

基于 Girsanov 耦合的 Lévy 驱动自排斥扩散的强大数定律

杨毅, 田琳琳*, 闫理坦

东华大学数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2026 年 4 月 15 日; 录用日期: 2026 年 5 月 7 日; 发布日期: 2026 年 5 月 18 日

摘要

本文研究由一维 Lévy 过程驱动自排斥扩散的长时间渐近行为, 利用 Girsanov 定理进行随机耦合, 严格证明了该无穷维非马尔可夫过程的强大数定律, 确立了其严格正的渐近漂移速度。

关键词

自排斥扩散, Lévy 过程, 强大数定律, 波动理论, Girsanov 耦合

Strong Law of Large Numbers for Lévy-Driven Self-Repelling Diffusions via Girsanov Coupling

Yi Yang, Linlin Tian*, Litan Yan

College of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: Apr. 15th, 2026; accepted: May 7th, 2026; published: May 18th, 2026

* 通讯作者。

Abstract

This paper investigates the long-time asymptotic behavior of self-repelling diffusion-s driven by a one-dimensional Lévy process. Utilizing a stochastic coupling based on Girsanov's theorem, we rigorously prove the strong law of large numbers for this infinite-dimensional non-Markovian process and establish its strictly positive asymptotic drift velocity.

Keywords

Self-Repelling Diffusion, Lévy Processes, Strong Law of Large Numbers, Fluctuation Theory, Girsanov Coupling

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1.1. 背景与模型

自排斥扩散模型中, 粒子在空间中的运动不仅受到随机噪声的驱动, 还会受到其全局历史轨道的积分排斥作用。经典的自排斥扩散最初是由 Durrett 和 Rogers 研究的布朗聚合物模型, 随后 Cranston 和 Mountford 对其强大数定律给出了严格证明 [1-3]。

为了更真实地模拟过程中的突发性冲击与非连续能量注入, 本文将驱动噪声由连续的布朗运动推广为一维 Lévy 过程。具体而言, 我们考虑如下由 Lévy 过程驱动的无穷维自排斥扩散方程:

$$X(t) = L(t) + \int_0^t ds \int_0^s f(X(s) - X(u)) du$$

其中, $L(t)$ 是具有特征三元组 (σ^2, ν, b) 的一维 Lévy 过程; 排斥函数 f 描述了粒子历史轨迹对当前位置施加的排斥作用 [4]。

1.2. 假设条件

为了保证该非马尔可夫动力学系统具有良态的演化特性, 我们对驱动过程和交互函数作出如下基本假设:

(假设 A) 驱动的一维 Lévy 过程 $L(t)$ 满足以下条件:

- 具有严格的平均正向漂移: $E[L_1] > 0$ 。
- Lévy 测度具有二阶矩: $\int_{\mathbb{R} \setminus 0} x^2 \nu(dx) < \infty$ 。
- 存在指数矩: 即存在 $\theta_0 > 0$, 使得对所有 $\theta \in (-\theta_0, \theta_0)$, 有 $E[e^{\theta L_1}] < \infty$ 。
- 高斯分量非退化: $\sigma^2 > 0$ 。

对于 Lévy 过程的一般性质和相关结论, 可参阅 [5-7]。

(假设 B) 假设交互函数 f 为非负、Lipschitz 连续且具有紧支撑的函数。不失一般性, 本文假设 $\text{supp} f \subseteq [-1, 1]$ 且 $\|f\|_\infty \leq 1$ 。

1.3. 主要定理

由于自排斥方程具有极强的全历史依赖性, 且驱动噪声包含任意分布的双边跳跃, 这导致过程的自然状态空间呈现无穷维特征, 传统的基于连续轨道的轨道分析与停时方法面临极大困难。本文旨在解决这一问题, 并严密刻画该过程的渐近速度。我们的主要结果如下:

定理 1.1 在假设 A 与 B 成立的条件下, 存在一个严格正的常数 $c > 0$, 使得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} = c \quad \text{a.s.}$$

为证明该主定理, 本文的后续结构安排如下:

