Statistics and Application 统计学与应用, **2025, 14(6), 78-93**
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2025.146149

考虑信息影响的单纯形SAIQS传播模型

彭　雨

北京建筑大学理学院，北京

收稿日期：2025年5月16日；录用日期：2025年6月9日；发布日期：2025年6月19日

摘　要

为揭示信息影响下的传染病传播规律并探寻防控策略，本研究构建了单纯形－易感－意识－感染－隔离－易感(s-SAIQS)模型。该模型同时考虑出生死亡、高阶相互作用、信息意识及隔离措施等要素，从理论层面证明模型解的有界性与不变集，得到平衡点存在条件与稳定性判据。数值模拟显示，提升有效信息总量、延长信息有效时长，可有效防控传染病；出生率上升、死亡率下降会增加感染者密度并降低流行阈值；隔离措施对抑制感染者密度效果显著，相较于信息意识、出生死亡等因素，其控制作用更为突出。

关键词

意识，隔离，单纯形，动力学分析

Simplicial SAIQS Propagation Model Considering the Influence of Information

Yu Peng

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: May 16th, 2025; accepted: Jun. 9th, 2025; published: Jun. 19th, 2025

Abstract

To reveal the transmission patterns of infectious diseases influenced by information and explore prevention and control strategies, this study constructs the simplicial-susceptible-aware-infected-quarantined-susceptible (s-SAIQS) model. This model takes into account elements such as birth and death, high-order interactions, information awareness, and quarantine measures simultaneously. From a theoretical perspective, it proves the boundedness of the model solutions and the invariant set, and obtains the existence conditions of equilibrium points and the criteria for stability. Numerical simulations show that increasing the total amount of effective information and extending the effective duration of information can effectively prevent and control infectious diseases; an

文章引用: 彭雨. 考虑信息影响的单纯形 SAIQS 传播模型[J]. 统计学与应用, 2025, 14(6): 78-93.
DOI: 10.12677/sa.2025.146149

increase in the birth rate and a decrease in the death rate will increase the density of infected individuals and reduce the epidemic threshold; quarantine measures have a significant effect on suppressing the density of infected individuals, and their control effect is more prominent compared with factors such as information awareness, birth, and death.

Keywords

Aware, Quarantine, Simplicial, Dynamical Analysis

1. 引言

自古以来，传染病的防治就是关系人类健康及国家安全的重大问题。对传染病流行规律的定量研究是了解传染病传播规律、制定防治策略的重要理论依据。当下传染病动力学模型起源于 Kermark 与 McKendrick [1]构造的仓室模型，其最基本的假设之一是所有个体拥有一致的感染特征，也即个体在感染过程中具有同质性。这一假设降低了大规模群体中的传染病传播建模难度，使得基于模型的理论分析有了实现可能，但仍存在局限性。为了在传统的传染病动力学模型中区分个体与感染过程相关的其他个人特质，动力学模型开始考虑网络对传染病传播的影响。

随着复杂网络上传染病模型研究的逐渐深入，部分研究者开始将视角转向了能够考虑更复杂的群体中相互作用的高阶网络，研究如个体与群体间的相互作用及群体与群体间的相互作用。在实际研究中，研究者们发现高阶网络具有多方面优势：一是能更精细描绘真实接触网络的复杂拓扑结构，揭示传统复杂网络隐藏特性，如存在更丰富社区结构，节点相互作用模式更复杂多样[2]；二是有助于理解信息传播[3]、疾病传播[4]等存在高阶传播情况的复杂现象。

当前在高阶网络上的研究按照网络类型主要分为两种：超图和单纯形网络[5]。其中，单纯形网络是具有特定网络结构，受益于此，研究者们可以基于具体的一类网络结构来进行新的研究探索。目前已出现许多基于单纯形网络的传播动力学研究。Bodó 等首次考虑了传播中的高阶相互作用，在超图社区结构上考虑了感染压力对感染邻居数量的非线性依赖，由此分析高阶相互作用对感染的影响[6]。而后 Iacopini 等在单纯形网络上对 SIS 模型进行研究，发现传染病流行程度在从无病状态向地方病状态转变时出现不连续相变，而在无病状态与地方病状态共存的区间出现双稳态区域[7]。Wang 等研究了单纯形网络上具有非线性感染率的 SIRS 模型，考虑了高阶相互作用对传染病传播的增强作用，发现了不连续相变、双稳态区域、特定条件下的极限环等现象[8]。Chen 等研究了社会网络中的高阶或群体相互作用对传染病传播的动力学影响和相关的对应策略[9]。在考虑出生死亡情况的研究中，Leng 等在研究中运用复杂网络理论，在考虑出生和死亡因素时采用了“空格子”方法，将单纯形网络结构融入到考虑出生和死亡的 SIS 模型之中[10]。

为贴近现代社会中信息传播在传染病暴发时的影响，如在媒体上正确科普疾病防治信息、小群体内信息传导等方式促使个体自我隔离、加强防护等，许多研究将信息传播作为影响传染病传播的重要要素加入研究。例如，在模型中建立自我察觉仓室[11]，通过考虑个体接收相关信息后以一定概率进行自我防护，从而进入意识状态，以此来降低被感染风险，影响传染病传播。

在过往研究中，也有许多研究纳入了隔离因素。Huang 等在复杂异质网络上构建 SIQRS 传染病模型，研究模型的全局动力学[12]。Jiang 和 Ma 则是基于离散时间模型，构建多区域离散时间 SIQR 模型来考虑有限医疗资源下检疫策略对疫情的控制效果[13]。Chen 等在单纯形网络上构建改进的 SIQRS 模型，用于描述具有短期免疫特性的传染病传播以及隔离措施的影响[14]。这些研究成果在验证了隔离措施对于传染病控制有着巨大影响的同时，也发现了隔离措施在更复杂模型中与其他要素相互影响的可能。

为考虑更贴近实际场景的传染病传播模型，本文同时考虑具有信息影响的意识仓室、群体内传播的加强作用、隔离措施，建立 s-SAIQS 模型，给出了模型有界性和不变集的完整证明，同时得到模型平衡点的存在与稳定性定理。在模拟中验证了，信息有效率和信息失效率对控制感染者密度有益，出生率死亡率对感染者密度有较大影响，隔离措施对感染者密度的影响相较信息意识和出生死亡的影响都更大。

本文其余部分的结构安排：第二部分为 s-SAIQS 模型建立部分，给出本文建模的假设及符号；第三部分为理论分析结果；第四部分，从数值模拟角度验证理论结果并说明各参数的影响；第四部分，对本文的工作进行总结。

