

随机 Burgers 方程的时间二次变差

韦思婷, 田琳琳*, 闫理坦

东华大学数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2026 年 4 月 9 日; 录用日期: 2026 年 4 月 29 日; 发布日期: 2026 年 5 月 12 日

摘要

本文研究加性时空白噪声驱动下随机 Burgers 方程解的时间二次变差的渐近行为, 严格证明其重整化序列几乎必然且均方收敛于常数, 并据此构造出未知扩散参数的强相合估计量。

关键词

随机 Burgers 方程, 时间二次变差, 渐近行为, 参数估计

Temporal Quadratic Variation for the Stochastic Burgers Equation

Siting Wei, Linlin Tian*, Litan Yan

College of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: Apr. 9th, 2026; accepted: Apr. 29th, 2026; published: May 12st, 2026

Abstract

This paper investigates the asymptotic behavior of the temporal quadratic variation for

* 通讯作者。

the stochastic Burgers equation driven by additive space-time white noise. We prove the almost sure and $L^2(\Omega)$ convergence of its renormalized sequence to a constant, yielding a strongly consistent estimator for the unknown diffusion parameter.

Keywords

Stochastic Burgers Equation, Temporal Quadratic Variation, Asymptotic Behavior, Parameter Estimation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

考虑如下由加性时空白噪声驱动随机 Burgers 方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u(t, x)^2) + \dot{W}(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}. \quad (1)$$

其中, 初值 $u(0, x) = 0$ ($x \in \mathbf{R}$), 待估扩散参数 $\theta > 0$; $W = \{W(t, x), t \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$ 为完备带流概率空间上的时空白噪声, 其协方差满足

$$\mathbb{E}[W(t, A)W(s, B)] = (t \wedge s)\lambda(A \cap B),$$

式中 λ 表示 \mathbf{R} 上的 Lebesgue 测度。随机 Burgers 方程解的适定性与轨道正则性等基础理论已有广泛研究 (参见文献 [1–5])。在参数推断领域, 基于离散观测的 p -次变差法已成为分析随机偏微分方程的重要工具 [6–10]。然而, 受非线性项的干扰, 针对随机 Burgers 方程的参数推断成果较少。现有文献中, Assaad 与 Tudor [11] 曾基于空间二次与时间四次变差构造了 θ 的强相合估计量。相比之下, 时间二次变差在基于高频数据的实际计算中具备更强的基础性, 同时对随机过程矩条件的要求更低。

为此, 本文借鉴 Olivera 与 Tudor [12] 处理变差渐近极限的方法论, 首先基于解的分解技巧, 证明了标准方程 ($\theta = 1$) 解的重整化时间二次变差几乎必然且在均方收敛于常数。随后, 借助时间尺度变换将该极限结果推广至一般情形, 并据此构造出未知参数 θ 的强相合估计量。

2. 预备知识

取 $\theta = 1$ 时, 方程 (1) 的温和解可直接分解为线性项 $X(t, x)$ 与非线性项 $Y(t, x)$ 之和, 即:

$$u(t, x) = X(t, x) + Y(t, x), \quad t \in [0, T], x \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

其中, 各项具体定义为:

$$X(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} G_{t-s}(x-y) W(ds, dy), \quad (3)$$

$$Y(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial y} G_{t-s}(x-y) u(s, y)^2 dy ds. \quad (4)$$

式中 $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ 为热核, 关于 W 的积分为 Itô 积分。

固定 $x \in \mathbf{R}$, 设 $t_i = iT/N$ ($i = 0, 1, \dots, N$) 为区间 $[0, T]$ 上的均匀分割。定义重整化的时间二次变差泛函为:

$$T_N^x(u) = N^{-1/2} \sum_{i=1}^N (u(t_i, x) - u(t_{i-1}, x))^2. \quad (5)$$

下述两项引理分别给出了过程 X 与 Y 增量的矩估计及渐近行为, 为后续极限定理的证明奠定基础。

引理 1 [12, 13] 针对式 (3) 定义的过程 X , 成立以下结论:

(i) 对任意 $p \geq 1$, 存在常数 $C = C(p, T) > 0$, 使得对任意 $s, t \in [0, T]$ 及 $x, y \in \mathbf{R}$ 有:

$$\mathbb{E}[|X(t, x) - X(s, y)|^p] \leq C(|t - s|^{p/4} + |x - y|^{p/2}). \quad (6)$$

(ii) 记 $T_N^x(X) = N^{-1/2} \sum_{i=1}^N (X(t_i, x) - X(t_{i-1}, x))^2$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N^x(X) = \sqrt{\frac{T}{\pi}} \quad \text{a.s. 且在 } L^2(\Omega) \text{ 中}. \quad (7)$$

引理 2 [11] 针对式 (4) 定义的过程 Y , 对任意 $t \in [0, T]$ 、 $h \in [0, T - t]$ 、 $x \in \mathbf{R}$ 、 $p \geq 1$ 以及 $\beta \in (1, \frac{4}{3})$, 存在常数 $C = C(p, T, \beta) > 0$, 使得:

$$\mathbb{E}[|Y(t+h, x) - Y(t, x)|^p] \leq Ch^{p(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2})}. \quad (8)$$

3. 时间二次变差的极限

本节旨在构建解 (2) 的时间二次变差的渐近极限。

定理 1 固定 $x \in \mathbf{R}$, 设 $\{T_N^x(u)\}_{N \geq 1}$ 为由式 (5) 定义的重整化变差序列。当 $N \rightarrow \infty$ 时,

下述渐近等式成立:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N^x(u) = \sqrt{\frac{T}{\pi}} \quad \text{a.s. 且在 } L^2(\Omega) \text{ 中.} \quad (9)$$

证明 设随机过程 $Z \in \{u, X, Y\}$, 记时间增量为 $\Delta_i Z = Z(t_i, x) - Z(t_{i-1}, x)$ 。基于温和解的分解, 可将变差重写为:

$$T_N^x(u) = T_N^x(X) + T_N^x(Y) + 2I_N^x, \quad (10)$$

其中交叉项为 $I_N^x = N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \Delta_i X \Delta_i Y$ 。由引理 1(ii) 可知, 主导项 $T_N^x(X)$ 几乎必然且在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 $\sqrt{T/\pi}$ 。因此, 为确立最终极限, 只需证明 $T_N^x(Y)$ 与 I_N^x 在相同意义下收敛于 0。

综合运用 Hölder 不等式及引理 2, 对任意 $p \geq 1$ 及 $\beta \in (1, \frac{4}{3})$, 存在与 N 无关的常数 $C > 0$ 使得:

$$\mathbb{E}[|T_N^x(Y)|^p] \leq N^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[|\Delta_i Y|^{2p}] \leq CN^{\frac{p}{2}} \left(\frac{T}{N}\right)^{2p(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{2})} \leq CN^p \left(\frac{3}{2}-\frac{2}{\beta}\right). \quad (11)$$

同理, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 并结合引理 1(i) 与引理 2, 对交叉项 I_N^x 进行放缩:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|I_N^x|^p] &\leq N^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=1}^N \left(\mathbb{E}[|\Delta_i X|^{2p}] \cdot \mathbb{E}[|\Delta_i Y|^{2p}]\right)^{1/2} \\ &\leq CN^{\frac{p}{2}} \left(\left(\frac{T}{N}\right)^{\frac{2p}{4}} \cdot \left(\frac{T}{N}\right)^{2p(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{2})}\right)^{1/2} \leq CN^p \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{\beta}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