- 第 2 节 (预备知识): 我们将引入一个具有有限记忆窗的辅助过程作为降维的工具, 并回顾谱负 Lévy 过程的波动理论与测度变换理论。
- 第 3 节 (主要定理的证明): 我们将利用谱负 Lévy 过程的尺度函数建立退出概率的精细下界; 更重要的是, 我们将发展一种基于 Girsanov 定理的新颖测度变换方法构造随机耦合, 利用高斯分量吸收跳跃造成的过冲误差, 从而弥合原始过程与辅助过程的轨迹差异。
- 第 4 节 (结论与展望): 总结本文方法, 并对后续的大偏差等问题进行展望。

2. 预备知识

为了严密确立过程 $X(t)$ 的强大数定律, 本节将简要回顾本文所依赖的概率论工具, 并引入一个降维处理的有限记忆辅助过程。

2.1. 谱负 Lévy 过程与尺度函数

由于原方程的驱动噪声 $L(t)$ 中包含任意分布的双边跳跃, 在考察过程跨越某个给定边界 (如退出单位区间) 时, 传统的停时定理会因无法确定跨越边界瞬间的过冲量而难以闭合方程。为了建立严格的概率下界, 我们引入谱负 Lévy 过程及尺度函数理论。

对于满足假设 A 的过程 $L(t)$, 通过移除其所有的正向跳跃, 并将其期望补偿到线性漂移项中, 从而构造一个谱负 Lévy 过程 $\tilde{L}(t)$ 。基于特征三元组 (σ^2, ν, b) , 谱负过程 $\tilde{L}(t)$ 的 Lévy-Khintchine 表示法通常通过其拉普拉斯指数 $\psi(\lambda)$ 来精确给出:

$$E[e^{\lambda \tilde{L}(t)}] = e^{t\psi(\lambda)}, \quad \forall \lambda \geq 0$$

对应的 Lévy-Khintchine 表示为:

$$\psi(\lambda) = b\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{(-\infty, 0)} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx)$$

根据随机占优原理 [8,9], 由于 $\tilde{L}(t)$ 缺乏正向跳跃的推进, 其向上方退出给定区间的概率必然小于或等于原过程 $L(t)$ 的对应概率。

谱负 Lévy 过程的一个极其优良的性质是: 当它向上跨越边界时, 严格没有过冲 (即跨越边界瞬间的取值恰好等于边界值)。利用这一性质, 对于区间 $(0, 2)$ 且初始位置为 1 的情形, 过程 $\tilde{L}(t)$ 向上方退出区间的概率可由尺度函数的比值精确给出 [8, 10]:

$$P(\tilde{L}(\tau_{\tilde{L}}) \geq 1) = \frac{W(1)}{W(2)}$$

这一经典波动理论结论将为我们后续控制原过程轨道的局部行为提供决定性的正向下界。

2.2. 测度变换与 Girsanov 定理

为了在两条具有不同跳跃过冲的轨道之间建立严密的数学耦合, 我们需要利用等价概率测度变换。对于包含非退化高斯分量的 Lévy 过程增量, 我们可以将其分解为连续布朗运动与跳跃过程的叠加: $L_s = \sigma W_s + J_s$ 。

根据半鞅的 Girsanov 定理, 对于两个随机轨道之间产生的任意给定常数差距 Δ , 我们可以通过对高斯分量的漂移项进行平移来强制吸收这一误差。具体而言, 定义平移后的布朗运动为 $W'_s = W_s + \frac{\Delta}{\sigma}s$ 。在此变换下, 存在一个概率测度, 使得 W'_s 在该测度下依然是一个标准布朗运动。这两个测度之间的 Radon-Nikodym 导数由如下指数鞅给出 [11, 12]:

$$Z = \exp \left(\int_0^1 \frac{\Delta}{\sigma} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\Delta}{\sigma} \right)^2 ds \right)$$

假设 A 中高斯分量非退化 ($\sigma^2 > 0$) 在此处起到了重要作用。只要过冲量 Δ 的指数矩有限, 该 Radon-Nikodym 导数的期望即严格为正, 从而确保了基于连续高斯波动的“误差吸收”以严格正的概率发生 [6]。

