Statistics and Application 统计学与应用, 2026, 15(5), 208-225
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2026.155120

带有周期漂移自排斥扩散的最小二乘估计

俞乐梵，田琳琳*，闫理坦

东华大学数学与统计学院，上海

收稿日期：2026 年 4 月 27 日；录用日期：2026 年 5 月 19 日；发布日期：2026 年 5 月 28 日

摘 要

本文研究一类由标准布朗运动驱动且带有周期漂移的自排斥扩散模型，若 θ 为未知的自排斥参数，$L(t)$ 为周期的参数函数，本文的主要目的是讨论当 $\theta > 0$ 时参数的估计问题。利用 $L(t)$ 的周期性与 **Frobenius** 矩阵公式，我们建立了参数的最小二乘估计量，并进一步讨论了该估计量的相合性与渐近分布等渐近行为。

关键词

布朗运动，自排斥扩散过程，最小二乘估计，相合性，渐近分布

Least Squares Estimation for a Self-Repelling Diffusion with Periodic Drift

Lefan Yu, Linlin Tian*, Litan Yan

School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: Apr. 27^{th}, 2026; accepted: May 19^{th}, 2026; published: May 28^{th}, 2026

* 通讯作者。

文章引用: 俞乐梵, 田琳琳, 闫理坦. 带有周期漂移自排斥扩散的最小二乘估计 [J]. 统计学与应用, 2026, 15(5): 208-225. DOI: 10.12677/sa.2026.155120

Abstract

In this paper, we consider a self-repelling diffusion model with periodic drift: $L(t)$ is a periodic, parametric function; θ is unknown parameter. The main object of this paper is to study the estimation problem of the parameters when $\theta > 0$. By utilizing the periodicity of $L(t)$ and the Frobenius matrix formula, we have established the least squares estimator of parameters, and we have discussed the asymptotic behavior of the estimator.

Keywords

Brownian Motion, Self-Repelling Diffusion Process, Least Squares Estimation, Consistency, Asymptotic Distribution

1. 引言

1992 年，Durrett 和 Rogers [1] 研究了一个模拟生长聚合物形状的系统。在某些条件下，他们建立了如下随机微分方程解的渐近行为：

$$X_t = B_t + \int_0^t \int_0^s f(X_s - X_u) duds, \tag{1.1}$$

其中 B 是 d 维标准布朗运动，f 是 Lipschitz 连续的。如果 $f(x) = g(x)x/\|x\|$ 且 $g(x) \geq 0$，则 X_t 是 Diaconis 引入并由 Pemantle [2] 研究的连续类似物。解过程 X_t 对应于时刻 t 聚合物末端的位置。该模型是离散图上边（或顶点）自相互作用随机游走概念的连续类似物，定义如下：在每一步，沿边移动的概率与该边的访问次数的函数成正比。这个概念由 Coppersmith 和 Diaconis [3] 于 1986 年首次提出，在线性权重函数的特例下给出了边增强随机游走的开创性定义。

设 $L^X(t,x)$ 为解过程 X 的局部时，则对所有 $t \geq 0$，我们有

$$X_t = X_0 + B_t + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} f(-x) L^X(s, X_s + x) dx$$

此方程说明了过程 X 如何与其自身过去轨迹相互作用的，即自相互作用运动。

一般来说，方程(1.1)在不对 f 做任何假设的情况下定义了一个自相互作用扩散。如果对所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 有 $x \cdot f(x) \geq 0$（相应地，≤ 0），我们将称之为自排斥（相应地，称自吸引）的，换句话说，它更可能远离（相应地，返回）它以前访问过的地方。2002 年，Benaïm 等人 [4] 考虑了一类依赖于卷积的测度的自相互作用扩散。另一方面，受 Chakravarti 和 Sebastian [5] 以及 Cherayil 和 Biswas [6] 的启发，Yan 等人 [7] 考虑了线性自排斥扩散的最小二乘估计：

$$X_t^H = B_t^H + \theta \int_0^t \int_0^s (X_s^H - X_u^H) du ds + \nu t, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

其中 $X_0^H = 0$，B^H 是 Hurst 参数为 $\frac{1}{2} \leq H < 1$ 的分数布朗运动。

方程(1.2)的解是一个高斯过程，当 $\theta < 0$ 时，Yan 等人 [7] 证明了解几乎必然收敛且依 L^2 收敛到一个正态随机变量（当 t 趋于无穷时）。此外，众所周知，由 fBm 驱动的随机方程的统计推断是概率论及其应用中的一个近期研究课题。它仅在 1990 年代发展了关于 fBm 的随机微积分之后才出现。关于有限维方程参数估计的结果，我们参考 Berzin 等人 [8]、Es-Sebaiy [9]、Es-Sebaiy 和 Nourdin [10]、Hu 和 Nualart [11]、Kleptsyna 和 Le Breton [12]、Prakasa Rao [13] 等人的工作及其参考文献。

2010 年，Dehling 等人 [14] 考虑到在许多实际应用中，由于季节性模式或过程的长期趋势，常数均值水平的假设是不合适的。因此，他们提出了如下形式的周期均值回归 Ornstein-Uhlenbeck 过程：

$$dX_t = (L(t) - \alpha X_t)dt + \sigma dB_t, \quad t \geq 0, X_0 = \zeta, \tag{1.3}$$

其中 $L(t)$ 是时变均值回归水平，α, σ 是正常数，ζ 是与布朗运动 $(B_t)_{t\geq 0}$ 独立的实值随机变量且满足 $E(\zeta^2) < \infty$。他们应用基于时间连续观测的漂移参数最大似然估计，并证明了当观测周期数趋于无穷时具有强相合性和渐近正态性。