鉴于 $\beta \in (1, \frac{4}{3})$, 式 (11) 与 (12) 中的指数均严格小于 0。任取充分小的常数 $\gamma \in (0, \frac{1}{\beta} - \frac{3}{4})$, 由 Markov 不等式可得:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|T_N^x(Y)| \geq N^{-\gamma}) &\leq N^{\gamma p} \mathbb{E}[|T_N^x(Y)|^p] \leq CN^p \left(\frac{3}{2}-\frac{2}{\beta}+\gamma\right), \\ \mathbb{P}(|I_N^x| \geq N^{-\gamma}) &\leq N^{\gamma p} \mathbb{E}[|I_N^x|^p] \leq CN^p \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{\beta}+\gamma\right). \end{aligned}$$

选取充分大的 p , 使得 $p(\frac{3}{2} - \frac{2}{\beta} + \gamma) < -1$ 且 $p(\frac{3}{4} - \frac{1}{\beta} + \gamma) < -1$ 。由 Borel-Cantelli 引理即知, 当 $N \rightarrow \infty$ 时 $T_N^x(Y) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ 且 $I_N^x \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ 。

此外, 分别在式 (11) 与 (12) 中直接取 $p = 2$, 当 N 趋于无穷时, 有 $\mathbb{E}[|T_N^x(Y)|^2] \rightarrow 0$ 且 $\mathbb{E}[|I_N^x|^2] \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), 蕴含了两者在 $L^2(\Omega)$ 中的收敛性。至此, 定理得证。□

4. 扩散参数的强相合估计

基于时间二次变差的渐近极限, 本节旨在构造方程 (1) 中未知扩散参数 $\theta > 0$ 的估计量。在初始条件 $u_\theta(0, x) = 0$ 下, 方程 (1) 的温和解可表示为:

$$u_\theta(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial y} G_{\theta(t-s)}(x-y) u_\theta(s, y)^2 dy ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} G_{\theta(t-s)}(x-y) W(ds, dy). \quad (13)$$

固定 $x \in \mathbf{R}$, 令 $t_i = iT/N$ ($i = 0, \dots, N$) 为区间 $[0, T]$ 上的均等剖分, 定义时间二次变差:

$$T_N^x(u_\theta) = N^{-1/2} \sum_{i=1}^N (u_\theta(t_i, x) - u_\theta(t_{i-1}, x))^2.$$

为分离扩散参数 θ , 引入如下时间尺度变换。

命题 1 对于 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}$, 记 $v_\theta(t, x) = u_\theta\left(\frac{t}{\theta}, x\right)$ 。则 v_θ 可以分解为:

$$v_\theta(t, x) = \theta^{-1/2} X(t, x) + \theta^{-1} Y_\theta(t, x), \tag{14}$$

其中 X 为满足式 (3) 的标准线性随机热方程的解, 非线性项 Y_θ 满足:

$$Y_\theta(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial y} G_{t-s}(x-y) u_\theta\left(\frac{s}{\theta}, y\right)^2 dy ds. \tag{15}$$

证明 将 t 替换为 t/θ 代入式 (13), 结合时空白噪声的分布缩放性质 $W(d(s/\theta), dy) \stackrel{d}{=} \theta^{-1/2} \tilde{W}(ds, dy)$ (其中 \tilde{W} 亦为标准时空白噪声) 即得。详细推导参见文献 [11] 的命题 3 与命题 4。 \square

基于上述变换与分解式, 以下给出解 u_θ 的时间二次变差的渐近性质。

命题 2 设 u_θ 由式 (13) 定义, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 成立:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N^x(u_\theta) = \sqrt{\frac{T}{\pi\theta}} \text{ a.s. 且在 } L^1(\Omega) \text{ 中.} \tag{16}$$

证明 记新的时间节点 $\tilde{t}_i = i\theta T/N$, 由轨道等式 $u_\theta(t_i, x) = v_\theta(\tilde{t}_i, x)$ 及式 (14) 的分解, 可将 $T_N^x(u_\theta)$ 展开为:

$$T_N^x(u_\theta) = \theta^{-1} \tilde{T}_N^{\theta T, x}(X) + \theta^{-2} \tilde{T}_N^{\theta T, x}(Y_\theta) + 2\theta^{-3/2} \tilde{I}_N^{\theta T, x}, \tag{17}$$