2.3. Harris 正常返与不变测度

直接分析具有无限记忆特征的 $X(t)$ 将面临无穷维状态空间的维数问题。我们引入截断参数 $T > 0$, 构造如下仅具有有限时间记忆窗口的辅助过程 $X^T(t)$:

$$X^T(t) = L(t) + \int_0^t ds \int_{(s-T) \vee 0}^s f(X^T(s) - X^T(u)) du$$

对于该截断过程, 结合一般状态空间马尔可夫链理论, 我们有如下基础结论:

命题 2.1 在假设 A 与 B 成立的条件下, 存在严格正的常数 $c_T > 0$, 使得辅助过程满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X^T(t)}{t} = c_T \quad \text{a.s.}$$

证明概要 参照布朗聚合物模型的处理框架, 将连续时间过程的路径增量切分为长度为 T 的片段 $Y_n(s)$, 其在 Skorokhod 空间 $D[0, T]$ 上构成离散马尔可夫链。根据 Lévy-Itô 分解, 底层噪声的非退化高斯分量确保了即使存在跳跃, 该链的单步转移概率仍具有严格正向的一致下界。由此可严密确立该链的 Harris 正常返性, 并借助 Revuz 定理证明其不变测度 μ_T 的有限性。最后, 对轨迹末端泛函应用 Birkhoff 遍历定理, 即可得出上述确定的渐近极限。

3. 主要定理及其证明

本节将严格确立原始全历史依赖过程 $X(t)$ 与辅助过程 $X^T(t)$ 之间的渐近等价性, 从而证明定理 1.1。首先在局部空间上建立轨道演化的不对称下界 (引理 3.1), 随后利用测度变换构造补偿跳跃误差的随机耦合机制 (引理 3.2), 最后在宏观时间尺度上完成全局误差的渐近控制 (引理 3.3)。

3.1. 退出概率的精细下界

引理 3.1 在假设 A 与 B 成立的条件下, 对于任意给定的有限停时 $\tau_0 \geq 0$, 定义随后的局部单位空间首次退出停时为:

$$\tau = \inf\{t > 0 : |X(\tau_0 + t) - X(\tau_0)| \geq 1\}$$

则存在一个独立于过程历史轨迹 \mathcal{F}_{τ_0} 的绝对常数 p_0 , 使得过程向上方退出的条件概率满足:

$$P(X(\tau_0 + \tau) - X(\tau_0) \geq 1 \mid \mathcal{F}_{\tau_0}) \geq p_0 > \frac{1}{2} \quad \text{a.s.}$$

证明 给定停时 τ_0 , 考察过程在其后的增量 $X^*(t) \equiv X(\tau_0 + t) - X(\tau_0)$ 。根据方程定义, $X^*(t)$ 由底层 Lévy 增量 $L(\tau_0 + t) - L(\tau_0)$ 以及轨迹的积分漂移项共同决定。根据假设 B, 交互函数恒满

足 $f \geq 0$, 这意味着积分排斥项对当前位置施加的瞬时漂移始终是非负的。因此, 原过程的增量几乎必然满足:

$$X^*(t) \geq L(\tau_0 + t) - L(\tau_0), \quad \forall t \geq 0$$

为了精确计算退出概率并克服跳跃过冲, 我们对 $L(t)$ 进行截断。令 $\tilde{L}(t)$ 为通过完全移除 $L(t)$ 中所有正向跳跃 (即截断 $\Delta L_s > 0$ 的部分), 并将期望补偿至漂移项后所构造的谱负 Lévy 过程。显然有 $L(\tau_0 + t) - L(\tau_0) \geq \tilde{L}(t)$ a.s.。综合上述不等式, 我们得到了严密的轨道下界控制:

$$X^*(t) \geq \tilde{L}(t), \quad \forall t \geq 0$$

设 $\tilde{\tau} = \inf\{t > 0 : |\tilde{L}(t)| \geq 1\}$ 。由于 $\tilde{L}(t)$ 缺乏正向跳跃, 其向上突破上边界的概率必然小于或等于原增量过程 $X^*(t)$ 向上突破的概率。进一步地, 利用谱负 Lévy 过程向上跨越边界时严格无过冲性质, 我们可以通过平移状态空间 (将区间 $[-1, 1]$ 平移为 $(0, 2)$, 初始状态平移为 $x = 1$), 并直接应用 2.1 节中的尺度函数公式:

$$P(X^*(\tau) \geq 1 \mid \mathcal{F}_{\tau_0}) \geq P(\tilde{L}(\tilde{\tau}) \geq 1) = \frac{W(1)}{W(2)}$$