值得指出的是，在许多实际系统中，外部环境的周期性作用与系统对自身的反馈效应往往是同时存在的。一方面，周期性漂移可以描述由外部环境变化所引起的规则性驱动，例如温度、光照、电磁场强度或介质性质随时间呈现的周期波动；另一方面，自排斥项则反映粒子或系统状态对历史轨迹的回避倾向。例如，在一个理想化的粒子运动模型中，可以将 X_t 理解为某个受热噪声扰动的粒子在一维介质中的位置。其中，B_t 描述来自微观环境的随机热扰动；周期函数 $L(t)$ 则刻画外部周期性激励，如交变场、周期温控或介质参数的周期变化所产生的确定性驱动；而自排斥项

$$\theta \int_0^t \int_0^s (X_s - X_u) \, du \, ds$$

表示粒子当前运动对其过去轨迹的累积性排斥效应：当粒子在某些区域已停留较多或反复经过时，

该记忆项会推动其偏离先前的位置。参数 θ 用于刻画这种路径记忆效应的强度，而 $\mu_1,\ldots,\mu_p$ 则衡量不同周期基函数 $\phi_1,\ldots,\phi_p$ 所对应外部周期驱动模式的作用幅度。由此，模型不仅能够描述外部周期强迫下的随机演化，还能反映历史路径对未来运动的持续影响，因此比单独的周期漂移模型或单独的自排斥模型更能刻画复杂系统中的实际动力学特征。

基于上述研究背景以及周期驱动与历史路径排斥并存的建模考虑，本文提出了一个带有周期漂移的自排斥扩散模型：

$$X_t = B_t + \theta\int_0^t\int_0^s (X_s - X_u)duds + L(t), \tag{1.4}$$

其中 B_t 是标准布朗运动，$L(t)$ 是周期的参数函数，θ 是未知参数。我们假设

$$L(t) = \sum_{i=1}^p \mu_i\varphi_i(t), \tag{1.5}$$

其中可导函数 $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_p(t)$ 是已知的，$\mu_1,\ldots,\mu_p$ 是未知参数。通过定义过程 $Y_t = \int_0^t (X_t - X_s)ds, t \geq 0$，我们可以将(1.4)简化为

$$X_t = B_t + \theta\int_0^t Y_s ds + \sum_{i=1}^p \mu_i\varphi_i(t). \tag{1.6}$$

我们的目标是研究当 $\theta > 0$ 时参数的估计问题。利用最小二乘法、$L(t)$ 的周期性和 Frobenius 矩阵公式，我们得到参数 $\theta_L = (\mu_1,\ldots,\mu_p,\theta)'$ 的最小二乘估计量如下：

$$\hat{\theta}_L = Q_T^{-1}P_T, \tag{1.7}$$

其中

$$P_T = \left(\int_0^T \varphi_1'(t)dX_t,\ldots,\int_0^T \varphi_p'(t)dX_t, \int_0^T Y_t dX_t\right)',$$

$$Q_T^{-1} = \frac{1}{T}\begin{pmatrix} I_p + \gamma_T\Lambda_T\Lambda_T' & -\gamma_T\Lambda_T \\ -\gamma_T\Lambda_T' & \gamma_T \end{pmatrix},$$

这里，γ_T 和 Λ_T 定义为

$$\gamma_T = \left(\frac{1}{T}\int_0^T Y_t^2(t)dt - \sum_{i=1}^p \Lambda_{T,i}^2\right)^{-1},$$

$$\Lambda_T = (\Lambda_{T,1},\ldots,\Lambda_{T,p})',$$

$$\Lambda_{T,i} = \frac{1}{T}\int_0^T Y_t\varphi_i'(t)dt, \quad i = 1,\ldots,p.$$

假设 $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_p(t)$ 收敛且它们的导数都收敛，我们证明了当 T 趋于无穷时估计量的强相合性，即

$$\hat{\theta}_L \to \theta_L \quad a.s. \quad (T\to\infty). \tag{1.8}$$

此外，我们证明了当 T 趋于无穷时以下收敛成立：

$$\frac{1}{\sqrt{T}}e^{\frac{1}{2}\theta T^2}(\hat{\theta}-\theta)\to\frac{\xi_\infty+2\theta N}{(\xi_\infty+h_\infty)^2}, \tag{1.9}$$

$$\sqrt{T}(\hat{\mu}_k-\mu_k)\to M \tag{1.10}$$

其中 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，$\hat{\mu}_k$ 是 μ_k 的估计量，$k=1,\ldots,p$。此外，M 是标准正态随机变量，$N\sim N(0,\frac{h_\infty^2}{2\theta})$，两者都与布朗运动 B 独立，其中 $\xi_\infty=\int_0^\infty se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}dB_s, h_\infty=\sum_{i=1}^p\mu_i\int_0^\infty se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}\varphi_i'(s)dB_s$.

本文结构如下。第 2 节介绍布朗运动的预备知识。第 3 节建立参数的估计量。第 4 节介绍几个引理并用它们证明估计量 $\hat{\theta}_L$ 的相合性。第 5 节讨论其渐近分布。

2. 预备知识

在本节中，我们简要回顾布朗运动的定义和性质。更多细节和综述可在文献 [15] 中找到。

2.1. 布朗运动

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是概率空间。随机过程是定义在乘积空间 $[0,\infty)\times\Omega$ 上的可测函数 $X(t,\omega)$。特别地，

(a) 对每个 t，$X(t,\cdot)$ 是随机变量；

(b) 对每个 ω，$X(\cdot,\omega)$ 是可测函数（称为样本路径）。

为方便起见，随机变量 $X(t,\cdot)$ 将记为 $X(t)$ 或 X_t。因此，随机过程 $X(t,\omega)$ 也可表示为 $X(t)(\omega)$ 或简记为 $X(t)$ 或 X_t。

定义 2.1. 随机过程 $B(t,\omega)$ 称为布朗运动，如果它满足以下条件：

(1) $P\{\omega;B(0,\omega)=0\}=1$。

(2) 对任意 $0\le s<t$，随机变量 $B(t)-B(s)$ 服从均值为 *0*、方差为 $t-s$ 的正态分布，即对任意 $a<b$，$P\{a\le B(t)-B(s)\le b\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_a^b e^{-x^2/2(t-s)}dx$. *(3)* $B(t,\omega)$ 具有独立增量，即对任意 $0\le t_1<t_2<\ldots<t_n$，随机变量 $B(t_1),B(t_2)-B(t_1),\ldots,B(t_n)-B(t_{n-1})$ 相互独立。

(4) $B(t,\omega)$ 的几乎所有样本路径都是连续函数，即 $P\{\omega;B(\cdot,\omega)\ \text{是连续的}\}=1$.