其中 $\tilde{T}_N^{\theta T, x}(\cdot)$ 与 $\tilde{I}_N^{\theta T, x}$ 的定义同定理 1, 仅需将增量区间替换为 $[0, \theta T]$ 上的等距剖分 $\{\tilde{t}_i\}_{i=0}^N$ 。

由于 $\{\tilde{t}_i\}_{i=0}^N$ 构成了 $[0, \theta T]$ 的均匀分割, 由引理 1(ii) 易知, 主导项 $\theta^{-1} \tilde{T}_N^{\theta T, x}(X)$ 几乎必然且在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 $\theta^{-1} \sqrt{\frac{\theta T}{\pi}} = \sqrt{\frac{T}{\pi\theta}}$ 。

对于 $\tilde{T}_N^{\theta T, x}(Y_\theta)$ 与 $\tilde{I}_N^{\theta T, x}$, 应用与定理 1 相似的矩收缩技巧, 将区间长度替换为 θT , 对任意 $p \geq 1$ 及 $\beta \in (1, \frac{4}{3})$, 存在与 N 无关的常数 $C > 0$ 使得:

$$\mathbb{E}\left[|\tilde{T}_N^{\theta T, x}(Y_\theta)|^p\right] \leq CN^{p(\frac{3}{2}-\frac{2}{\beta})}, \quad \mathbb{E}\left[|\tilde{I}_N^{\theta T, x}|^p\right] \leq CN^{p(\frac{3}{4}-\frac{1}{\beta})}.$$

鉴于 $\beta \in (1, \frac{4}{3})$, 上述两式中关于 N 的指数均严格小于 0。任取常数 $\gamma \in (0, \frac{1}{\beta} - \frac{3}{4})$, 由 Markov 不等式可得:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|\tilde{T}_N^{\theta T,x}(Y_\theta)| \geq N^{-\gamma}\right) &\leq N^{\gamma p} \mathbb{E}\left[|\tilde{T}_N^{\theta T,x}(Y_\theta)|^p\right] \leq CN^p\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{\beta}+\gamma\right), \\ \mathbb{P}\left(|\tilde{I}_N^{\theta T,x}| \geq N^{-\gamma}\right) &\leq N^{\gamma p} \mathbb{E}\left[|\tilde{I}_N^{\theta T,x}|^p\right] \leq CN^p\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{\beta}+\gamma\right). \end{aligned}$$

选取充分大的 p , 使得上述两式中关于 N 的指数 $p(\frac{3}{2}-\frac{2}{\beta}+\gamma)$ 与 $p(\frac{3}{4}-\frac{1}{\beta}+\gamma)$ 均严格小于 -1 。由 Borel-Cantelli 引理即知, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{T}_N^{\theta T,x}(Y_\theta) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ 且 $\tilde{I}_N^{\theta T,x} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ 。

此外, 在上述矩估计式中直接取 $p = 1$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时立得 $\mathbb{E}[|\tilde{T}_N^{\theta T,x}(Y_\theta)|] \rightarrow 0$ 且 $\mathbb{E}[|\tilde{I}_N^{\theta T,x}|] \rightarrow 0$, 即两者在 $L^1(\Omega)$ 中亦收敛于 0。综合上述结果, 命题得证。 \square

基于命题 2 的极限结果, 定义扩散参数 θ 的估计量为:

$$\hat{\theta}_N := \frac{T}{\pi(T_N^x(u_\theta))^2}. \tag{18}$$

定理 2 对于任意固定的 $x \in \mathbf{R}$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 参数估计量 $\hat{\theta}_N$ 强相合, 即:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \theta \quad \text{a.s.}$$

证明 由命题 2 可知, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 重整化的时间二次变差序列几乎必然收敛, 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N^x(u_\theta) = \sqrt{\frac{T}{\pi\theta}} \quad \text{a.s.}$$

