记录单项式次数与对应系数中的参数幂次：$(m_{1},m_{2},m_{3})=(n,m,k)$，$(l_{1},l_{2},l_{3})=(1,2,3)$。

将符号代入自换位子恒等式并展开，得到：

$$H^{*}_{\overline{f}}H_{\overline{f}}-H^{*}_{\overline{g}}H_{\overline{g}}=\sum_{i=1}^{3}|a_{i}|^{2}\left(1-|\lambda|^{2l_{i}}\right)H^{*}_{\overline{z}^{m_{i}}}H_{\overline{z}^{m_{i}}}+\sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i\neq j}}a_{i}\overline{a_{j}}\left(1-\lambda^{l_{i}}\overline{\lambda}^{l_{j}}\right)H^{*}_{\overline{z}^{m_{i}}}H_{\overline{z}^{m_{j}}}. \tag{3.4}$$

下面分别采用单项式与三项多项式作为测试函数。

3.1. 对角线必要条件的推导

假设 $T_{f+\overline{g}}$ 是亚正规算子。选取单项式 $h(z)=z^{p}$ 作为测试函数，其中 p 为非负整数。由引理 2.1 (1)，当 $i\neq j$ 时，两侧测试次数相同而符号次数不同，相应交叉项的内积为零。因此，由(3.3)得到：

$$\left\langle\left(H^{*}_{\overline{f}}H_{\overline{f}}-H^{*}_{\overline{g}}H_{\overline{g}}\right)z^{p},z^{p}\right\rangle_{\alpha}=\sum_{i=1}^{3}|a_{i}|^{2}\left(1-|\lambda|^{2l_{i}}\right)\left\|H_{\overline{z}^{m_{i}}}z^{p}\right\|_{\alpha}^{2}\geq 0. \tag{3.5}$$

若 a_{1},a_{2},a_{3} 不全为零，取 $p=0$。当 $|\lambda|>1$ 时，上式各非零项均为负，与其非负性矛盾。因此，算子亚正规的必要条件为 $|\lambda|\leq 1$。

3.2. 交叉项与极限矩阵必要条件

单项式测试函数给出的条件仅涉及对角项。为考察不同次数之间的交叉项，选取如下多项式测试函数序列：

$$h_{p}(z)=d_{1}z^{p}+d_{2}z^{p+m-n}+d_{3}z^{p+k-n}, \tag{3.6}$$

其中 $d_{1},d_{2},d_{3}\in\mathbb{C}$，$p$ 为非负整数。记：$S=H^{*}_{\overline{f}}H_{\overline{f}}-H^{*}_{\overline{g}}H_{\overline{g}}$。

为统一表示测试函数中各单项式的次数，令 $(t_{1},t_{2},t_{3})=(0,m-n,k-n)$，其中 t_{i} 表示第 i 项的次数相对于基准次数 p 的偏移量。

定义矩阵 $\boldsymbol{A}_{p}$ 的元素为：

$$\left(\boldsymbol{A}_{p}\right)_{ij}=\left\langle Sz^{p+t_{j}},z^{p+t_{i}}\right\rangle_{\alpha},\quad 1\leq i,j\leq 3. \tag{3.7}$$

由于 S 为自伴算子， $\boldsymbol{A}_p$ 为 Hermitian 矩阵。对于向量 $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$，有：

$$\left\langle Sh_p,h_p\right\rangle_\alpha=\boldsymbol{d}^*\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{d}. \tag{3.8}$$

若 $T_{f+\bar{g}}$ 是亚正规算子，则由自换位子的非负性及上述二次型恒等式可知，对每个非负整数 p，矩阵 $\boldsymbol{A}_p$ 均为半正定矩阵。

极限矩阵各元素的计算主要依据单项式 Hankel 算子的角频率正交性及其内积的渐近关系。由引理 2.1 (1)，只有满足次数匹配关系的交叉项才可能对矩阵元素产生贡献。对于这些非零项，引理 2.1 (3)、(4) 分别给出范数平方比值与交叉内积比值的极限；文献[2]引理 2.2 (ii)则用于处理单项式次数中的固定偏移，使各矩阵元素能够采用同一归一化因子。由此定义极限矩阵：

$$\boldsymbol{M}=\lim_{p\to\infty}\frac{k^2}{\left\|H_{\overline{z^k}}z^{p+k-n}\right\|_\alpha^2}\boldsymbol{A}_p. \tag{3.9}$$

上述极限按矩阵元素逐项取得。由于归一化因子为正，且半正定性在逐项极限下保持，故 $\boldsymbol{M}$ 为半正定矩阵。由同阶范数的渐近关系，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的三个对角元相同，统一记为：

$$C=n^2|a_1|^2\left(1-|\lambda|^2\right)+m^2|a_2|^2\left(1-|\lambda|^4\right)+k^2|a_3|^2\left(1-|\lambda|^6\right). \tag{3.10}$$