设 $B(t)$ 是一个固定的布朗运动。下面我们给出从布朗运动定义直接得出的一些简单性质。

命题 2.2. 对任意 $t>0$，$B(t)$ 服从均值为 *0*、方差为 t 的正态分布。对任意 $s,t\ge0$，我们有 $E[B(s)B(t)]=\min\{s,t\}$。

命题 2.3. 对固定的 $t_0\ge0$，随机过程 $\widetilde{B}(t)=B(t+t_0)-B(t_0)$ 也是布朗运动。

命题 2.4. 对任意实数 $\lambda>0$，随机过程 $\widetilde{B}(t)=B(\lambda t)/\sqrt{\lambda}$ 也是布朗运动。

现在考虑积分 $\int_a^b f(t)dB(t)$, 其中 f 是确定性函数（即不依赖于 ω），$B(t,\omega)$ 是布朗运动。由于一般情况下这个积分不能定义为 Riemann-Stieltjes 积分，我们需要不同的方法来定义更广泛函数类 $f(t)$ 的积分 $\int_a^b f(t)dB(t)$。这种新的积分称为 f 的 Wiener 积分，对所有 $f\in L^2[a,b]$ 有定义。这里 $L^2[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上所有实值平方可积函数的 Hilbert 空间。

现在我们分两步定义 Wiener 积分：

第一步。 假设 f 是阶梯函数，由 $f=\sum_{i=1}^{n}a_i 1_{[t_{i-1},t_i)}$ 给出，其中 $t_0=a$，$t_n=b$。在这种情况下，定义 $I(f)=\sum_{i=1}^{n}a_i(B(t_i)-B(t_{i-1}))$. 显然，对任意 $a,b\in\mathbb{R}$ 和阶梯函数 f,g，有 $I(af+bg)=aI(f)+bI(g)$。此外，我们有以下引理。

引理 2.5. *对阶梯函数 f，随机变量 $I(f)$ 是均值为 0、方差为 $E(I(f)^2)=\int_a^b f(t)^2dt$ 的高斯随机变量。*

第二步。 我们用 $L^2(\Omega)$ 表示 Ω 上具有内积 $\langle X,Y\rangle=E(XY)$ 的平方可积实值随机变量的 Hilbert 空间。设 $f\in L^2[a,b]$。选择一列阶梯函数 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $f_n\to f$ 在 $L^2[a,b]$ 中。由引理 2.5，序列 $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中是 Cauchy 列。因此它在 $L^2(\Omega)$ 中收敛。定义

$$I(f)=\lim_{n\to\infty}I(f_n),\quad 在L^2(\Omega)\ 中. \tag{2.1}$$

$I(f)$ 是良定义的。

定义 2.6. *设 $f\in L^2[a,b]$。方程(2.1)中定义的极限 $I(f)$ 称为 f 的 Wiener 积分。f 的 Wiener 积分 $I(f)$ 记为 $I(f)(\omega)=\left(\int_a^b f(t)dB(t)\right)(\omega),\quad \omega\in\Omega,\quad$ 几乎必然.*

定理 2.7. *对每个 $f\in L^2[a,b]$，Wiener 积分 $\int_a^b f(t)dB_t$ 是均值为 0、方差为 $\|f\|^2=\int_a^b f(t)^2dt$ 的高斯随机变量。*

推论 2.8. *如果 $f,g\in L^2[a,b]$，则 $E(I(f)I(g))=\int_a^b f(t)g(t)dt$. 特别地，如果 f 和 g 正交，则高斯随机变量 $I(f)$ 和 $I(g)$ 独立。*

2.2. 随机积分

为方便起见，我们将用 $L_{ad}^2([a,b]\times\Omega)$ 表示满足以下条件的所有随机过程 $f(t,\omega),a\le t\le b,\omega\in\Omega$ 的空间：

(1) $f(t,\omega)$ 适应于滤子 $\{\mathcal{F}_t\}$；

(2) $\int_a^b E(|f(t)|^2)dt<\infty$。

我们将使用 Itô 的原始思想来定义 $f\in L_{ad}^2([a,b]\times\Omega)$ 的随机积分 $\int_a^b f(t)dB(t)$。具体细节和步骤见他的论文 [16]。

定理 2.9. *假设 $f\in L_{ad}^2([a,b]\times\Omega)$。则 Itô 积分 $I(f)=\int_a^b f(t)dB(t)$ 是满足 $E(I(f))=0$ 且 $E(|I(f)|^2)=\int_a^b E(|f(t)|^2)dt$ 的随机变量。*

由该定理，Itô 积分 $I: L_{ad}^2([a,b]\times\Omega)\to L^2(\Omega)$ 是等距映射。由于 I 也是线性的，我们有以下推论。

推论 2.10. *对任意 $f,g\in L_{ad}^2([a,b]\times\Omega)$，以下等式成立：*

$$E\left(\int_a^b f(t)dB(t)\int_a^b g(t)dB(t)\right)=\int_a^b E(f(t)g(t))dt.$$

Leibniz-Newton 微积分中的链式法则是对可微函数 f 和 g 的公式 $\frac{d}{dt}f(g(t))=f'(g(t))g'(t)$。它可以重写为积分形式 $f(g(t))-f(g(a))=\int_a^t f'(g(s))g'(s)ds$。另一方面，Itô 微积分中的链式法则，在最简单的情况下，表述为

$$f(B(t)) = f(B(a)) + \int_a^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_a^t f''(B(s))ds$$

对布朗运动 $B(t)$ 和二次连续可微函数 f 成立。

3. 最小二乘估计量

在本节中，我们给出方程(1.6)中参数 $\theta_L = (\mu_1, \ldots, \mu_p, \theta)'$ 的最小二乘估计量，许多思想来自 Dehling [14]。根据 Hu 和 Nualart [11] 的最小二乘法（也见 Hu 等人 [17]），我们考虑以下函数的最小值：

$$\rho(\theta, \mu_i) = \int_0^T \left| \dot{X}_t - \left(\theta Y_t + \sum_{i=1}^p \mu_i \varphi_i'(t) \right) \right|^2 dt. \tag{3.1}$$