2. s-SAIQS 模型建立

我们假设五个仓室，易感仓室(S)、有意识仓室(A)、感染仓室(I)、隔离仓室(Q)和死亡仓室(E)。

在感染过程中，考虑单纯形高阶传播。首先需要确定单纯形的定义。单纯形来源于拓扑学中单纯复形的概念，性质上具有封闭性，也即是，对于任意一个单纯形 τ_k，如果 τ_k 有 k + 1 个节点，则被称为一个 k-单纯形。与此同时，τ_k 的任意子集也都构成单纯形。基于此，可以发现 0-单纯形代表一个节点，1-单纯形代表一条连边，2-单纯形代表三个节点构成一个三角形的网络结构，3-单纯形构成的则是四面体结构，正如图 1 中所示。本文中，我们假设，在单纯形中，若其中两个节点为感染状态，单纯形中还存在易感状态节点，则两个感染状态的节点便会促进易感状态节点转变成感染者的概率。

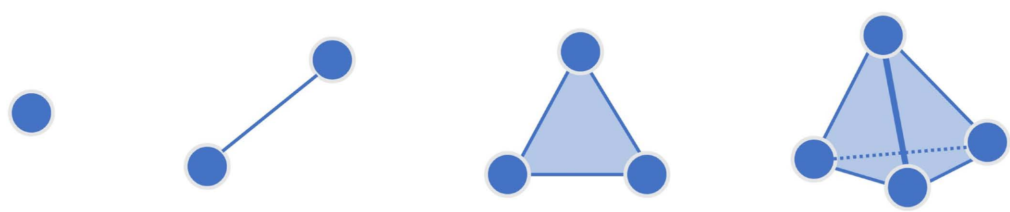


Figure 1. Simplicial topology schematic diagram
图 1. 单纯形拓扑结构示意图

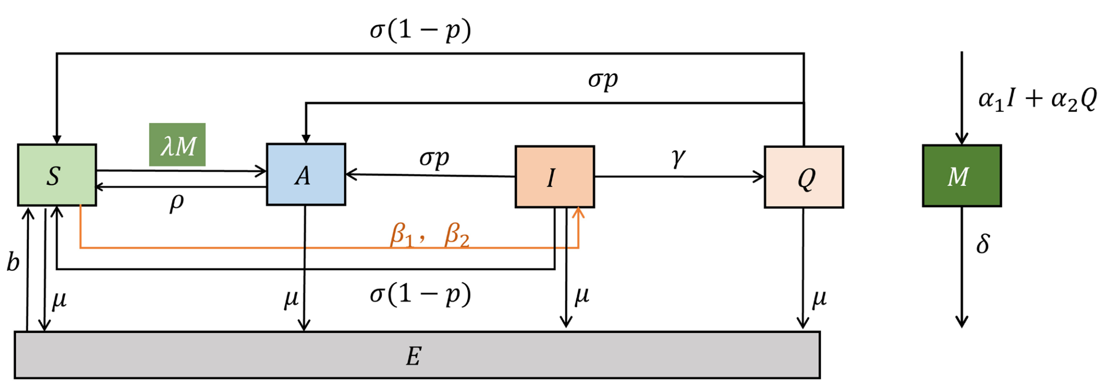


Figure 2. Flow diagram of s-SAIQS model
图 2. s-SAIQS 模型流程图

在意识过程中，意识仓室内的个体是受到有效信息累积量 M 的影响，由易感状态以 λ 概率转化而来。这里我们假设有效信息累积量 M 会受到感染者密度的影响，并经过 $1/\delta$ 时长后失效。同时假设 δ 为信息失效率。假设 M 在单位时间内的变化受到整个环境下的感染者密度及信息失效率的影响。对于感染个体，其恢复是自发的，同时在恢复后，会以比例 ρ 进入到意识仓室，其余个体变回易感状态。由以上假设，我们可建立 s-SAIQS 模型如公式(1)，其中下标 i 代表单纯形网络上节点的编号。d_i 代表高阶传播中，传播涉及的单纯形维度，A_{di} 代表在该单纯性维度中，所有构成了单纯形结构的邻居集合，h_d 代表了其中某一个邻居集合。仓室示意图见图 2。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}S_i(t)}{\mathrm{d}t} &= bE_i(t)+\rho A_i(t)+\sigma p\left(I_i(t)+Q_i(t)\right)-\lambda M(t)S_i(t)-\mu S_i(t) \\
&\quad -S_i(t)\displaystyle\sum_{d_i=1}^{d_i^{max}}\beta_{d_i}\sum_{h_d\in\mathcal{A}_{d_i}}\prod_{j\in h_d}^{d_i}I_j(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}A_i(t)}{\mathrm{d}t} &= \lambda M(t)S_i(t)+\sigma(1-p)\left(I_i(t)+Q_i(t)\right)-\rho A_i(t)-\mu A_i(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}I_i(t)}{\mathrm{d}t} &= S_i(t)\displaystyle\sum_{d_i=1}^{d_i^{max}}\beta_{d_i}\sum_{h_d\in\mathcal{A}_d^i}\prod_{j\in h_d}^{d_i}I_j(t)-\sigma I_i(t)-\mu I_i(t)-\gamma I_i(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t} &= \gamma I_i(t)-\sigma Q_i(t)-\mu Q_i(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}E_i(t)}{\mathrm{d}t} &= \mu\left(S_i(t)+I_i(t)+A_i(t)+Q_i(t)\right)-bE_i(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} &= \dfrac{\alpha_1}{|V|}\displaystyle\sum_{i=1}^{|V|}I_i(t)+\dfrac{\alpha_2}{|V|}\sum_{i=1}^{|V|}Q_i(t)-\delta M(t),
\end{cases}
\tag{1}
$$

利用平均场方法，假设网络中所有节点是统计等价的，忽略节点间的个体差异和具体连接细节，用平均量来描述整体的传播趋势，可以得到公式(1)的平均场方程如下：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} &= bE(t)+\rho A(t)+\sigma p\left(I(t)+Q(t)\right)-\lambda S(t)M(t)-\mu S(t) \\
&\quad -\beta_1\langle k_1\rangle S(t)I(t)-\beta_2\langle k_2\rangle S(t)I^2(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} &= \lambda S(t)M(t)+\sigma(1-p)\left(I(t)+Q(t)\right)-\rho A(t)-\mu A(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} &= \beta_1\langle k_1\rangle S(t)I(t)+\beta_2\langle k_2\rangle S(t)I^2(t)-\sigma I(t)-\gamma I(t)-\mu I(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} &= \gamma I(t)-\sigma Q(t)-\mu Q(t), \\
\dfrac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= \mu\left(S(t)+I(t)+A(t)\right)-bE(t) \\
\dfrac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} &= \alpha_1 I(t)+\alpha_2 Q(t)-\delta M(t).
\end{cases}
\tag{2}
$$