记三组交叉系数为：

$$X=nma_1\overline{a_2}\left(1-\lambda\bar{\lambda}^2\right), \tag{3.11}$$

$$Z=nka_1\overline{a_3}\left(1-\lambda\bar{\lambda}^3\right), \tag{3.12}$$

$$Y=mka_2\overline{a_3}\left(1-\lambda^2\bar{\lambda}^3\right). \tag{3.13}$$

当 $m-n\neq k-m$ 时，三个正次数差互不相同。由交叉内积的渐近关系，得到：

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}C & X & Z\\ \overline{X} & C & Y\\ \overline{Z} & \overline{Y} & C\end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

当 $m-n=k-m$ 时，两组交叉项具有相同的次数差，其在相应矩阵位置上的贡献需要合并，故：

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}C & X+Y & Z\\ \overline{X+Y} & C & X+Y\\ \overline{Z} & \overline{X+Y} & C\end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

由上述极限矩阵的半正定性，可进一步得到交叉系数的必要约束。

定理 1 设符号函数由(3.1)、(3.2)给出。若 $T_{f+\bar{g}}$ 在加权 Bergman 空间 A_α^2 上是亚正规算子，则 $C\geq 0$，并满足以下条件：

(1) 若 $m-n\neq k-m$，则：

$$C\geq\max\left\{|X|,|Y|,|Z|\right\}. \tag{3.16}$$

(2) 若 $m-n=k-m$，则：

$$C\geq\max\left\{|X+Y|,|Z|\right\}. \tag{3.17}$$

此外，两种情形均满足：

$$\det \boldsymbol{M} \geq 0. \tag{3.18}$$

证明 由前述推导，极限矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为半正定矩阵，因此其所有主子式均非负。一阶主子式给出 $C \geq 0$。

在非等差次数情形，三个二阶主子式分别为 $C^2-|X|^2, C^2-|Y|^2, C^2-|Z|^2$。结合其非负性及 $C \geq 0$，得到(3.16)。

在等差次数情形，二阶主子式的非负性给出 $C^2-|X+Y|^2 \geq 0, C^2-|Z|^2 \geq 0$，从而得到(3.17)。三阶主子式为矩阵的行列式，故(3.18)成立。证毕。

等差次数情形中的约束涉及合并系数 $X+Y$，不能据此分别推出 $C \geq |X|$ 和 $C \geq |Y|$。

3.3. 边界导数必要条件与交叉系数的关系

由文献[2]定理 1.2 所述的结果，本文调和多项式符号对应的 Toeplitz 算子若亚正规，则在单位圆上满足 $|f'(z)| \geq |g'(z)|$。下面考察导数模长平方差与极限矩阵系数之间的关系。

由(3.1)、(3.2)直接展开，并利用第 3.2 节中各系数的定义，得到：

$$|f'(z)|^2-|g'(z)|^2 = C+2\mathrm{Re}\left(Xz^{n-m}+Zz^{n-k}+Yz^{m-k}\right). \tag{3.19}$$

当 $m-n=k-m$ 时，式(3.19)中第一项与第三项具有相同频率，其系数合并为 $X+Y$。上述展开式表明，导数模长平方差的常数项及交叉系数与极限矩阵中的相应系数一致。然而，这一系数关系并不意味着边界导数条件、极限矩阵半正定性与算子亚正规性相互等价。下面给出原参数模型内的反例。

取 $(n,m,k)=(1,2,3)$，$(a_1,a_2,a_3)=(3,1,-1)$，$\lambda=-1$。

则

$$f(z)=3z+z^2-z^3, \tag{3.20}$$

$$g(z)=-3z+z^2+z^3. \tag{3.21}$$

此时次数成等差数列，并有 $C=0, X=12, Y=-12, Z=0$。因此，前述极限矩阵为零矩阵，且：

$$|f'(z)|^2-|g'(z)|^2=0, \quad z \in \mathbb{T}. \tag{3.22}$$

但是，取测试函数 $h(z)=1-z$，由于 $|\lambda|=1$，解析部分与反解析部分对应次数上的系数模长相等，故

$$\langle S1,1\rangle_\alpha = \langle Sz,z\rangle_\alpha = 0, \tag{3.23}$$

计算交叉内积时，由引理 2.1(1)，只有次数差为 1 的两组交叉项产生贡献。利用 Hankel 算子的定义及单项式的正交性，得到

$$\left\langle H_{\bar{z}}1, H_{\overline{z^2}}z\right\rangle_\alpha = \left\langle \bar{z}, z\bar{z}^2\right\rangle_\alpha = \gamma_2^2, \tag{3.24}$$

$$\left\langle H_{\overline{z^2}}1, H_{\overline{z^3}}z\right\rangle_\alpha = \left\langle \bar{z}^2, z\bar{z}^3\right\rangle_\alpha = \gamma_3^2. \tag{3.25}$$

代入本例的系数，得到下列实数值；再由 S 的自伴性可知，两交叉内积相等：

$$\langle S1,z\rangle_\alpha = 6\gamma_2^2-2\gamma_3^2 = \langle Sz,1\rangle_\alpha. \tag{3.26}$$