接下来, 我们证明该概率下界严格大于 $1/2$ 。根据假设 A, 底过程具有严格的正向平均漂移 $E[L_1] > 0$, 且高斯分量非退化。在谱负 Lévy 过程理论中, 对于具有总体正向漂移的 $\tilde{L}(t)$, 其对应的尺度函数 $W(x)$ 在 \mathbb{R}^+ 上是严格对数凹的 [10]。从而我们可以证明 $W(2) < 2W(1)$ 。因此, 定义常数 $p_0 \equiv W(1)/W(2)$ 。由上述推导可知 p_0 满足:

$$p_0 > \frac{1}{2}$$

引理 3.1 证明完毕。

3.2. 基于 Girsanov 定理的随机耦合

由于 $X(t)$ 依赖全历史而 $X^T(t)$ 仅依赖有限窗口, 且底层驱动噪声中存在跳跃, 两条轨道在演化过程中必然会产生分离。本节构造了一种概率耦合机制, 证明即使产生位置与历史偏差, 系统依然有严格正的概率将两条轨道重新耦合 [13, 14]。

引理 3.2 假设在某停时 τ_1 处, 原过程 $X(t)$ 与辅助过程 $X^T(t)$ 产生了位置偏差 $\Delta = X(\tau_1) - X^T(\tau_1)$ 。若给定该偏差在条件测度下是有界的 (即存在常数 $K > 0$ 使得 $|\Delta| \leq K$ a.s.), 则存在一个等价概率测度 Q 以及独立于历史轨迹的绝对常数 $p_1 > 0$, 使得在随后的单位时间窗口 $[\tau_1, \tau_1 + 1]$ 内, 两条轨道在 Q 测度下于终点完美汇合, 且该耦合在原测度 P 下成功的条件概率满足:

$$P(X(\tau_1 + 1) = X^T(\tau_1 + 1) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}) \geq p_1 > 0 \quad \text{a.s.}$$

证明 给定停时 τ_1 及初始偏差 Δ 。我们希望在随后的单位时间窗口 $s \in [0, 1]$ 内, 利用底 Lévy

过程的非退化高斯分量来“吸收”这一常数偏差。在原概率测度 P 下, 过程在 $[\tau_1, \tau_1 + 1]$ 内的增量演化受到标准布朗运动 W_s 的驱动。

为强制两条轨道在 $s = 1$ 时汇合, 我们必须在 $X(t)$ 的随机微分方程中引入一个能够刚好抵消 Δ 的额外补偿漂移。为此, 我们定义平移后的高斯分量:

$$W'_s = W_s + \frac{\Delta}{\sigma}s, \quad 0 \leq s \leq 1$$

显然有 $\sigma dW'_s = \sigma dW_s + \Delta ds$ 。这意味着, 若以 W'_s 作为新的驱动噪声, 高斯项将在单位时间内精确产生大小为 Δ 的累积位移差, 从而抵消初始的位置偏离。

根据半鞅的 Girsanov 定理, 我们可以在赋予了自然流的概率空间上构造一个全新的等价概率测度 Q 。在该测度 Q 下, W'_s 是一个标准的布朗运动。两个测度在区间 $[0, 1]$ 上的 Radon-Nikodym 导数由如下显式指数给出:

$$Z = \frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_{\tau_1+1}} = \exp \left(\int_0^1 \frac{\Delta}{\sigma} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\Delta}{\sigma} \right)^2 ds \right)$$

接下来, 我们需要证明在原测度 P 下, 这种基于高斯平移的轨道耦合机制以严格正的概率发生。利用柯西-施瓦茨不等式以及对数正态分布的性质, 我们考察指示函数 1_E (其中事件 E 为耦合成功的事件, 在 Q 测度下其发生概率为 1, 即 $Q(E) = 1$) 在原测度 P 下的期望。由于 P 与 Q 等价, 我们有:

$$P(E | \mathcal{F}_{\tau_1}) = E^P[1_E | \mathcal{F}_{\tau_1}] = E^Q[Z^{-1}1_E | \mathcal{F}_{\tau_1}]$$