$S(t),A(t),I(t),Q(t),E(t)$ 表示在 t 时刻处于易感、意识、感染、隔离、死亡仓室个体数占所有个体的比例，公式中其他参数的含义见表 1。

Table 1. The description of parameters
表 1. 模型参数定义

参数	定义
β_1	易感个体经由 1-单纯形的感染概率
β_2	易感个体经由 2-单纯形的感染概率
α_1	与感染个体数有关的信息有效率
α_2	与隔离个体数有关的信息有效率
δ	信息失效率，也是信息失效时长的倒数
λ	易感个体向有意识状态转移概率
ρ	有意识状态失效概率
σ	恢复率
p	恢复个体重新回到易感状态的比例
γ	感染个体隔离率
b	出生率
μ	死亡率
$\langle k_1 \rangle$	网络平均度
$\langle k_2 \rangle$	网络 2-单纯形平均度

3. 存在性与稳定性

引理 1： 令 $\left(S^*(t), A^*(t), I^*(t), Q^*(t), E^*(t), M^*(t)\right)$ 为模型(2)的解。若 $S(0)\ge 0,\ A(0)\ge 0,\ I(0)\ge 0$ $Q(0)\ge 0, E(0)\ge 0$ 且 $M(t)\ge 0$，则 $S(t), A(t), I(t), Q(t), E(t), M(t)$ 非负。

证明： 由常微分方程组解的存在唯一性定理可得，解 $\left(S^*(t), A^*(t), I^*(t), Q^*(t), E^*(t), M^*(t)\right)$ 在最大区间 $[0,T)$ 上存在且唯一。类似文献[15]中命题 1，可轻易证得此解的非负性。

而后，进行系统降维，根据 $E(t)=1-S(t)-A(t)-I(t)$ 可得：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = & b\left(1-S(t)-A(t)-I(t)\right)+\rho A(t)+\sigma p\left(I(t)+Q(t)\right)-\lambda S(t)M(t)-\mu S(t) \\ & -\beta_1\langle k_1\rangle S(t)I(t)-\beta_2\langle k_2\rangle S(t)I^2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = & \lambda S(t)M(t)+\sigma(1-p)\left(I(t)+Q(t)\right)-\rho A(t)-\mu A(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = & \beta_1\langle k_1\rangle S(t)I(t)+\beta_2\langle k_2\rangle S(t)I^2(t)-\sigma I(t)-\gamma I(t)-\mu I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = & \gamma I(t)-\sigma Q(t)-\mu Q(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} = & \alpha_1 I(t)+\alpha_2 Q(t)-\delta M(t). \end{cases} \tag{3}$$

引理 2： 模型(3)的不变集为：

$$\Phi=\left\{G(t)\in R_+^5 \,\middle|\, 0\le S(t),A(t),I(t),Q(t),N(t)\le\frac{b}{b+\mu}, 0\le M(t)\le\max\{\alpha_1,\alpha_2\}\frac{b}{b+m}\right\} \tag{4}$$

其中 $G(t)=\left(S(t),A(t),I(t),Q(t),M(t)\right)$， $N(t)=S(t)+A(t)+I(t)$。

证明： 累加公式(3)中前四项公式，可得

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=b-(b+\mu)N(t)$$

若 $N(0)>0$，则

$$N(t)=\left(N(0)-\frac{b}{b+\mu}\right)e^{-(b+\mu)t}+\frac{b}{b+\mu},$$

即可得到

$$\lim_{t\to\infty}N(t)=\frac{b}{b+\mu} \tag{5}$$

因而可以得到，当 $0\le N(0)\le b/(b+\mu)$ 时，对任意 $t>0$ 满足 $0<N(t)\le b/(b+\mu)$。然后可得 $S(t),A(t),I(t),Q(t)\in\left[0,b/(b+\mu)\right]$。根据模型(3)的第五项公式，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}+\delta M(t)=\alpha_1 I(t)+\alpha_2 Q(t)\le\max\{\alpha_1,\alpha_2\}\frac{b}{b+\mu},\forall t\ge 0$$

因而可得到

$$\limsup_{t\to\infty}M(t)\le\max\{\alpha_1,\alpha_2\}\frac{b}{b+\mu}$$

模型(3)的有界性得以证明，且得到了模型的不变集。

为了进行后续分析，首先需要进行模型降维。由公式(5)及 $\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=0$，我们可以考虑系统的极限情况并得到 $Q(t)\approx\frac{\gamma}{\sigma+\mu}I(t)$。而后，基于准稳态理论可近似考虑有效信息累积量，最终得到如下模型：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}= & \frac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta(\sigma+\mu)}I(t)\left(\frac{b}{b+\mu}-A(t)-\frac{\gamma+\sigma+\mu}{\sigma+\mu}I(t)\right)\\ & -(\rho+\mu)A(t)+\frac{\sigma(1-p)(\gamma+\sigma+\mu)}{\sigma+\mu}I(t),\\ \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}= & \left[\beta_1\langle k_1\rangle I(t)+\beta_2\langle k_2\rangle I^2(t)\right]\left(\frac{b}{b+\mu}-A(t)-\frac{\gamma+\sigma+\mu}{\sigma+\mu}I(t)\right)-(\gamma+\sigma+\mu)I(t)\end{cases} \tag{6}$$

基于下一代矩阵方法[16]，可得到

$$F=\begin{pmatrix}\frac{b\beta_1\langle k_1\rangle}{b+\mu} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} V=\begin{pmatrix}\gamma+\sigma+\mu & 0\\ -\frac{\sigma(1-p)(\gamma+\sigma+\mu)}{\sigma+\mu}-\frac{\lambda b\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta(\sigma+\mu)(b+\mu)} & \rho+\mu\end{pmatrix}$$

因此可得到基本再生数

$$R_{01}=\rho\left(FV^{-1}\right)=\frac{b\beta_1\langle k_1\rangle}{(b+\mu)(\gamma+\sigma+\mu)} \tag{7}$$

类似地，假定一个指定参数 $R_{02}=\frac{b\beta_2\langle k_2\rangle}{(b+\mu)(\gamma+\sigma+\mu)}$ 方便计算和分析。

定理 1：(1) 模型(6)存在一个唯一无病平衡点 $E_0^*\left(\frac{b}{b+\mu},0,0,0,0\right)$；

(2) 若 $R_{02}>\upsilon_c$， $\max\left\{0,R_{01}^c\right\}\le R_{01}<1$，则地方病平衡点 E_1^* 和 E_2^* 都存在；

