

Nonparametric Estimation of Kamp Premium Principle

Jia Xiong, Limin Wen

College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang
Email: 297141060@qq.com

Received: Jun. 6th, 2013; revised: Jun. 14th, 2013; accepted: Jun. 24th, 2013

Copyright © 2013 Jia Xiong, Limin Wen. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: Based on the generalized weighted premium, this paper gives a brief introduction on Kamp premium principle. Through the establishment of Bayesian theory model, a set of samples is given to assume that parameters have a prior distribution. Then the Bayesian formula is used to calculate the posterior mean value. We make Bayesian estimation and linear Bayesian estimation on the Kamp premium principle, and get the credibility estimation of Kamp premium principle after analyzing the approximate of parameters under above conditions. At the same time, we prove the asymptotic of this estimation. Finally, the convergence of the provided estimates is tested by the numerical simulation.

Keywords: Kamp Premium Principle; Bayesian Model; Credibility Estimates; Convergence

Kamp 保费原理的非参数估计

熊 佳, 温利民

江西师范大学数信学院, 南昌
Email: 297141060@qq.com

收稿日期: 2013 年 6 月 6 日; 修回日期: 2013 年 6 月 14 日; 录用日期: 2013 年 6 月 24 日

摘 要: 本文结合广义加权保费对 Kamp 保费原理进行简单介绍, 并通过建立贝叶斯理论模型, 给出一组样本对参数假定一个先验分布, 且利用贝叶斯公式计算后验均值。在此前提下对 Kamp 保费原理进行贝叶斯估计, 线性贝叶斯估计以及对参数进行渐进分析后得到其信度估计。同时, 对此估计证明其渐进性。最后, 用数值模拟验证估计的收敛性。

关键词: Kamp 保费原理; 贝叶斯模型; 信度估计; 收敛性

1. 引言

假设随机风险 X 为一个非负随机变量, 在保险精算中可以看做一份保单可能引起的损失, 设 X 服从某个概率分布 $F(x, \theta)$, 其中 θ 表示与风险有关的特征。

在保险精算中, 有许多重要的保费原理, 包括期望值原理, 方差保费原理, 标准差保费原理, 指数保费原理, Esscher 保费原理, 失真保费原理以及 Kamp 保费原理, 最早研究可参考 Heilmann^[1]及 Gerber

(1979)^[2], 其中有些保费原理可以看做是某类损失函数下风险的最优估计。Gerber (1980)^[3]文章中定义了加权损失函数, 注意到在损失函数的范围中, Furman et al.^[4]提出了更为广泛的损失函数。广义加权损失函数。在这类型损失函数下得到了一类广泛的保费原理, 即: 加权保费原理。注意到, Kamp 保费原理就是在广义加权损失函数

$L(X, R) = (X - R)^2 (1 - e^{-\lambda X})$ 下, 使期望损失达到最小

的广义加权保费原理, 在 Herff et al.^[5]提出类似保费, Kamps^[6]提出定义及研究了相关的性质。后在各类保费原理的模型下都有涉及 Kamp 保费原理, 其研究一般类似于 Esscher 保费原理, 如 K. D. Schmidt et al.^[7]以及 M. Pan et al.^[8]讨论了这方面的情形。在保险的实际运用中, 由于风险随机变量 X 的分布是未知的, 因此保费也是未知的。但我们可能已经对损失有了多次观测, 我们把这些观测看做风险随机变量的一个样本。因此根据样本和相关的风险特征信息对保费进行合适的估计, 并作出进行相应的统计推断, 即可应用于责任准备金, 可参考 Vylder^[9], 巨额风险, 奖惩系统, 死亡率等领域中。

文章后面的部分安排如下, 第二节介绍风险随机变量的统计推断模型, 在统计的意义下提出 Kamp 保费原来的非参数估计并证明估计的大样本性质; 第三节建立贝叶斯模型, 在充分利用已有的样本信息和先验信息的情况下再次对 Kamp 保费原理进行合适的估计, 进而提出线性贝叶斯估计和信度估计, 并证明相关的统计性质; 第四节对前面提出的 Kamp 保费的估计进行数值比较, 在均方误差的意义下验证估计的收敛性, 并判断估计的好坏; 第五节对全文的结论进行说明。