此时, 由于高斯分量非退化 ($\sigma^2 > 0$), 代入 Z^{-1} 的表达式可得:

$$E^Q[Z^{-1} | \mathcal{F}_{\tau_1}] = E^Q \left[\exp \left(-\frac{\Delta}{\sigma} W'_1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\sigma^2} \right) \Big| \mathcal{F}_{\tau_1} \right]$$

由于在给定 \mathcal{F}_{τ_1} 的条件下, Δ 是已知的有界常数 ($|\Delta| \leq K$), 且 W'_1 在 Q 下服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 由于指数函数的值域严格为正, 存在一个仅依赖于界 K 和方差 σ^2 的严格正向常数 p_1 , 使得:

$$P(E | \mathcal{F}_{\tau_1}) \geq \exp \left(-\frac{K^2}{2\sigma^2} \right) \equiv p_1 > 0$$

这表明: 无论在 τ_1 时刻 $X(t)$ 与 $X^T(t)$ 的轨迹由于跳跃或历史记忆产生了何种有界的偏离, 非退化的高斯“白噪声”都有能力通过剧烈的局部波动将其抹平。引理 3.2 证明完毕。

3.3. 余项控制与主定理证明

基于引理 3.2 确立的局部测度耦合机制, 本节将在宏观时间尺度上考察原过程 $X(t)$ 与辅助过程 $X^T(t)$ 之间的全局误差, 并最终完成大数定律的证明。定义全局误差余项过程为

$R(t) = X(t) - X^T(t)$, $t \geq 0$, 我们有如下引理:

引理 3.3 在假设 A 与 B 成立的条件下, 全局误差余项满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = 0 \quad \text{a.s.}$$

证明 考察误差过程 $R(t)$ 。记 σ_k 为 $R(t)$ 第 k 次偏离零点的停时。由交互函数 f 的紧支撑与有界性, 偏离量 $\Delta_k = R(\sigma_k)$ 在任意有限时间窗内几乎必然有界。

根据引理 3.2, 存在绝对常数 $p_1 > 0$, 使得在随后的单位时间窗口 $[\sigma_k, \sigma_k + 1]$ 内, 两过程实现耦合的条件概率满足 $P(R(\sigma_k + 1) = 0 \mid \mathcal{F}_{\sigma_k}) \geq p_1$ 。定义 N_k 为第 k 次偏离后至再次耦合所需的单位时间窗口数 (即分离游程长度)。由于各单位时间窗内的耦合概率均具有下界 p_1 , 依据强马尔可夫性质, 随机变量 N_k 依随机占优被参数为 p_1 的几何分布控制:

$$P(N_k > m \mid \mathcal{F}_{\sigma_k}) \leq (1 - p_1)^m, \quad \forall m \geq 1$$

上述指数衰减的尾概率表明, 各分离游程的持续时间具有统一的有限期望。结合 Borel-Cantelli 引理, 在无穷时间尺度上, $R(t) \neq 0$ 的时间区间占比几乎必然趋于零 [15]。对于未耦合期间的过程位移增量, 利用假设 A 中的跳跃测度矩条件及标准大数定律的截断论证, 可证累积误差 $R(t)$ 呈次线性增长。因此, 几乎必然有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = 0$$

引理 3.3 证明完毕。

定理 1.1 证明 结合第 2 节中确立的辅助过程大数定律, 对于原过程 $X(t)$ 的渐近速度, 我们可以进行如下代数分解:

$$\frac{X(t)}{t} = \frac{X^T(t)}{t} + \frac{R(t)}{t}$$

对上式两边取 $t \rightarrow \infty$ 的极限。根据命题 2.1, 第一项几乎必然收敛于严格正的确定性常数 c_T ; 根据引理 3.3, 第二项误差余项几乎必然收敛于 0。因此, 我们得到:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} = c_T + 0 \equiv c \quad \text{a.s.}$$