令 $g(y) = \frac{T}{\pi y^2}$, 根据几乎必然收敛的连续映射定理, 可得:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \lim_{N \rightarrow \infty} g(T_N^x(u_\theta)) = g\left(\sqrt{\frac{T}{\pi\theta}}\right) = \theta \quad \text{a.s.}$$

定理得证。 \square

5. 结论

本文在零初始条件和无界空间域的假设下, 基于温和解的线性与非线性分解技巧, 研究了加性时空白噪声驱动的随机 Burgers 方程解的时间二次变差渐近行为。文中严格证明了重整化时间二次变差序列几乎必然且在均方意义上收敛于常数, 并据此构造了未知扩散参数的强相合估计量。另外, 放宽上述关键假设将是未来的重要研究方向。一方面, 现有理论框架有望推广至非零初始状态的方程参数推断中, 通过引入截断策略或带权的时间变差泛函以修正原点处微积分奇异性的影响; 另一方面, 也可考虑探讨有界空间域内演化的方程, 分析边界条件的强约束效应对局部变差精细结构的潜在影响。后续工作将会对此进行深入讨论。

参考文献

- [1] Bertini, L., Cancrini, N. and Jona-Lasinio, G. (1994) The Stochastic Burgers Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **165**, 211-232. <https://doi.org/10.1007/bf02099769>
- [2] Da Prato, G., Debussche, A. and Temam, R. (1994) Stochastic Burgers' Equation. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, **1**, 389-402. <https://doi.org/10.1007/bf01194987>
- [3] Gyöngy, I. and Nualart, D. (1999) On the Stochastic Burgers' Equation in the Real Line. *The Annals of Probability*, **27**, 782-802. <https://doi.org/10.1214/aop/1022677386>
- [4] Lewis, P. and Nualart, D. (2018) Stochastic Burgers' Equation on the Real Line: Regularity and Moment Estimates. *Stochastics*, **90**, 1053-1086. <https://doi.org/10.1080/17442508.2018.1478834>
- [5] Olivera, C. and Tudor, C.A. (2021) Absolute Continuity of the Solution to the Stochastic Burgers Equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, **153**, Article 111635. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111635>
- [6] Gamain, J. and Tudor, C.A. (2023) Exact Variation and Drift Parameter Estimation for the Nonlinear Fractional Stochastic Heat Equation. *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, **6**, 381-406. <https://doi.org/10.1007/s42081-023-00188-0>
- [7] Chong, C. (2020) High-Frequency Analysis of Parabolic Stochastic PDEs. *The Annals of Statistics*, **48**, 1143-1167. <https://doi.org/10.1214/19-aos1841>
- [8] Cialenco, I. and Huang, Y. (2020) A Note on Parameter Estimation for Discretely Sampled SPDEs. *Stochastics and Dynamics*, **20**, 2050016. <https://doi.org/10.1142/s0219493720500161>
- [9] Chong, C. and Dalang, R.C. (2023) Power Variations in Fractional Sobolev Spaces for a Class of Parabolic Stochastic PDEs. *Bernoulli*, **29**, 1792-1820. <https://doi.org/10.3150/22-bej1521>
- [10] Cialenco, I. and Kim, H. (2022) Parameter Estimation for Discretely Sampled Stochastic Heat Equation Driven by Space-Only Noise. *Stochastic Processes and their Applications*, **143**, 1-30. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2021.09.012>
- [11] Assaad, O. and Tudor, C.A. (2021) Pathwise Analysis and Parameter Estimation for the Stochastic Burgers Equation. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **170**, Article 102995. <https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2021.102995>
- [12] Olivera, C. and Tudor, C.A. (2025) Temporal Quadratic and Higher Order Variation for the Nonlinear Stochastic Heat Equation and Applications to Parameter Estimation. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **204**, 2603-2631. <https://doi.org/10.1007/s10231-025-01584-x>
- [13] Tudor, C.A. (2022) Stochastic Partial Differential Equations with Additive Gaussian Noise: Analysis and Inference. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/13089>