因此，

$$\langle Sh,h\rangle_\alpha = \langle S1,1\rangle_\alpha - \langle S1,z\rangle_\alpha - \langle Sz,1\rangle_\alpha + \langle Sz,z\rangle_\alpha = -4\left(3\gamma_2^2-\gamma_3^2\right). \tag{3.27}$$

由第 2.1 节的单项式范数公式，

$$3\gamma_2^2-\gamma_3^2=\frac{6}{(\alpha+2)(\alpha+3)}-\frac{6}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}=\frac{6}{(\alpha+2)(\alpha+4)}. \tag{3.28}$$

从而，

$$\langle Sh,h\rangle_\alpha=-\frac{24}{(\alpha+2)(\alpha+4)}<0,\ \ \alpha>-1. \tag{3.29}$$

故对应的 Toeplitz 算子不是亚正规算子。

上述反例表明，即使极限矩阵为半正定矩阵，且单位圆上的导数模长不等式成立，也不能推出相应 Toeplitz 算子亚正规。这一现象与所用测试函数及极限过程的局限有关：极限矩阵条件仅考察特定三项多项式测试函数在次数趋于无穷时的归一化二次型，反映的是自换位子在高次单项式上的部分渐近性质；亚正规性则要求其二次型对空间中的任意函数均非负。因此，极限条件无法完整保留有限次数上的内积信息，也未涵盖所有测试函数所产生的约束。本例中，合并后的交叉系数相互抵消，使极限矩阵与边界导数模长平方差均为零，但低次测试函数仍使自换位子的二次型取负值。这说明，渐近层面的抵消并不保证有限次数上的非负性。

本文的计算方法还可用于考察更一般的有限项调和多项式符号，例如增加单项式项数，或将对应系数之间的关系改为同一参数的其他正整数幂次。此时，需要根据次数差识别并合并具有相同角频率的交叉项，再选取适当的多项式测试函数构造相应矩阵。由此获得的有限阶矩阵条件仍应作为必要条件使用。若进一步寻求充分条件，则需控制自换位子在全部多项式上的二次型，或利用符号的特殊结构证明某组测试条件足以保证整体非负性。

3.4. 参数模长为 1 时的正规性

推论 1 设符号函数由(3.1)、(3.2)给出。若$|\lambda|=1$，且$T_{f+\bar{g}}$在加权 Bergman 空间A_α^2上是亚正规算子，则该算子为正规算子。

证明 沿用第 3.2 节中自换位子 S 的记号。由亚正规性可知，S 为有界非负算子。当$|\lambda|=1$时，各对应系数的模长相同。根据单项式测试中交叉项的正交性，对每个非负整数 p，均有：

$$\langle Sz^p,z^p\rangle_\alpha=\sum_{i=1}^{3}|a_i|^2\left(1-|\lambda|^{2l_i}\right)\left\|H_{\overline{z}^{m_i}}z^p\right\|_\alpha^2=0. \tag{3.30}$$

由于 S 为有界非负算子，存在唯一的非负平方根，因此：

$$\left\|S^{\frac{1}{2}}z^p\right\|_\alpha^2=\langle Sz^p,z^p\rangle_\alpha=0. \tag{3.31}$$

故$S^{\frac{1}{2}}z^p=0$，进而$Sz^p=0$。由于多项式在A_α^2中稠密，且 S 有界，得到$S=0$。因此，$T_{f+\bar{g}}$为正规算子。证毕。

推论 1 说明，在参数模长为 1 的情形下，亚正规性对该模型具有进一步的约束作用：解析部分与反解析部分对应次数上的系数模长相等，使自换位子在所有单项式上的对角内积均为零；其非负性又迫使相应的非对角内积同时为零，最终得到算子的正规性。因此，当系数不全为零时，若该模型中的算子亚正规而不正规，则参数模长必严格小于 1。需要指出的是，参数模长为 1 本身并不能保证算子正规，第 3.3 节的反例已表明亚正规性假设不可省略。此外，该证明并不依赖于三项结构或具体的参数幂次，而仅依赖于对应系数模长相等、单项式的正交性以及多项式的稠密性。因此，对于一般有限项调和多项式符号，若解析部分与反解析部分在各对应次数上的系数模长相等，则相应 Toeplitz 算子的亚正规性同样蕴

含正规性。

参考文献

[1] Cowen, C.C. (1988) Hyponormality of Toeplitz Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **103**, 809-812. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1988-0947663-4

[2] Lu, Y.F. and Shi, Y.Y. (2009) Hyponormal Toeplitz Operators on the Weighted Bergman Space. *Integral Equations and Operator Theory*, **65**, 115-129. https://doi.org/10.1007/s00020-009-1712-z

[3] Zhu, K. (2007) Operator Theory in Function Spaces. 2nd Edition, American Mathematical Society, Providence, 1-15. https://doi.org/10.1090/surv/138