(3) 当 $R_{01}>1$时，仅存在一个地方病平衡点 E_2^* 和无病平衡点。

这里，涉及到的参数表达由以下公式给出：

$$\upsilon_c=\frac{\delta\beta_1\langle k_1\rangle\left[\sigma(1-p)+\rho+\mu\right]+\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta(\rho+\mu)(\sigma+\mu)} \tag{8}$$

$$R_{01}^c=\frac{-b_3+\sqrt{b_3^2-4c_3}}{2} \tag{9}$$

b_3,c_3 由后续的公式(15)给出。

证明：将模型的解记作 $E^*=\left(S^*,A^*,I^*,Q^*,M^*\right)$，令 $I^*=0$，考虑模型稳态解可得无病平衡点 E_0^*。基于模型(6)，考虑稳态情况进行求解，可得

$$A^*=\frac{b}{b+\mu}-(\gamma+\sigma+\mu)\left(\frac{1}{\sigma+\mu}I^*+\frac{1}{\beta_1\langle k_1\rangle+\beta_2\langle k_2\rangle I^*}\right)$$

代入模型并化简可得到二次方程组 $f_1(I)=a_1I^2+b_1I+c_1$，其中

$$\begin{aligned}
&a_1=\beta_2\langle k_2\rangle\frac{\sigma(1-p)+\rho+\mu}{\sigma+\mu}>0,\\
&b_1=\beta_1\langle k_1\rangle\frac{\sigma(1-p)+\rho+\mu}{\sigma+\mu}-(\rho+\mu)R_{02}+\frac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta(\sigma+\mu)},\\
&c_1=(\rho+\mu)(1-R_{01}).
\end{aligned} \tag{10}$$

由 $f_1(I^*)=0$ 计算得到 $I_{1,2}^*=\frac{-b_1\pm\sqrt{\Delta}}{2a_1}$，判别式 $\Delta=b_1^2-4a_1c_1$。因此可以得到模型的地方病平衡点 $E_1^*=\left(S_1^*,A_1^*,I_1^*,Q_1^*,M_1^*\right)$， $E_2^*=\left(S_2^*,A_2^*,I_2^*,Q_2^*,M_2^*\right)$。

$$\begin{cases}
f(0)=(\rho+\mu)(1-R_{01}),\\
f\left(\frac{b}{b+\mu}\right)=\left(\frac{b}{b+\mu}\right)^2\beta_2\langle k_2\rangle\left(\frac{\left[\sigma(1-p)+\rho+\mu\right]}{\sigma+\mu}-\frac{\rho+\mu}{\gamma+\sigma+\mu}\right)\\
\qquad+\left(\frac{b}{b+\mu}\right)\left(\frac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta(\sigma+\mu)}+\frac{\sigma(1-p)}{\sigma+\mu}\beta_1\langle k_1\rangle\right)+(\rho+\mu)\\
\qquad+\left(\frac{b}{b+\mu}\right)(\rho+\mu)\beta_1\langle k_1\rangle\left(\frac{1}{\sigma+\mu}-\frac{1}{\gamma+\sigma+\mu}\right).
\end{cases} \tag{11}$$

由于平衡点位置需处在可行域范围内，因而寻找可行域范围并进行比较得到上述公式(11)。由此可见 $f\left(\frac{b}{b+\mu}\right)>0$ 恒成立。与此同时，$\frac{-b_1}{2a_1}<\frac{b}{b+\mu}$ 恒成立，也即对称轴在可行域上界左侧。故可根据二次多项式基本性质和 $a_1>0$ 得到以下结论：当 $f_1(0)>0$， $b_1<0$， $\Delta\ge0$时，二次多项式 $f_1(I)=0$ 在 $\left(0,\frac{b}{b+\mu}\right)$ 中有两个根。

由 $b_1<0$ 可得到以下不等式：

$$\beta_1\langle k_1\rangle\frac{\sigma(1-p)+\rho+\mu}{\sigma+\mu}-(\rho+\mu)R_{02}+\frac{\lambda[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma]}{\delta(\sigma+\mu)}<0,$$

简化后即是

$$R_{02}>\frac{\beta_1\langle k_1\rangle[\sigma(1-p)+\rho+\mu]}{(\sigma+\mu)(\rho+\mu)}+\frac{\lambda[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma]}{\delta(\sigma+\mu)(\rho+\mu)} \tag{12}$$

将不等式右侧定义为 R_{02}^{c0}，用来表示此式为关于 R_{02} 的一个阈值。

而后分析 $\Delta\ge 0$，将公式(11)代入后，可得到二次多项式 $f_2(R_{02})=a_2R_{02}^2+b_2R_{02}+c_2$，其中

$$\begin{aligned}
a_2&=(\rho+\mu)^2>0,\\
b_2&=-2(\rho+\mu)\frac{\lambda[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma]}{\delta(\sigma+\mu)}\\
&\quad-2(\rho+\mu)\frac{(b+\mu)(\gamma+\sigma+\mu)[\sigma(1-p)+\rho+\mu]}{b(\sigma+\mu)}(2-R_{01})<0,\\
c_2&=\left(\frac{(b+\mu)(\gamma+\sigma+\mu)[\sigma(1-p)+\rho+\mu]}{b(\sigma+\mu)}R_{01}+\frac{\lambda[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma]}{\delta(\sigma+\mu)}\right)^2>0.
\end{aligned} \tag{13}$$

可分析得到，当 $f_2(R_{02})\ge 0$ 时，$\Delta\ge 0$，同时可以轻易得到 f_2 存在两个根，分别记作 R_{02}^{c1},R_{02}^{c2}。通过比较很容易得到 $R_{02}^{c1}<R_{02}^{c0}<R_{02}^{c2}$。考虑 $R_{02}-R_{02}^{c2}\ge 0$ 可计算得到下述两个不等式：

$$\Delta_2\ \ge(2a_2R_{02}+b_2)^2, \tag{14}$$

$$R_{02}>\frac{(b+\mu)(\gamma+\sigma+\mu)[\sigma(1-p)+\rho+\mu](2-R_{01})}{b(\rho+\mu)(\sigma+\mu)}+\frac{\lambda[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma]}{\delta(\rho+\mu)(\sigma+\mu)} \tag{15}$$

对公式(14)进行化简，可得到第三个二次不等式 $f_3(R_{01})=R_{01}^2+b_3R_{01}+c_3$，其中

$$\begin{aligned}
b_3&=2\frac{b\delta(\rho+\mu)(\sigma+\mu)R_{02}+b\lambda[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma]}{\delta(b+\mu)(\gamma+\sigma+\mu)[\sigma(1-p)+\rho+\mu]}>0,\\
c_3&=\left(\frac{b\delta(\rho+\mu)(\sigma+\mu)R_{02}-b\lambda[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma]}{\delta(b+\mu)(\gamma+\sigma+\mu)[\sigma(1-p)+\rho+\mu]}\right)^2\\
&\quad-\frac{4b(\rho+\mu)(\sigma+\mu)R_{02}}{(b+\mu)(\gamma+\sigma+\mu)[\sigma(1-p)+\rho+\mu]}.
\end{aligned}$$