2. Kamp 保费的统计推断

定义 1: 对随机变量 X , 定义 X 的保费为

$$R_{\lambda}(X) = \frac{E[X(1-e^{-\lambda X})]}{E[1-e^{-\lambda X}]} \quad (\text{其中 } \lambda \text{ 为正的常数})$$

称 $R_{\lambda}(X)$ 的 Kamp 保费, 该保费原理称为 Kamp 保费原理。

在 Kamp 保费原理中, λ 称为 Kamp 参数, 最早就定义了 $E(X_{N(T)+1}) = \frac{E[XG(X)]}{E[G(X)]}$ 取

$$G(X) = 1 - e^{-\lambda X}, X > 0, \lambda > 0 \text{ 时即为 Kamp 保费原理, 显然由 } R_{\lambda}(X) = \frac{E[X(1-e^{-\lambda X})]}{E[1-e^{-\lambda X}]} \geq E(X) \text{ (参考 Herff^[5]),}$$

即根据 Kamp 保费原理收取的保费能保证偿付。

我们考虑 Kamp 保费原理的性质, 显然知 $R_{\lambda}(X)$ 是关于 λ 的单调递增函数, 参数 λ 反映被保险人的风险厌恶, 因此有 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} R_{\lambda}(X) = E(X)$ 以及

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} R_{\lambda}(X) = \frac{E(X^2)}{E(X)} = E(X) + \frac{\text{Var}(X)}{E(X)}, \text{ 在风险厌恶}$$

系数 λ 改变的情况下, 保费原理 $R_{\lambda}(X)$ 将净保费与修正方差原理联系在一起, 当 λ 较小时, Kamp 保费原理与净保费和修正方差原理之和较为接近, 参考 Kamps^[6]。通过一些计算可知, 对于相互独立的风险 X 和 Y , 有 $R_{\lambda}(X+Y) \leq R_{\lambda}(X) + R_{\lambda}(Y)$, 即原理 R_{λ} 是次可加的, 因此 Kamp 保费原理是保费定价原理中的一种重要的保费, 在保险精算, 金融中都有重要意义。

在精算风险中我们常用随机变量来刻画风险, 一般情况下, 用 X_j 表示索赔额, 假设索赔额 $X_i, i=1, 2, \dots$ 独立同分布, 具有概率分布函数 $F_X(x)$, 密度函数 $f(x)$, 矩母函数 $M_{X_1}(t) = E(e^{X_1 t})$ 以及一阶矩 $E(X_1)$ 和二阶矩 $E(X_1^2)$, 即为个体风险模型, 参考温利民^[10]。在此模型下, 利用可观测的样本数据 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 对 Kamp 保费提出合适的估计

$$R_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i (1 - e^{-\lambda X_i})}{\sum_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda X_i})} \quad (1)$$

对估计 R_n 有下面的大样本性质。

记 $Y = X(1 - e^{-\lambda X}), Z = 1 - e^{-\lambda X}$, 有

- 1) $\mu_1 = E[1 - e^{-\lambda X}] = 1 - M_X(-\lambda)$
- 2) $\mu_2 = E[X(1 - e^{-\lambda X})] = EX + M_X'(-\lambda)$
- 3) $\sigma_1^2 = \text{Var}(1 - e^{-\lambda X}) = M_X(-2\lambda) - M_X^2(-\lambda)$
- 4) $\sigma_2^2 = EX^2 - (EX)^2 - 2M_X''(-\lambda) + \frac{1}{4}M_X''(-2\lambda) - 2M_X'(-\lambda)EX - [M_X'(-\lambda)]^2$
- 5) $C_{yz} = M_X'(-\lambda) + M_X(-\lambda)EX + M_X(-\lambda)M_X'(-\lambda) - \frac{1}{2}M_X'(-2\lambda)$

定理 2.1: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, R_n 是 Kamp 保费 $R(X)$ 的相合估计, 即

$$R_n \rightarrow R(X), a.s. \quad (2)$$

$$\text{证明: 由 } R_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i (1 - e^{-\lambda X_i})}{\sum_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda X_i})}, \text{ 又 } X_i, i=1, 2, \dots \text{ 独}$$