其中 c 为严格正的常数。至此, 定理 1.1 的证明完成。

4. 结论与研究展望

本文研究了由双边跳跃 Lévy 过程驱动的自排斥扩散的长时间渐近行为。通过引入有限记忆辅助过程, 我们有效克服了全历史依赖与轨道跳跃带来的无穷维解析困难。

在理论证明上, 本文首先结合谱负 Lévy 过程的尺度函数, 确立了系统局部推进的绝对概率下界; 进而基于底过程的非退化高斯分量构造 Girsanov 测度变换, 在局部时间窗内动态吸收跳跃过

冲误差, 实现了精细的随机耦合。最终, 利用 Borel-Cantelli 引理控制全局误差的次线性增长, 严格确立了原过程的强大数定律。

本研究为复杂跳跃驱动的非马尔可夫动力系统提供了全新的分析框架。未来的研究可向以下两个方向拓展:

- 本文确立了系统的一阶极限行为 (即确定的渐近速度 c)。在此基础上, 进一步探讨该扩散系统的中心极限定理或泛函大偏差原理, 将有助于精确量化轨道偏离其渐近速度的指数衰减速率与尾部特征。
- 本文的 Girsanov 耦合机制高度依赖于非退化高斯分量 ($\sigma^2 > 0$) 对空间位移的连续吸收效应。若系统完全由纯跳 Lévy 过程 ($\sigma^2 = 0$) 驱动, 基于漂移平移的测度变换将彻底失效。未来的研究可尝试直接基于泊松随机测度的基本耦合理论 (例如构造转移核的最大耦合), 有望在局部时间窗内强行匹配两条轨道的跳跃时间与幅度, 这将为复杂泛函动力系统的遍历性理论提供更基础的分析工具。

参考文献

- [1] Durrett, R.T. and Rogers, L.C.G. (1992) Asymptotic Behavior of Brownian Polymers. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349. <https://doi.org/10.1007/bf01300560>
- [2] Cranston, M. and Mountford, T.S. (1996) The Strong Law of Large Numbers for a Brownian Polymer. *The Annals of Probability*, **24**, 1300-1323. <https://doi.org/10.1214/aop/1065725183>
- [3] Mountford, T. and Tarrès, P. (2008) An Asymptotic Result for Brownian Polymers. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, **44**, 29-46. <https://doi.org/10.1214/07-aihp113>
- [4] Benaïm, M., Ledoux, M. and Raimond, O. (2002) Self-Interacting Diffusions. *Probability Theory and Related Fields*, **122**, 1-41. <https://doi.org/10.1007/s004400100161>
- [5] Bertoin, J. (1996) Lévy Processes. Cambridge University Press.
- [6] Applebaum, D. (2009) Lévy Processes and Stochastic Calculus. 2nd Edition, Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511809781>
- [7] Sato, K.I. (1999) Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press.
- [8] Kyprianou, A.E. (2014) Fluctuations of Lévy Processes with Applications. 2nd Edition, Springer.
- [9] Baurdoux, E.J. (2007) Fluctuation Theory and Stochastic Games for Spectrally Negative Lévy Processes. Ph.D. Thesis, Utrecht University.
- [10] Kuznetsov, A., Kyprianou, A.E. and Rivero, V. (2012) The Theory of Scale Functions for Spectrally Negative Lévy Processes. In: Kuznetsov, A., Kyprianou, A.E. and Rivero, V., Eds., *Lévy Matters II*, Springer, 97-186. https://doi.org/10.1007/978-3-642-31407-0_2

-
- [11] Protter, P.E. (2005) Stochastic Integration and Differential Equations. 2nd Edition, Springer.
 - [12] Karatzas, I. and Shreve, S.E. (1991) Brownian Motion and Stochastic Calculus. 2nd Edition, Springer.
 - [13] Lindvall, T. (1992) Lectures on the Coupling Method. John Wiley & Sons.
 - [14] Thorisson, H. (2000) Coupling, Stationarity, and Regeneration. Springer.
 - [15] Kallenberg, O. (2002) Foundations of Modern Probability. 2nd Edition, Springer.