当 $f_3\ge 0$ 时，满足 $R_{02}-R_{02}^{c2}\ge 0$，即是可推出 $\Delta\ge 0$。对 f_3 进行分析可得到其具有两个根记作 y_1,y_2 (假设 $y_1<y_2$)，同时可轻易证得 $y_2\le 1$。当 $R_{01}\ge y_2$ 时，条件 $f_3\ge 0$ 满足。将 y_2 记作 R_{01}^c，用以说明此式为关于 R_{01} 的阈值。

对公式(14)进行处理，可以设不等式右侧为 υ_c ,因而公式(13)与(14)等价于 $\max\{0,R_{01}^c\}\le R_{01}<1$，$R_{02}>\upsilon_c$。再往前可以追溯到条件 $f_1(0)>0$，$b_1<0$，$\Delta\ge 0$ 与此等价。至此定理第二条得证。

基于上述内容中对 f_1 的分析，可轻易得到当 $R_{01}>1$ 时，仅存在一个地方病平衡点 E_2^*，即可得到定理第三条。

定理 2： 当 $R_{01}<1$ 时，无病平衡点 E_0^* 局部渐近稳定。

证明： 由模型(6)可得到在无病平衡点 E_0^* 处的雅可比矩阵：

$$J\left(E_0^*\right)=\begin{pmatrix}-\rho-\mu & \Xi_0\\ 0 & \dfrac{b\beta_1\langle k_1\rangle}{b+\mu}-(\gamma+\sigma+\mu)\end{pmatrix}$$

其中 $\Xi_0=\dfrac{b\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta(b+\mu)(\sigma+\mu)}+\sigma(1-p)\dfrac{\gamma+\sigma+\mu}{\sigma+\mu}$。因而当 $R_{01}<1$ 时，$J\left(E_0^*\right)$ 有两个负实根，无病平衡点 E_0^* 局部渐近稳定。

定理 3：(1) 当 $R_{02}>\upsilon_c$，$\max\left\{0,R_{01}^c\right\}<R_{01}<1$ 时，E_1^* 是不稳定的；

(2) 当 $R_{02}>\upsilon_c$，$\max\left\{0,R_{01}^c\right\}<R_{01}<1$，$\rho\ge\rho_c$ 或 $R_{01}>1$ 时，E_2^* 是渐近稳定的。这里，$\rho_c=\sigma+\mu-\dfrac{\beta_1\langle k_1\rangle}{\beta_2\langle k_2\rangle(\sigma+\mu)}\left[\dfrac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta}+\beta_1\langle k_1\rangle(\gamma+\sigma+\mu)\right]$。

证明：由定理 1 可知，当 $R_{02}>\upsilon_c$，$\max\left\{0,R_{01}^c\right\}<R_{01}<1$ 时，地方病平衡点 E_1^* 和 E_2^* 都存在，且轻易可得 $\Delta>0$。首先分析 E_1^* 的稳定性。在 E_1^* 处的雅可比矩阵为

$$J\left(E_1^*\right)=\begin{pmatrix}-\dfrac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta}I_1^*-\rho-\mu & \Xi_{11}\\ -\beta_1\langle k_1\rangle I_1^*-\beta_2\langle k_2\rangle I_1^{*2} & \Xi_{12}\end{pmatrix},$$

其中

$$\Xi_{11}=\frac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right](\gamma+\sigma+\mu)}{\delta(\sigma+\mu)^2}\left(\frac{\sigma+\mu}{\beta_1\langle k_1\rangle+\beta_2\langle k_2\rangle I_1^*}-I_1^*\right)+\sigma(1-p)\frac{\gamma+\sigma+\mu}{\sigma+\mu},$$
$$\Xi_{12}=\frac{\gamma+\sigma+\mu}{\sigma+\mu}I_1^*\left[\frac{(\sigma+\mu)\beta_2\langle k_2\rangle}{\beta_1\langle k_1\rangle+\beta_2\langle k_2\rangle I_1^*}-\left(\beta_1\langle k_1\rangle+\beta_2\langle k_2\rangle I_1^*\right)\right].$$

其对应的特征多项式为

$$\left|\Lambda-J\left(E_1^*\right)\right|=\Lambda^2-\mathrm{tr}\left(E_1^*\right)\Lambda+\det\left(E_1^*\right)$$

基于 Hurwitz 稳定性准则可知，当 $\mathrm{tr}\left(E_1^*\right)<0$，$\det\left(E_1^*\right)>0$ 时，$J\left(E_1^*\right)$ 的特征值具有负实部。由于

$$\begin{aligned}\det\left(E_1^*\right)&=\left(\beta_2\langle k_2\rangle\right)^2\left[\sigma(1-p)+\rho+\mu\right]I_1^{*2}+2\beta_1\langle k_1\rangle\beta_2\langle k_2\rangle\left[\sigma(1-p)+\rho+\mu\right]I_1^*\\&\quad+\left(\beta_1\langle k_1\rangle\right)^2\left[\sigma(1-p)+\rho+\mu\right]+\frac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta}\beta_1\langle k_1\rangle-(\rho+\mu)(\sigma+\mu)\beta_2\langle k_2\rangle\\&=\beta_2\langle k_2\rangle(\sigma+\mu)\frac{b_1^2-2a_1c_1+b_1\sqrt{\Delta}}{2a_1}-c_1\beta_2\langle k_2\rangle(\sigma+\mu)-\sqrt{\Delta}\beta_1\langle k_1\rangle(\sigma+\mu)\\&=-\sqrt{\Delta}(\sigma+\mu)\left(\beta_1\langle k_1\rangle+\beta_2\langle k_2\rangle I_1^*\right)<0\end{aligned}\tag{16}$$

故可判断 E_1^* 是不稳定的。

接下来分析 E_2^* 的稳定性。在 E_2^* 处的雅可比矩阵为

$$J\left(E_2^*\right)=\begin{pmatrix}-\dfrac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta}I_2^*-\rho-\mu & \Xi_{21}\\ -\beta_1\langle k_1\rangle I_2^*-\beta_2\langle k_2\rangle I_2^{*2} & \Xi_{22}\end{pmatrix},$$

其中

$$\Xi_{21}=\frac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right](\gamma+\sigma+\mu)}{\delta(\sigma+\mu)^2}\left(\frac{\sigma+\mu}{\beta_1\langle k_1\rangle+\beta_2\langle k_2\rangle I_2^*}-I_2^*\right)+\sigma(1-p)\frac{\gamma+\sigma+\mu}{\sigma+\mu},$$

$$\Xi_{22}=\frac{\gamma+\sigma+\mu}{\sigma+\mu}I_2^*\left[\frac{(\sigma+\mu)\beta_2\langle k_2\rangle}{\beta_1\langle k_1\rangle+\beta_2\langle k_2\rangle I_2^*}-\left(\beta_1\langle k_1\rangle+\beta_2\langle k_2\rangle I_2^*\right)\right].$$