通过简化，可以证明

$$\begin{aligned}\rho(\theta, \mu_i) = &\int_0^T \dot{X}_t^2 dt - 2\theta \int_0^T Y_t dX_t + \theta^2 \int_0^T Y_t^2 dt \\ &- 2\sum_{i=1}^p \mu_i \int_0^T \varphi_i'(t) dX_t + 2\theta \sum_{i=1}^p \mu_i \int_0^T Y_t \varphi_i'(t) dt + \int_0^T \left(\sum_{i=1}^p \mu_i \varphi_i'(t) \right)^2 dt.\end{aligned}$$

通过求偏导数，我们得到

$$\frac{\partial \rho(\theta, \mu_i)}{\partial \theta} = -2\int_0^T Y_t dX_t + 2\theta \int_0^T Y_t^2 dt + 2\sum_{i=1}^p \mu_i \int_0^T Y_t \varphi_i'(t) dt, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(\theta, \mu_i)}{\partial \mu_i} = &-2\int_0^T \varphi_i'(t) dX_t + 2\theta \int_0^T Y_t \varphi_i'(t) dt + 2\sum_{k=1, k\neq i}^p \mu_k \int_0^T \varphi_i'(t)\varphi_k'(t) dt \\ &+ 2\mu_i \int_0^T (\varphi_i'(t))^2 dt, \quad i = 1, \ldots, p.\end{aligned} \tag{3.3}$$

将(3.2)和(3.3)中的偏导数设为零，得到一个线性方程组，由此得到最小二乘估计量：

$$\hat{\theta}_L = Q_T^{-1} P_T, \tag{3.4}$$

其中对象 $Q_T \in \mathbb{R}^{(p+1)\times(p+1)}$ 和 $P_T \in \mathbb{R}^{p+1}$ 定义为

$$P_T = \left(\int_0^T \varphi_1'(t) dX_t, \ldots, \int_0^T \varphi_p'(t) dX_t, \int_0^T Y_t dX_t \right)', \tag{3.5}$$

$$Q_T = \begin{pmatrix} G_T & a_T \\ a_T' & b_T \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

其中 $G_T = \left(\int_0^T \varphi_j'(t)\varphi_k'(t) dt \right)_{1\le j,k\le p} \in \mathbb{R}^{p\times p}$，$a_T = \left(\int_0^T Y_t \varphi_1'(t) dt, \ldots, \int_0^T Y_t \varphi_p'(t) dt \right)'$，$b_T =$

$\int_0^T Y_t^2 dt$。

在许多应用中，数据表现出规律的季节性效应。这些可以通过假设函数 $L(t)$ 是周期的来建模，即

$$L(t) = L(t+\nu),$$

其中 ν 是数据中观测到的周期。由于该函数的周期性，得到的随机过程表现出周期性演化。将周期性假设与(1.5)结合，得到要求

$$\varphi_j(t) = \varphi_j(t+\nu),$$

因此

$$\varphi_j'(t) = \varphi_j'(t+\nu).$$

通过应用 Gram-Schmidt 正交化，我们可以不失一般性地假设 $\varphi_1'(t), \dots, \varphi_p'(t)$ 在 L_2 中形成一个标准正交系，即

$$\int_0^\nu \varphi_j'(t)\varphi_k'(t)dt = \begin{cases} \nu, & j=k \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

在本文的其余部分，我们将假设观测到的是周期长度的整数倍，即 $T = N\nu$，其中 N 是某个整数。此外，我们将不失一般性地假设 $\nu = 1$。

在上述假设下，矩阵 Q_T 简化为

$$Q_T = \begin{pmatrix} TI_p & a_T \\ a_T' & b_T \end{pmatrix},$$

其中 I_p 表示 $(p \times p)$ 单位矩阵。这种特殊形式矩阵的逆可以用以下方法显式计算。我们利用以下分块矩阵求逆公式，该公式可从 Frobenius 矩阵求逆公式推导出来。或者，该公式也可以直接验证。

$$\begin{pmatrix} I_p & a \\ a' & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_p + \frac{1}{b-\|a\|^2} aa' & -\frac{1}{b-\|a\|^2} a \\ -\frac{1}{b-\|a\|^2} a' & \frac{1}{b-\|a\|^2} \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^p$ 上的通常欧几里得范数。

由上述结果，我们可以将 Q_T 写成如下形式：

$$Q_T = T \begin{pmatrix} I_p & \Lambda_T \\ \Lambda_T' & \frac{1}{T}\int_0^T Y_t^2 dt \end{pmatrix},$$

其中 $\Lambda_T = (\Lambda_{T,1}, \dots, \Lambda_{T,p})'$，这里 $\Lambda_{T,i} = \frac{1}{T}\int_0^T Y_t \varphi_i'(t)dt, i = 1, \dots, p$。于是应用上述公式，我们可以得到 Q_T^{-1} 如下：

$$Q_T^{-1} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} I_p + \gamma_T \Lambda_T \Lambda_T' & -\gamma_T \Lambda_T \\ -\gamma_T \Lambda_T' & \gamma_T \end{pmatrix},$$

其中

$$\gamma_T = \left(\frac{1}{T} \int_0^T Y_t^2 dt - \sum_{i=1}^{p} \Lambda_{T,i}^2 \right)^{-1}.$$

请注意，Frobenius 矩阵求逆公式当且仅当(3.7)右端矩阵的各元素是良定义时才成立。在第 4 节中，我们将证明 γ_T 的极限大于零，这意味着 Q_T^{-1} 的极限是良定义的。因此，如果 T 足够大，Q_T^{-1} 几乎必然存在。

现在我们可以阐述关于我们模型中最小二乘估计量渐近行为的主要结果。

4. 相合性证明

在本节中，我们考虑当 $\theta > 0$ 时估计量 $\hat{\theta}_L$ 的相合性。我们的主要目标是证明以下定理。

定理 4.1. 设 $\theta > 0$，当 $T \to \infty$ 时，我们有

$$\hat{\theta}_L \to \theta_L \quad a.s.$$

为证明该定理，我们先给出几个引理。

引理 4.2. 设 $\theta > 0$。定义于(3.4)的最小二乘估计量 $\hat{\theta}_L$ 可以写成

$$\hat{\theta}_L = \theta_L + Q_T^{-1} R_T, \tag{4.1}$$

其中 Q_T 定义于(3.6)，且

$$R_T = \begin{pmatrix} \int_0^T \varphi_1'(t) dB_t \\ \vdots \\ \int_0^T \varphi_p'(t) dB_t \\ \int_0^T Y_t dB_t \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