立同分布

因此由强相合大数定理, 有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda X_i}) \rightarrow \mu_1, a.s.$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i (1 - e^{-\lambda X_i}) \rightarrow \mu_2, a.s.$$

由几乎处处收敛性, 则

$$R_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i (1 - e^{-\lambda X_i})}{\sum_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda X_i})} \rightarrow \frac{\mu_2}{\mu_1} = R(x), a.s. \text{ 证毕}$$

定理 2.2: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $R_n - R(X)$ 是渐近正态的, 即

$$\sqrt{n}(R_n - R(X)) \xrightarrow{L} N(0, \tau^2) \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \tau^2 = & [1 - M_X(-\lambda)]^{-2} \left\{ EX^2 - (EX)^2 - 2M_X''(-\lambda) \right. \\ & + \frac{1}{4} M_X''(-2\lambda) - 2M_X'(-\lambda)EX - [M_X'(-\lambda)]^2 \\ & - \frac{2EX + 2M_X'(-\lambda)}{1 - M_X'(-\lambda)} [M_X'(-\lambda) + M_X'(-\lambda)EX \\ & + M_X(-\lambda)M_X'(-\lambda) - \frac{1}{2}M_X(-2\lambda)] \\ & \left. + \frac{[EX + M_X'(-\lambda)]^2}{[1 - M_X'(-\lambda)]^2} [M_X(-2\lambda) - M_X^2(-\lambda)] \right\} \end{aligned}$$

证明: 由中心极限定理, 有

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L} N \left(0, \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & \text{cov}(Y, Z) \\ \text{cov}(Y, Z) & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \right)$$

令

$$g(y, z) = \frac{y}{z}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{y=\mu_1, z=\mu_2} = \frac{1}{\mu_1}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_{y=\mu_1, z=\mu_2} = -\frac{\mu_2}{\mu_1^2}$$

则由 Cramer 定理(A)有,

$$\text{其中 } \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{\mu_1}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\mu_2}{\mu_1^2}$$

将 1)~5) 式代入即, 有

$$\sqrt{n}(R_n - R(X)) \xrightarrow{L} N(0, \tau^2)$$

3. Kamp 保费的贝叶斯推断

下面在第二节的基础上来建立贝叶斯模型, 在上面的模型中, 我们假定了 θ 是一个未知的常数, 以下我们假定 θ 是一个随机变量且具有经验分布 $\pi(\theta)$ 。将样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 看成在参数 θ 给定下的 θ 次独立已知数据, 记 $X_n = (X_1 \dots X_n)'$ 。将与先验参数 θ 有关的样本的 Kamp 保费记为 $R(\theta)$, 即风险保费

$$R(\theta) = \frac{E[X(1 - e^{-\lambda X})|\theta]}{E[1 - e^{-\lambda X}|\theta]}. \text{ 在此模型下, 提出 Kamp}$$

保费的贝叶斯估计, 线性贝叶斯估计, 以及近似线性贝叶斯估计, 并证明其估计性质。

3.1. 贝叶斯理论以及相关记号

贝叶斯理论提供了一种计算假设概率的方法, 基于假设的先验概率、给定假设下观察到不同数据的概率以及观察到的数据本身。贝叶斯推断方法的关键在于所作出的任何推断都必须也只须根据后验分布 $\pi(\theta|x)$, 而不能再涉及 X 的样本分布 $F(\theta)$ 。贝叶斯决策理论方法是贝叶斯理论中的一个基本方法, 其基本思想是: 已知类条件概率密度参数表达式和先验概率; 利用贝叶斯公式转换成后验概率; 根据后验概率大小进行决策分类, 关键在于先验分布的选取以及后验风险的求值, 参考王伟等^[11]。

为记号方便, 假设

$$\begin{aligned} \mu &= E[R(\theta)], \quad a = \text{Var}[R(\theta)], \\ \sigma^2(\theta) &= \text{Var}(R_n|\theta), \quad \sigma^2 = E[\sigma^2(\theta)] \end{aligned}$$