对应的特征多项式为

$$\left|\Lambda-J\left(E_2^*\right)\right|=\Lambda^2-\operatorname{tr}\left(E_2^*\right)\Lambda+\det\left(E_2^*\right).$$

$$\begin{aligned}\det\left(E_2^*\right)&=\left(\beta_2\langle k_2\rangle\right)^2\left[\sigma(1-p)+\rho+\mu\right]I_2^{*2}+2\beta_1\langle k_1\rangle\beta_2\langle k_2\rangle\left[\sigma(1-p)+\rho+\mu\right]I_2^*\\&\quad+\left(\beta_1\langle k_1\rangle\right)^2\left[\sigma(1-p)+\rho+\mu\right]+\frac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta}\beta_1\langle k_1\rangle-(\rho+\mu)(\sigma+\mu)\beta_2\langle k_2\rangle\\&=\beta_2\langle k_2\rangle(\sigma+\mu)\frac{b_1^2-2a_1c_1-b_1\sqrt{\Delta}}{2a_1}-c_1\beta_2\langle k_2\rangle(\sigma+\mu)+\sqrt{\Delta}\beta_1\langle k_1\rangle(\sigma+\mu)\\&=\sqrt{\Delta}(\sigma+\mu)\left(\beta_1\langle k_1\rangle+\beta_2\langle k_2\rangle I_2^*\right)>0\end{aligned}\tag{17}$$

由于当 $\operatorname{tr}\left(E_2^*\right)<0$，$\det\left(E_2^*\right)>0$ 时，$J\left(E_2^*\right)$ 的特征值具有负实部。$\det\left(E_2^*\right)>0$ 已成立，故接下来分析 $\operatorname{tr}\left(E_2^*\right)<0$ 是否成立。我们对其进行化简并得到

$$H\left(I_2^*\right)=(\sigma+\mu)^2\left(\beta_1\langle k_1\rangle+\beta_2\langle k_2\rangle I_2^*\right)\operatorname{tr}\left(E_2^*\right)=h_3I_2^{*3}+h_2I_2^{*2}+h_1I_2^*+h_0,$$

其中

$$\begin{aligned}h_3&=-\left(\beta_2\langle k_2\rangle\right)^2(\gamma+\sigma+\mu)<0,\\h_2&=-\beta_2\langle k_2\rangle\left[\frac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta}+2\beta_1\langle k_1\rangle(\gamma+\sigma+\mu)\right]<0,\\h_1&=-\beta_1\langle k_1\rangle\left[\frac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta}+\beta_1\langle k_1\rangle(\gamma+\sigma+\mu)\right]+\beta_2\langle k_2\rangle(\sigma+\mu)(\gamma+\sigma-\rho),\\h_0&=-\beta_1\langle k_1\rangle(\rho+\mu)(\sigma+\mu)<0.\end{aligned}$$

因而当 $H\left(I_2^*\right)<0$ 时，$\operatorname{tr}\left(E_2^*\right)<0$。由于三次多项式求根较为复杂，因此在这里我们考虑 $H\left(I_2^*\right)<0$ 的充分条件。当 $h_1\le 0$，则对于任意 $I_2^*>0$，$H\left(I_2^*\right)<0$ 必然成立。因而化简可以得到条件

$$\rho_c=\sigma+\mu-\frac{\beta_1\langle k_1\rangle}{\beta_2\langle k_2\rangle(\sigma+\mu)}\left[\frac{\lambda\left[\alpha_1(\sigma+\mu)+\alpha_2\gamma\right]}{\delta}+\beta_1\langle k_1\rangle(\gamma+\sigma+\mu)\right]$$

当 $R_{02}>\upsilon_c$，$\max\left\{0,R_{01}^c\right\}<R_{01}<1$，$\rho\ge\rho_c$ 时，E_2^* 是渐近稳定的。

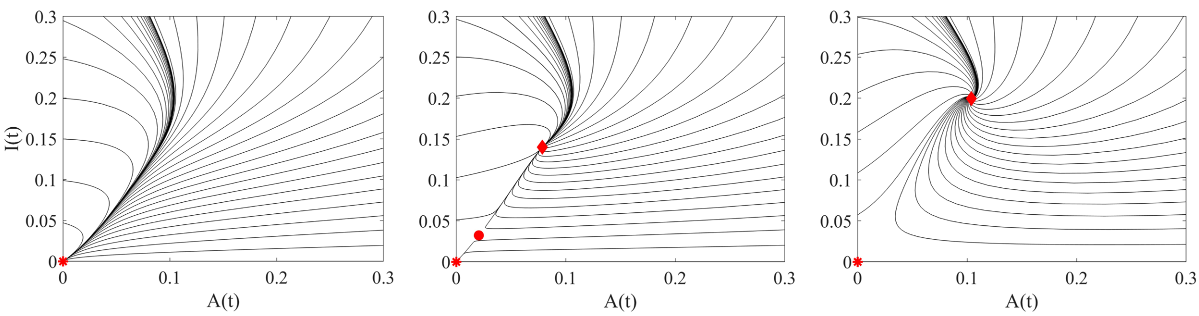
类似地，在 $R_{01}>1$，$\rho\ge\rho_c$ 时，可用类似方法得到 E_2^* 是渐近稳定的。

4. 数值模拟

基于理论分析结果，我们进行数值模拟来验证前文并进行更进一步的数值比较。在各项数值模拟中，未提及到的参数取值见表 2。表中参数依靠经验选取。

Table 2. The default values of the parameters for numerical simulation
表 2. 数值模拟的参数默认取值

参数	取值	参数	取值
β_1	0.7	σ	0.2
β_2	0.8	p	0.2
α_1	0.1	γ	0.2
α_2	0.3	b	0.2
δ	0.3	μ	0.1
λ	0.2	$\langle k_1 \rangle$	9.72
ρ	0.5	$\langle k_2 \rangle$	3.51



a) $R_{01}=0.5<R_{01}^c$　　b) $R_{01}^c<R_{01}=0.9<1$　　c) $1<R_{01}=1.5$

Figure 3. The trajectory diagram of model under different R_{01} with $R_{02}>\upsilon_c$
图 3. $R_{02}>\upsilon_c$ 时不同 R_{01} 值下模型在 $A-I$ 平面的轨线图