证明. 由(1.6)，我们有

$$dX_t = dB_t + \theta Y_t dt + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \varphi_i'(t) dt.$$

所以

$$\int_0^T \varphi_i'(t) dX_t = \int_0^T \varphi_i'(t) dB_t + \theta \int_0^T \varphi_i'(t) Y_t dt + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \int_0^T \varphi_i'(t) \varphi_j'(t) dt, \quad i = 1, \ldots, p$$

$$\int_0^T Y_t dX_t = \int_0^T Y_t dB_t + \theta \int_0^T Y_t^2 dt + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \int_0^T Y_t \varphi_j'(t) dt.$$

因此，我们有

$$P_T = \begin{pmatrix} \int_0^T \varphi_1'(t)dX_t \\ \vdots \\ \int_0^T \varphi_p'(t)dX_t \\ \int_0^T Y_t dX_t \end{pmatrix} = R_T + Q_T\theta_L. \tag{4.3}$$

从而，$\hat{\theta}_L = \theta_L + Q_T^{-1}R_T$。 □

在下文中，我们将证明当 T 趋于无穷时，$Q_T^{-1}R_T$ 几乎必然收敛于零。这个证明由几个引理支持。

引理 4.3. 随机微分方程(1.5)的解具有显式表示

$$Y_t = e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\int_0^t se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}dB_s + e^{\frac{1}{2}\theta t^2}h(t), \quad t \geq 0, \tag{4.4}$$

其中

$$h(t) = \sum_{i=1}^p \mu_i \int_0^t se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}\varphi_i'(t)ds.$$

证明. 由于

$$\int_0^t f(s)dX_s = f(t)X_t - f(0)X_0 - \int_0^t f'(s)X_s ds.$$

则

$$Y_t = \int_0^t (X_t - X_s)ds = tX_t - \int_0^t X_s ds = \int_0^t s dX_s.$$

结合(1.6)，我们有

$$dY_t = tdB_t + \theta tY_t dt + t\sum_{i=1}^p \mu_i\varphi_i'(t)dt, \quad t \geq 0. \tag{4.5}$$

由常数变易法，方程(4.5)的显式解可表示为

$$Y_t = e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\int_0^t se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}dB_s + e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\sum_{i=1}^p \mu_i\int_0^t se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}\varphi_i'(t)ds, \quad t \geq 0.$$

考虑过程 $\xi_t := \int_0^t se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}dB_s, t \geq 0$，则

$$Y_t = e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t + e^{\frac{1}{2}\theta t^2}h(t), \quad t \geq 0.$$

由假设我们容易知道当 t 趋于无穷时，$h(t)$ 是有界的。 □

引理 4.4. 随机变量

$$\xi_\infty := \int_0^\infty se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}dB_s$$

是良定义的，且它属于 $L^2(\Omega)$ 空间。当 T 趋于无穷时，ξ_T 几乎必然或在 $L^2(\Omega)$ 意义下收敛于 ξ_∞。

由引理 4.4的推论，对任意 $\alpha>0$，当 T 趋于无穷时，$\frac{1}{T^\alpha}\xi_T$ 几乎必然且在 $L^2(\Omega)$ 意义下收敛于 0。

引理 4.5. 对任意有限整数 $p>1$，当 T 趋于无穷时，我们有

$$Te^{-\theta T^2}\int_0^T e^{\theta s^2}\xi_s^p ds \to \frac{1}{2\theta}\xi_\infty^p, \quad a.s.$$

上述两个引理的证明参见论文 [18] 中的引理 3.2 和引理 3.3，这里不再赘述。

利用上述引理，我们现在证明定理 4.1。我们的目标是证明当 T 趋于无穷时，$Q_T^{-1}R_T$ 几乎必然收敛于零。

证明. 我们将 $Q_T^{-1}R_T$ 表示为分块矩阵形式：

$$\begin{aligned}Q_T^{-1}R_T &= \frac{1}{T}\begin{pmatrix} I_p+\gamma_T\Lambda_T\Lambda_T' & -\gamma_T\Lambda_T \\ -\gamma_T\Lambda_T' & \gamma_T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\int_0^T\varphi_1'(t)dB_t \\ \vdots \\ \int_0^T\varphi_p'(t)dB_t \\ \int_0^T Y_t dB_t\end{pmatrix} \\ &= (A_1,\ldots,A_p,A_{p+1}^{(1)}+A_{p+1}^{(2)})',\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}A_k &= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^p(1+\gamma_T\Lambda_{T,k}\Lambda_{T,i})\int_0^T\varphi_i'(t)dB_t-\frac{1}{T}\gamma_T\Lambda_{T,k}\int_0^T Y_t dB_t, \quad k=1,\ldots,p, \\ A_{p+1}^{(1)} &= -\frac{1}{T}\sum_{i=1}^p\gamma_T\Lambda_{T,i}\int_0^T\varphi_i'(t)dB_t, \\ A_{p+1}^{(2)} &= \frac{1}{T}\gamma_T\int_0^T Y_t dB_t.\end{aligned}$$

为叙述方便，设

$$\Psi(T)=\int_0^T Y_t^2dt-T\sum_{i=1}^p\Lambda_{T,i}^2, \tag{4.6}$$

则 $\frac{1}{T}\gamma_T=\Psi(T)^{-1}$。我们可以将上述方程写成

$$\begin{aligned}A_k &= \sum_{i=1}^p\left(\frac{1}{T}+\frac{\Lambda_{T,k}\Lambda_{T,i}}{\Psi(T)}\right)\int_0^T\varphi_i'(t)dB_t-\frac{1}{\Psi(T)}\Lambda_{T,k}\int_0^T Y_t dB_t, \quad k=1,\ldots,p, \\ A_{p+1}^{(1)} &= -\frac{1}{\Psi(T)}\sum_{i=1}^p\Lambda_{T,i}\int_0^T\varphi_i'(t)dB_t, \\ A_{p+1}^{(2)} &= \frac{\int_0^T Y_t dB_t}{\Psi(T)}.\end{aligned}$$