3.2. Kamp 保费的贝叶斯估计和信度估计

结合以上假设, 由贝叶斯定理, 可得出以下结论。

定理 3.2.1: 在加权平方损失函数

$L(X, R) = (X - R)^2 (1 - e^{-\lambda X})$ 条件下, 风险保费 $R(\theta)$ 的贝叶斯估计为

$\arg \min_{g \in M} E[(R(\theta) - R)^2 (1 - e^{-\lambda R(\theta)})]$ 的解, 即:

$$\sqrt{n}(R_n - R(X)) \xrightarrow{L} N \left(0, \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & \text{cov}(Y, Z) \\ \text{cov}(Y, Z) & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \quad (A)$$

$$\widehat{R(\theta)}^B = \frac{E[R(\theta)(1-e^{-\lambda R(\theta)})|X_n]}{E[1-e^{-\lambda R(\theta)}|X_n]} \quad (4)$$

其中 $M = \{P: P \text{ 是 } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ 的可测函数}\}$ 。

证明: 由贝叶斯定理(B)知

R 最小化, 即后者对 R 求导, 有

$$-2E[(R(\theta)-R)^2(1-e^{-\lambda R(\theta)})|X_n] = 0$$

得:

$$R = \frac{E[R(\theta)(1-e^{-\lambda R(\theta)})|X_n]}{E[1-e^{-\lambda R(\theta)}|X_n]}$$

即 R 为风险保费 $R(\theta)$ 的贝叶斯估计, 记为 $\widehat{R(\theta)}^B$ 。

显然 $\widehat{R(\theta)}^B$ 不仅与样本 $X_1, \dots, X_n$ 的具体分布有关, 并且还需假设先验分布的存在具体形式。这些信息在实际中是很难得到的, 由此我们建立线性贝叶斯理论来避免此问题, 在实际中得到非常广泛的应用。参考温利民^[10]以及 Wen L.^[12], 我们将估计量限定在某线性函数类中, 在均方误差最小的意义下得到最优估计。

即求解

$$\min_{a_0, a_1 \in R} E[(R(\theta) - a_0 - a_1 R_n)^2] \quad (5)$$

可以得到:

定理 3.2.2: 在贝叶斯模型下, 求解上述问题(5)式得到风险保费 $R(\theta)$ 的最优线性贝叶斯估计

$$\widehat{R(\theta)}^{LB} = \left[1 - \frac{\text{Cov}[R(\theta), R_n]}{\text{Var}[R_n]} \frac{E[R_n]}{\mu} \right] \mu + \frac{\text{Cov}[R(\theta), R_n]}{\text{Var}[R_n]} R_n \quad (6)$$

证明: 记 $\Psi = E[(R(\theta) - a_0 - a_1 R_n)^2]$

对 a_0 求导, 并令导数为零, 得

$$E[R(\theta)] - a_0 - a_1 E[R_n] = 0,$$

对 a_1 求导, 并令导数为零, 得

$$\text{Cov}[R(\theta), R_n] - a_1 \text{Var}[R_n] = 0$$

即

$$a_1 = \frac{\text{Cov}(R(\theta), R_n)}{\text{Var}[R_n]},$$

$$a_2 = E[R(\theta)] - \frac{\text{Cov}(R(\theta), R_n)}{\text{Var}[R_n]} E[R_n]$$

$$\widehat{R(\theta)}^{LB} = \left[1 - \frac{\text{Cov}[R(\theta), R_n]}{\text{Var}[R_n]} \frac{E[R_n]}{\mu} \right] \mu + \frac{\text{Cov}[R(\theta), R_n]}{\text{Var}[R_n]} R_n$$

因此

定理 3.2.2 中的线性贝叶斯估计 $\widehat{R(\theta)}^{LB}$ 不受样本分布和先验分布的具体形式的影响, 即解决了前面提出的问题。但是由于 $E[R_n]/\mu \neq 1$, 此时 $\widehat{R(\theta)}^{LB}$ 不是加权平均的, 因此以下部分我们研究以上参数的一些渐进结果, 使得 Kamp 保费的估计形式为加权平均, 即信度保费。

在定理 2.2 条件下, 对于固定的 θ , 有

$$\sqrt{n}[R_n - R(\theta)] \rightarrow N(0, \tau^2(\theta)).$$

又假设

$$E|X_i| < \infty, E|X_i^2| < \infty, \text{ 当 } n \rightarrow \infty,$$

有 $E[R_n|\theta] \rightarrow R(\theta)$ 以及 $n\text{Var}[R_n|\theta] \rightarrow \tau^2(\theta)$ 参考 Shorack^[13]以及 Kim^[14],