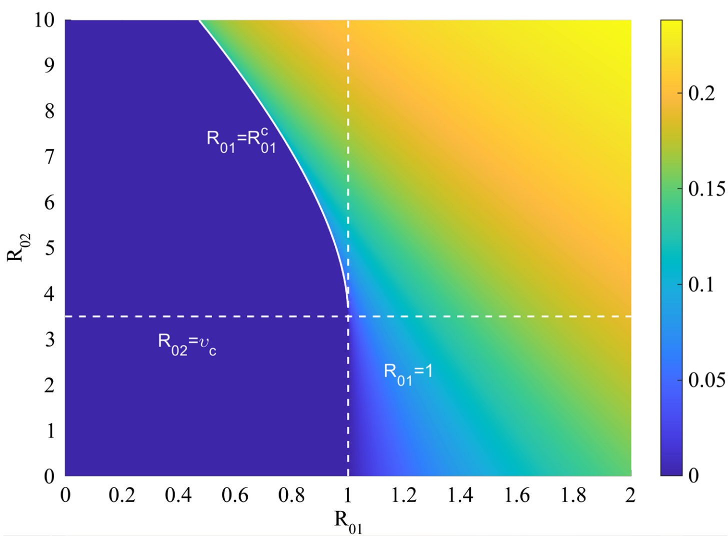


Figure 4. The heatmap of infection density under different R_{01} and R_{02}
图 4. 不同 R_{01} 与 R_{02} 值下感染者密度变化热图

在图 3 中，红色星型、圆形和菱形分别标注无病平衡点、地方病平衡点 E_1^* 和 E_2^* 在 $A-I$ 相平面中的映射点。在图 3(a)中，基本再生数 R_{01} 低于爆发阈值 R_{01}^c，仅存在唯一的无病平衡点；图 3(b)中，基本再

生数 R_{01} 高于爆发阈值但小于 1，三种不同的平衡点都存在；在图 3(c)中，基本再生数 R_{01} 大于 1，仅 E_0^* 和 E_2^* 存在。以上现象验证上一节中定理 1。观察图 3(b)中的轨线，可发现以平衡点 E_1^* 为边界，两侧的轨迹分别逐渐趋近于无病平衡点 E_0^* 和地方病平衡点 E_2^*，也即是 E_0^* 和 E_2^* 是局部渐近稳定的，E_1^* 是不稳定的。

同样地，我们绘制 R_{01} 与 R_{02} 影响下的感染者密度变化热图来说明前文推导结果的正确性。见图 4，图中用白色实线画出了模型的爆发阈值位置，并用白色虚线分别画出 R_{02} 的阈值及 $R_{01}=1$ 的位置。

通过稳态感染者密度随基本再生数 R_{01} 变化的曲线图，可以观察到由于高阶相互作用感染导致的双稳态区域、不连续相变现象和后向分支，见图 5。随着 R_{02} 增大，稳态感染者密度也逐渐呈上升；基本再生数爆发阈值也由 1 逐渐降低至图中的两个 R_{01}^c 位置(黄色、红色标记)，过程中出现了双稳态区域 $\left(R_{01}^c,1\right)$。

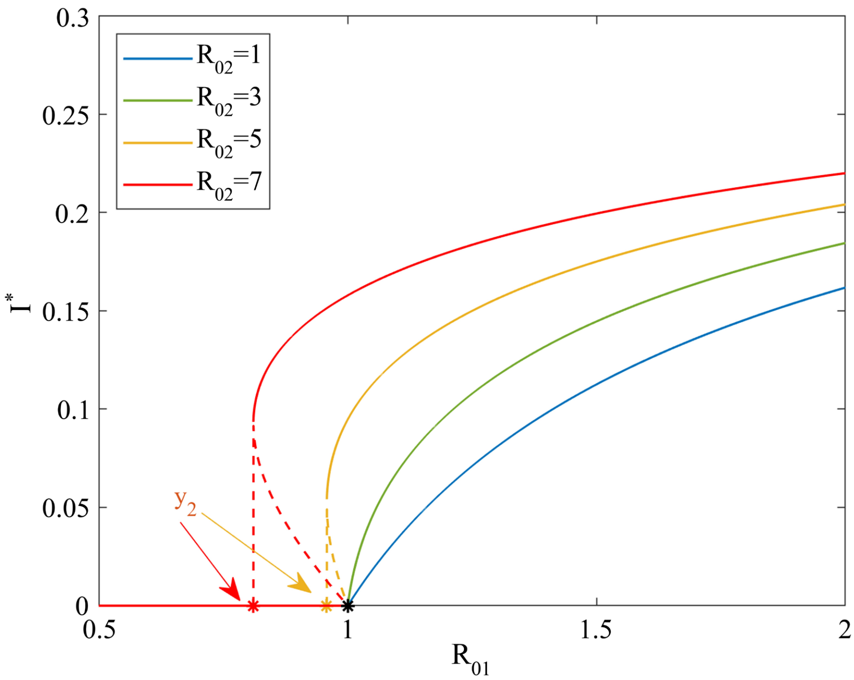


Figure 5. Steady-state infection density with the change of basic reproduction number R_{01} R_{02}

图 5. **稳态感染者密度随基本再生数 R_{01} R_{02} 的变化**

图 5 中参数 R_{02} 的值同样反映了高阶传染率的数值变化。随高阶传染率升高，感染密度升高且可能出现后向分岔，从而导致爆发阈值降低。

在图 6 中展示不同出生率、死亡率对感染者密度的影响。左侧图展示了在不同出生率下感染者密度的变化情况。随着出生率的增加，感染者密度逐渐上升，而传染病爆发阈值则逐渐下降，下降速度随出生率的增加逐渐降低。与此相反，死亡率则有着相反的影响。右侧图展示了不同死亡率下感染者密度的变化情况。死亡率上升时，感染者密度明显下降且传染病爆发阈值明显提高。

整体而言，在 s-SAIQS 模型中，高阶相互作用及出生死亡过程对传染病感染者密度的影响与前一章节中的 s-SAIS 模型近似，高阶相互作用会轻微提高传染病感染水平，较低的出生率及较高死亡率能明显降低感染者密度。只是在较低出生率及较高死亡率时，人口总数呈现下降趋势，说明在极端情况下，控制经由人传播的传染病会相对容易。但在通常情况下，人口总数的下降虽能够降低控制传染病的传播，但不符合整体的人口发展趋势。