下面分别证明 $A_k, A_{p+1}^{(1)}, A_{p+1}^{(2)}$ 中各项的收敛性。

(I) $\Psi(T)$

我们考虑 $Te^{-\theta T^2}\Psi(T)$ 的有界性。注意到

$$Te^{-\theta T^2}\int_0^T Y_t^2dt = Te^{-\theta T^2}\int_0^T e^{\theta t^2}\xi_t^2dt + Te^{-\theta T^2}\int_0^T e^{\theta t^2}h(t)^2dt$$
$$+ Te^{-\theta T^2}\int_0^T 2e^{\theta t^2}\xi_t h(t)dt.$$

结合引理 4.5和 L'Hôpital 法则，我们得到当 T 趋于无穷时，几乎必然有

$$Te^{-\theta T^2}\int_0^T e^{\theta t^2}\xi_t^2dt \to \frac{1}{2\theta}\xi_\infty^2,$$
$$Te^{-\theta T^2}\int_0^T e^{\theta t^2}h(t)^2dt < \infty,$$
$$Te^{-\theta T^2}\int_0^T 2e^{\theta t^2}\xi_t h(t)dt < \infty.$$

因此

$$Te^{-\theta T^2}\int_0^T Y_t^2dt < \infty \quad a.s. \tag{4.7}$$

当 T 趋于无穷时。

接下来考虑 $Te^{-\theta T^2}\cdot T\sum_{i=1}^p \Lambda_{T,i}^2$，我们看到对 $i=1,\dots,p$，

$$Te^{-\theta T^2}\cdot T\Lambda_{T,i}^2 = T^2e^{-\theta T^2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T Y_t\varphi_i'(t)dt\right)^2$$
$$= \frac{1}{T^2}\left(Te^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t\varphi_i'(t)dt\right)^2$$
$$= \frac{1}{T^2}\left(Te^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t\varphi_i'(t)dt + Te^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}h(t)\varphi_i'(t)dt\right)^2.$$

根据 L'Hôpital 法则，我们可以推断

$$Te^{-\theta T^2}\cdot T\sum_{i=1}^p \Lambda_{T,i}^2 < \infty \quad a.s. \tag{4.8}$$

当 T 趋于无穷时。

因此，结合(4.7)和(4.8)，容易看出当 T 趋于无穷时，

$$Te^{-\theta T^2}\Psi(T) < \infty \quad a.s. \tag{4.9}$$

(II) $\Lambda_{T,i}$

由于

DOI: 10.12677/sa.2026.155120

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\Lambda_{T,i} &= e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\frac{1}{T}\int_0^T Y_t\varphi_i'(t)dt \\
&= \frac{1}{T}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t\varphi_i'(t)dt + \frac{1}{T}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}h(t)\varphi_i'(t)dt, \\
Te^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\Lambda_{T,i} &= e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t\varphi_i'(t)dt + e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}h(t)\varphi_i'(t)dt.
\end{aligned}
$$

我们有

$$
e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\Lambda_{T,i} \to 0 \quad a.s., \tag{4.10}
$$

$$
Te^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\Lambda_{T,i} \to 0 \quad a.s. \tag{4.11}
$$

对 $i = 1, \ldots, p$，当 T 趋于无穷时。

(III) $\int_0^T Y_t dB_t$ 和 $\int_0^T \varphi_i'(t)dB_t$

注意到

$$
\begin{aligned}
T\int_0^T Y_t dB_t &= TY_TB_T - T\int_0^T B_t dY_t \\
&= TY_TB_T - T\int_0^T B_t d\left(e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t + e^{\frac{1}{2}\theta t^2}h(t)\right) \\
&= TY_TB_T - T\theta\int_0^T te^{\frac{1}{2}\theta t^2}B_t\xi_t dt - T\int_0^T tB_t dB_t \\
&\quad - T\int_0^T te^{\frac{1}{2}\theta t^2}B_t h(t)dt - T\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}B_t h'(t)dt.
\end{aligned}
$$

结合引理 4.5和 L'Hôpital 法则，容易看出

$$
T^{-1}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t dB_t \to 0 \quad a.s. \tag{4.12}
$$

类似地，当 T 趋于无穷时，

$$
e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T \varphi_i'(t)dB_t = e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\varphi_i'(T)B_T - e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T \varphi_i''(t)B_t dt \to 0 \quad a.s.
$$

最后，我们有

$$
\begin{aligned}
A_k &= \sum_{i=1}^p\left(\frac{1}{T} + \frac{\Lambda_{T,k}\Lambda_{T,i}}{\Psi(T)}\right)\int_0^T \varphi_i'(t)dB_t - \frac{1}{\Psi(T)}\Lambda_{T,k}\int_0^T Y_t dB_t \\
&= \sum_{i=1}^p \frac{1}{T}\int_0^T \varphi_i'(t)dB_t + \sum_{i=1}^p \frac{Te^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\Lambda_{T,k}\Lambda_{T,i}}{Te^{-\theta T^2}\Psi(T)}\left(e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T \varphi_i'(t)dB_t\right) \\
&\quad - \frac{T^2e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\Lambda_{T,k}}{Te^{-\theta T^2}\Psi(T)}\left(T^{-1}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t dB_t\right) \to 0, \quad a.s.
\end{aligned}
$$

对 $k = 1, \dots, p$。

$$A_{p+1}^{(1)} = -\frac{1}{\Psi(T)} \sum_{i=1}^{p} \Lambda_{T,i} \int_0^T \varphi_i'(t) dB_t$$
$$= -\frac{\sum_{i=1}^{p} T e^{-\frac{1}{2}\theta T^2} \Lambda_{T,i}}{T e^{-\theta T^2} \Psi(T)} \left(e^{-\frac{1}{2}\theta T^2} \int_0^T \varphi_i'(t) dB_t \right) \to 0, \quad a.s.,$$

$$A_{p+1}^{(2)} = \frac{\int_0^T Y_t dB_t}{\Psi(T)} = \frac{T^2 e^{-\frac{1}{2}\theta T^2} \left(T^{-1} e^{-\frac{1}{2}\theta T^2} \int_0^T Y_t dB_t \right)}{T e^{-\theta T^2} \Psi(T)} \to 0, \quad a.s.$$

当 T 趋于无穷时。 □

5. 渐近分布

在本节中，我们证明 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\mu}_k, k = 1, \dots, p$ 的渐近分布。记

$$h_\infty = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \int_0^\infty s e^{-\frac{1}{2}\theta s^2} \varphi_i'(s) ds. \tag{5.1}$$