引理: 若

$$E[X(1-e^{-\lambda X})] < \infty, E[X^2(1-e^{-\lambda X})^2] < \infty, \text{ 因此有}$$

$$E[R_n] \rightarrow \mu$$

$$\text{Var}[E(R_n|\theta)] \rightarrow a$$

$$\text{Cov}(R(\theta), R_n) \rightarrow a$$

$$nE[\text{Var}(R_n|\theta)] \rightarrow \tau^2$$

证明: 由于 $E[R_n|\theta] \leq E[X(1-e^{-\lambda X})|\theta]$

$$\arg \min E[(R(\theta) - R)^2(1-e^{-\lambda R(\theta)})] \Leftrightarrow \arg \min E[(R(\theta) - R)^2(1-e^{-\lambda R(\theta)})|X_n] \quad (B)$$

(即贝叶斯风险最小等价于后验风险最小)

$$\text{Var}(R_n|\theta) = E(R_n^2|\theta) - E^2(R_n|\theta) \leq E(R_n^2|\theta)$$

根据控制收敛定理, 有

$$E[R_n] = E[E(R_n|\theta)] \rightarrow E[R(\theta)] = \mu$$

$$\text{Var}[E(R_n|\theta)] \rightarrow \text{Var}[R(\theta)] = a,$$

$$nE[\text{Var}(R_n|\theta)] \rightarrow E\tau^2(\theta) = \tau^2$$

由条件方差公式, 知:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(R(\theta), R_n) &= E[R(\theta)R_n] - E[R(\theta)]E[R_n] \\ &= E[R(\theta)E(R_n|\theta)] - E[R(\theta)]E[R_n] \\ &\rightarrow E[R(\theta)^2] - E[R(\theta)]^2 = \text{Var}[R(\theta)] = a \end{aligned}$$

将引理中渐进结果代入(6)中, 则可得 $\widehat{R(\theta)}$ 的信度估计为

$$\widehat{R(\theta)} = ZR_n + (1-Z)\mu \quad \text{其中 } Z = \frac{na}{\sigma^2 + na} \in (0, 1) \quad (7)$$

以上提出的贝叶斯估计以及信估计, 一般情况下已知贝叶斯保费和信度保费收敛于个体保费 $E(X|\theta), a.s.$ 。与定理 3.2.1 的结论相比, 信度估计形式较简单, 且有较少的结构参数, 对信度估计有下面的强相合性。

定理 3.2.3: 若存在随机变量 X_i 使得 $E|X_i| < \infty$, 且 $E|X_i^2| < \infty$, 则信度保费 $\widehat{R(\theta)}$ 是风险度量 $R(\theta)$ 的强相合估计, 即有 $\widehat{R(\theta)} \rightarrow R(\theta), a.s.$ 。

证明: 已知 $E(R_n|\theta) \rightarrow R(\theta), a.s.$, 由条件大数定律得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \rightarrow R(\theta), a.s.,$$

又信度因子

$$Z = \frac{na}{\sigma^2 + na} \rightarrow 1,$$

因此

$$\widehat{R(\theta)} = ZR_n + (1-Z)\mu \rightarrow R(\theta), a.s$$

4. 数值模拟

本节我们考虑 3.3 中讨论的参数模型, 假设已给定持保人索赔额 $X_i|\theta, i=1, \dots, n$, 且 $X_i \text{ iid } \sim \text{Exp}(\theta)$, 参数 θ 的分布 $\Pr(\theta=1) = \Pr(\theta=2) = 1/2$, 对风险保费 $R(\theta)$ 的信度保费 $\widehat{R(\theta)}$ 进行了计算, 比较均方误差并