显然其收敛性成立。

引理 5.1. 设 $\theta > 0$。则当 T 趋于无穷时，以下收敛成立：

$$\sqrt{T} e^{-\frac{1}{2}\theta T^2} \int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2} h(t) dB_t \to N\left(0, \frac{h_\infty^2}{2\theta}\right), \tag{5.2}$$

$$\sqrt{T} e^{-\frac{1}{2}\theta T^2} \xi_T \int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2} dB_t \to \frac{1}{2\theta} \xi_\infty. \tag{5.3}$$

证明. 均值为零的正态随机序列依分布收敛于正态随机变量，等价于它们的二阶矩收敛于正常数，因此我们只需证明以下收敛成立。由 L'Hôpital 法则，我们有

$$E\left(\sqrt{T} e^{-\frac{1}{2}\theta T^2} \int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2} h(t) dB_t\right)^2 = T e^{-\theta T^2} \int_0^T e^{\theta t^2} h(t)^2 dt \to \frac{h_\infty^2}{2\theta}$$

和

$$E\left(\sqrt{T} e^{-\frac{1}{2}\theta T^2} \int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2} dB_t\right)^2 = T e^{-\theta T^2} \int_0^T e^{\theta t^2} dt \to \frac{1}{2\theta},$$

当 T 趋于无穷时。结合 Slutsky 定理，我们完成了证明，且两者的独立性是显然的。 □

引理 5.2. 设 $\theta > 0$。则我们有

$$T e^{-\theta T^2} \Psi(T) \to \frac{(\xi_\infty + h_\infty)^2}{2\theta} \tag{5.4}$$

几乎必然成立，当 T 趋于无穷时，其中 $\Psi(T)$ 由(4.6)定义。

证明. 首先，我们可以展开以下公式

$$Te^{-\theta T^2}\int_0^T Y_t^2dt = Te^{-\theta T^2}\left(\int_0^T e^{\theta t^2}\xi_t^2dt + \int_0^T e^{\theta t^2}h(t)^2dt + \int_0^T 2e^{\theta t^2}\xi_t h(t)dt\right).$$

此外，L'Hôpital 法则和引理 4.5意味着当 T 趋于无穷时，几乎必然有

$$Te^{-\theta T^2}\int_0^T e^{\theta t^2}\xi_t^2dt \to \frac{1}{2\theta}\xi_\infty^2,$$
$$Te^{-\theta T^2}\int_0^T e^{\theta t^2}h(t)^2dt \to \frac{h_\infty^2}{2\theta},$$
$$Te^{-\theta T^2}\int_0^T 2e^{\theta t^2}\xi_t h(t)dt \to \frac{\xi_\infty h_\infty}{\theta}.$$

所以当 T 趋于无穷时，

$$Te^{-\theta T^2}\int_0^T Y_t^2dt \to \frac{(\xi_\infty + h_\infty)^2}{2\theta} \quad a.s.$$

类似地，当 T 趋于无穷时，我们也有

$$e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t\varphi_i'(t)dt = e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\left(\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t\varphi_i'(t)dt + \int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}h(t)\varphi_i'(t)dt\right) \to 0 \quad a.s.$$

因此，我们证明了当 T 趋于无穷时，几乎必然有

$$\begin{aligned}Te^{-\theta T^2}\Psi(T) &= Te^{-\theta T^2}\left(\int_0^T Y_t^2dt - T\sum_{i=1}^p \Lambda_{T,i}^2\right)\\ &= Te^{-\theta T^2}\int_0^T Y_t^2dt - \sum_{i=1}^p\left(e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t\varphi_i'(t)dt\right)^2 \to \frac{(\xi_\infty + h_\infty)^2}{2\theta}.\end{aligned}$$

□

定理 5.3. 设 $\theta > 0$。则当 T 趋于无穷时，以下收敛成立：

$$\frac{1}{\sqrt{T}}e^{\frac{1}{2}\theta T^2}(\hat{\theta} - \theta) \to \frac{\xi_\infty + 2\theta N}{(\xi_\infty + h_\infty)^2}, \tag{5.5}$$

$$\sqrt{T}(\hat{\mu}_k - \mu_k) \to M \tag{5.6}$$

其中 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，$\hat{\mu}_k$ 是 μ_k 的估计量，$k = 1, \ldots, p$。此外，M 是标准正态随机变量，$N \sim N(0, \frac{h_\infty^2}{2\theta})$，两者都与布朗运动 B 独立。

证明. 回忆 $\theta_L = (\mu_1, \ldots, \mu_p, \theta)'$ 且

$$(\hat{\theta}_L - \theta_L) = (A_1, \ldots, A_p, A_{p+1}^{(1)} + A_{p+1}^{(2)})'.$$

对所有 $T>0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{T}}e^{\frac{1}{2}\theta T^2}\left(A_{p+1}^{(1)}+A_{p+1}^{(2)}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{T}\Psi(T)}\left(e^{\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t dB_t-e^{\frac{1}{2}\theta T^2}\sum_{i=1}^p\Lambda_{T,i}\int_0^T\varphi_i'(t)dB_t\right)\\
&=\frac{\gamma_1(T)-\gamma_2(T)}{\Psi(T)}.
\end{aligned}$$

显然，由引理 4.3和引理 4.5，我们发现

$$\begin{aligned}
Te^{-\theta T^2}\gamma_2(T)&=\sqrt{T}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\sum_{i=1}^p\Lambda_{T,i}\int_0^T\varphi_i'(t)dB_t\\
&=\sum_{i=1}^p\left(T^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\Lambda_{T,i}\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T\varphi_i'(t)dB_t\right)\to 0
\end{aligned}$$

几乎必然成立，当 T 趋于无穷时。接下来我们考虑 $\gamma_1(T)$ 的渐近分布。对所有 $T>0$，我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t dB_t&=\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\left(\int_0^t se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}dB_s\right)dB_t\\
&=\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\left(\int_0^T se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}dB_s\right)dB_t-\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\left(\int_t^T se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}dB_s\right)dB_t\\
&=\xi_T\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}dB_t-\int_0^T se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}\left(\int_0^s e^{\frac{1}{2}\theta t^2}dB_t\right)dB_s.
\end{aligned}$$