验证其收敛速度。为了得到 $\widehat{R(\theta)}$, 先计算

$$R(\theta) = \frac{E[X(1-e^{-\lambda X})|\theta]}{E[(1-e^{-\lambda X})|\theta]} = \frac{2\theta + \lambda}{\theta(\theta + \lambda)}$$

$$\text{即, } \mu = E[R(\theta)] = \frac{1}{2} \left(\frac{2+\lambda}{1+\lambda} + \frac{4+\lambda}{4+2\lambda} \right)$$

$$a = \text{Var}[R(\theta)]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{2+\lambda}{1+\lambda} \right)^2 + \left(\frac{4+\lambda}{4+2\lambda} \right)^2 \right] - \frac{4+\lambda}{4(1+\lambda)}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\theta) &= \frac{1}{n} \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\theta^2} + \frac{\theta}{(\theta+2\lambda)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda(3\theta+2\lambda)}{(\theta+\lambda)^4} + \frac{\lambda+2\theta}{\theta(\theta+\lambda)} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{(\theta+\lambda)(2\lambda-\theta^2)-2\theta^2}{(\theta+\lambda)^3} + \frac{\theta(2+2\lambda+\theta)}{(\theta+2\lambda)^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

由上式 $\sigma^2(\theta)$ 有:

$$\sigma^2 = E[g(\theta)] = \frac{1}{2}g(1) + \frac{1}{2}g(2)$$

由上述计算结果, 在模拟中我们取

$\lambda = 0.2, \theta = 0.5$, 并且分别取多种 n 的值进行模拟, 计算可得到经验估计 R_n 以及相应的信度保费 $\widehat{R(\theta)}$, 观察下表:

n	10	50	100	500	1000	10000
$R(\theta)$	3.4286	3.4286	3.4286	3.4286	3.4286	3.4286
$\widehat{R(\theta)}$	1.6963	3.1344	3.3458	3.423	3.4265	3.4282
MSE	3.03E-04	8.28E-06	7.30E-07	9.82E-09	1.24E-10	3.99E-12

通过表中易见, 当 n 从 10 到 10,000, $R(\theta)$ 与 $\widehat{R(\theta)}$ 的值不断逼近至相等, 其均方误差也非常小, 可以认为此估计为在该假定样本下的最优估计, 因此信度因子 Z 以及信度保费 $\widehat{R(\theta)}$ 可用于实践中。

5. 小结

本文主要研究了 Kamp 保费的贝叶斯估计, 线性贝叶斯估计以及通过结构参数的近似, 得到其信度估计并且进行了数值分析。对于 Kamp 保费的非参数估计还未有相关的研究, 同时将其限定在一类线性函数中, 所得到的估计相对的模拟结果比较好, 有一定的

应用价值。在未来的工作中，我们可以对 Kamp 保费进行参数估计，同时还可以将 Kamp 保费的各类估计应用于实际中金融数据的处理和分析等。

参考文献 (References)

- [1] W. R. Heilmann. Decision theoretic foundations of credibility theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1989, 8: 77-95.
- [2] H. U. Gerber. An introduction to Mathematical risk theory. Philadelphia: S.S. Heubner Foundation, 1979: Monograph Series 8.
- [3] H. U. Gerber. Credibility for Esscher premium. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 1980, 3: 307-312.
- [4] E. Furman, R. Zitikis. Weighted premium calculation principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42(1): 459-465.
- [5] W. Herff, B. Jochems and U. Kamps. The inspection paradox with random time. *Statistical Papers*, 1997, 38: 103-110.
- [6] U. Kamps. On a class of premium principles including the Esscher principle. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1998, 1: 75-80.
- [7] K. D. Schmidt, M. Timpel. Experience rating under weighted squared error loss. *Blätter der DGVFM*, 1995, 22(2): 289-307.
- [8] M. Pan, R. Wang, and X. Wu. On the consistency of credibility premiums regarding Esscher principle. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42: 119-126.
- [9] D. Vylder. Estimation of IBNR claims by credibility theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1982, 1:35-40.
- [10] 温利民, 风险保费的信度估计及其统计推断[J]. *华东师范大学学报*, 2010, 3: 103-270.
- [11] 王伟等. Esscher 保费原理下信度估计的比较[J]. *华东师范大学学报*, 2010, 3: 71-78.
- [12] L. Wen, X. Wu and X. Zhao. The credibility premiums under generalized weighted loss functions. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2009, 5(4): 893-910.
- [13] G. Shorack, J. Wellner. *Empirical processes with applications to statistics*. New York: Wiley, 1986.
- [14] Y. J. Kim. Credibility theory based on trimming. *Insurance: Mathematics and Economics*. 2013, 53: 36-47.