结合以下事实

$$E\left(e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T se^{-\frac{1}{2}\theta s^2}\left(\int_0^s e^{\frac{1}{2}\theta t^2}dB_t\right)dB_s\right)^2\to 0,\quad (T\to\infty)$$

和 Slutsky 定理，我们得到收敛

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_1(T)}{\Psi(T)}&=\frac{1}{\sqrt{T}e^{-\theta T^2}\Psi(T)}e^{-\theta T^2}\cdot e^{\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t dB_t\\
&=\frac{1}{\sqrt{T}e^{-\theta T^2}\Psi(T)}\left(e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t dB_t+e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}h(t)dB_t\right)\\
&=\frac{1}{Te^{-\theta T^2}\Psi(T)}\sqrt{T}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\xi_T\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}dB_t+\frac{1}{Te^{-\theta T^2}\Psi(T)}\sqrt{T}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}h(t)dB_t\\
&\to\frac{\xi_\infty+2\theta N}{(\xi_\infty+h_\infty)^2}
\end{aligned}$$

当 T 趋于无穷时成立，其中

$$N\sim N\left(0,\frac{h_\infty^2}{2\theta}\right).$$

通过观察，不难意识到 $(\hat{\mu}_k - \mu_k)$ 可以用 $(\hat{\theta} - \theta)$ 表示。因此

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\hat{\mu}_k - \mu_k) &= \sqrt{T}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \varphi_i'(t)dB_t - \frac{1}{T}(\hat{\theta}-\theta)\int_0^T Y_t\varphi_k'(t)dt\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \varphi_i'(t)dB_t - \frac{1}{\sqrt{T}}e^{\frac{1}{2}\theta T^2}(\hat{\theta}-\theta)\left(e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t\varphi_k'(t)dt\right)\\ &\to M.\end{aligned}$$

我们注意到在假设下，

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \varphi_i'(t)dB_t\right)^2 = 1.$$

因此 $M \sim N(0,1)$。

两个均值为零的正态随机序列独立，等价于它们乘积的期望趋于 0。当 T 趋于无穷时，显然对任意固定的 $s > 0$，我们有

$$\begin{aligned}&E\left(B_s\sqrt{T}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\xi_T\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}dB_t\right) \to 0,\\ &E\left(B_s\sqrt{T}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T e^{\frac{1}{2}\theta t^2}h(t)dB_t\right) \to 0,\\ &E\left(B_s\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \varphi_i'(t)dB_t\right) \to 0.\end{aligned}$$

因此 M 和 N 都与布朗运动 B 独立。 □

参考文献

[1] Durrett, R.T. and Rogers, L.C.G. (1992) Asymptotic Behavior of Brownian Polymers. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349. https://doi.org/10.1007/bf01300560

[2] Pemantle, R. (1988) Phase Transition in Reinforced Random Walk and RWRE on Trees. *The Annals of Probability*, **16**, 1229-1241. https://doi.org/10.1214/aop/1176991687

[3] Coppersmith, D. and Diaconis, P. (1986) Random Walks with Reinforcement. Unpublished Manuscript.

[4] Benaïm, M., Ledoux, M. and Raimond, O. (2002) Self-Interacting Diffusions. *Probability Theory and Related Fields*, **122**, 1-41. https://doi.org/10.1007/s004400100161

[5] Chakravarti, N. and Sebastian, K.L. (1997) Fractional Brownian Motion Models for Polymers. *Chemical Physics Letters*, **267**, 9-13. https://doi.org/10.1016/s0009-2614(97)00075-4

[6] Cherayil, B.J. and Biswas, P. (1993) Path Integral Description of Polymers Using Fractional Brownian Walks. *The Journal of Chemical Physics*, **99**, 9230-9236. https://doi.org/10.1063/1.465539

[7] Yan, L., Sun, Y. and Lu, Y. (2007) On the Linear Fractional Self-Attracting Diffusion. *Journal of Theoretical Probability*, **21**, 502-516. https://doi.org/10.1007/s10959-007-0113-y

[8] Berzin, C., Latour, A. and Leon, J.R. (2014) Inference on the Hurst Parameter and the Variance of Diffusions Driven by Fractional Brownian Motion. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-07875-5

[9] Es-Sebaiy, K. (2013) Berry-Esséen Bounds for the Least Squares Estimator for Discretely Observed Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Statistics & Probability Letters*, **83**, 2372-2385. https://doi.org/10.1016/j.spl.2013.06.032

[10] Es-Sebaiy, K. and Nourdin, I. (2013) Parameter Estimation for A-Fractional Bridges. In: Viens, F., Feng, J., Hu, Y. and Nualart, E., Eds., *Malliavin Calculus and Stochastic Analysis*, Springer, 385-412. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5906-4_17

[11] Hu, Y. and Nualart, D. (2010) Parameter Estimation for Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Statistics & Probability Letters*, **80**, 1030-1038. https://doi.org/10.1016/j.spl.2010.02.018

[12] Kleptsyna, M.L. and Le Breton, A. (2002) Statistical Analysis of the Fractional Ornstein-Uhlenbeck Type Process. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **5**, 229-248. https://doi.org/10.1023/a:1021220818545

[13] Prakasa Rao, B.L.S. (2010) Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes. John Wiley and Sons Ltd.

[14] Dehling, H., Franke, B. and Kott, T. (2010) Drift Estimation for a Periodic Mean Reversion Process. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **13**, 175-192. https://doi.org/10.1007/s11203-010-9045-8

[15] Kuo, H.H. (2006) Introduction to Stochastic Integration. Springer.

[16] Itô, K. (1944) Stochastic Integral. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, **20**, 519-524. https://doi.org/10.3792/pia/1195572786

[17] Hu, Y., Nualart, D. and Zhou, H. (2017) Parameter Estimation for Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes of General Hurst Parameter. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **22**, 111-142. https://doi.org/10.1007/s11203-017-9168-2

[18] Yaohong, G. and Litan, Y. (2018) Least Squares Estimation for a Linear Self-Repelling Diffusion Driven by Fractional Brownian Motion. *Scientia Sinica Mathematica*, **48**, 1143-1158. https://doi.org/10.1360/scm-2017-0387