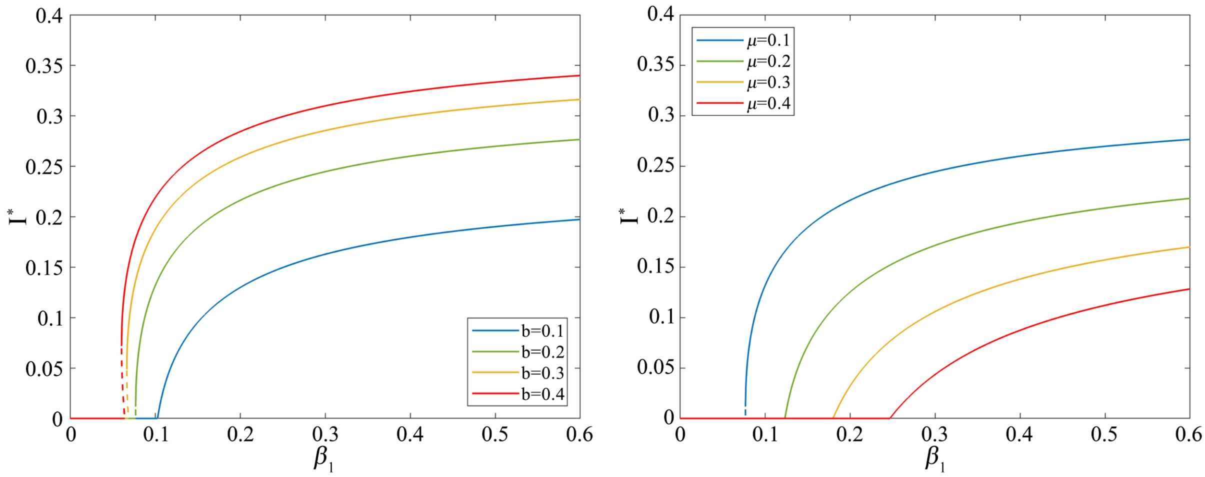


Figure 6. Steady-state infection density curves under different b, μ

图 6. 不同 b 及不同 μ 取值下的稳态感染者密度曲线

4.1. 信息与隔离对传播的影响

本章构造的 s-SAIQS 模型在考虑隔离因素时，同时考虑了被隔离个体对于有效信息总量的刺激及隔离措施对传染病传播的遏制作用。本节从这两方面分析隔离措施对传染病传播的影响。

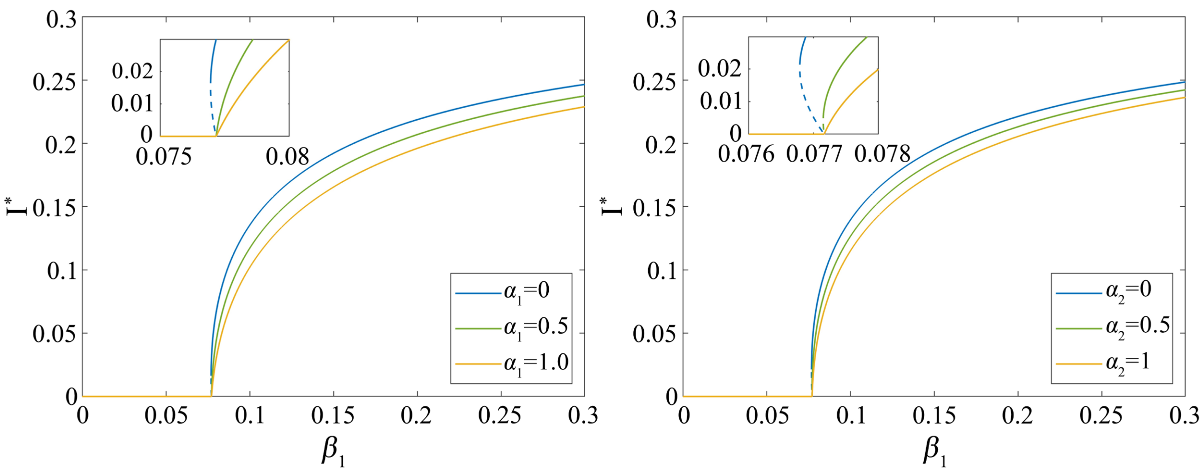


Figure 7. Steady-state infection density curves under different α_1, α_2

图 7. 不同 α_1 及不同 α_2 取值下的稳态感染者密度曲线

图 7 展示当 α_1 与 α_2 设定为不同值时，稳态感染者密度的变化情况。整体而言，两个信息有效率 α_1 与 α_2 呈现近似趋势。信息有效率的增加能抑制传染病在流行状态下的传播。然而在图中可以见到，当 α_1 与 α_2 出现巨大变化时，整体的感染者密度变化较小。

为了探求对感染者密度有更强影响的要素，我们分析感染个体隔离率 γ 以及易感个体向有意识状态转移概率 λ 的影响。

图 8 中分别取了不同 γ 及不同 λ 值。图 8 中通过感染者密度曲线的变化，可以发现感染个体隔离率 γ 对感染者密度有着极强影响。这可能是由于隔离措施直接降低了易感个体与感染个体的接触，直接阻

断了一部分传染病的传播路径，因而直接显现在感染者密度上。从图中即是，感染者密度随γ的增加出现极大的变化。右侧图中表现的则是易感个体向有意识状态转移概率λ对感染者密度的影响。可以轻易发现，λ对感染者密度的影响较小。与图 7 进行对比，三个参量的整体影响类似。这可以侧面说明，在 s-SAIQS 模型中，信息意识影响较隔离措施的影响要小得多。

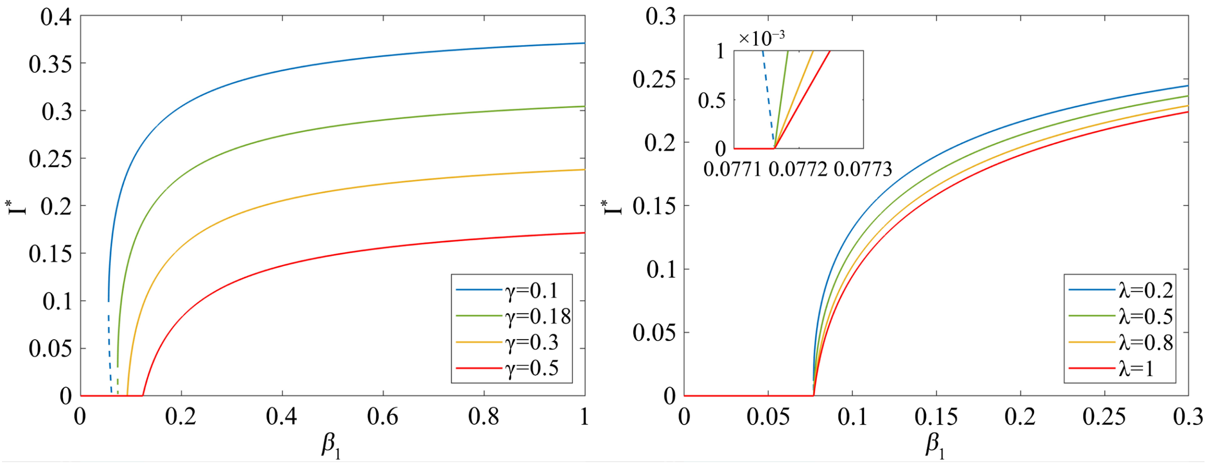


Figure 8. Steady-state infection density curves under different γ, λ
图 8. 不同γ及不同λ取值下的稳态感染者密度曲线

4.2. 敏感性分析

为了更详细说明每个参数对模型的影响程度，我们对所有参数进行了敏感性分析[17]。

图 9 中展示了关于 A 和 I 的每个参数的半相对敏感度解。图 10 展示了关于 A 和 I 的每个参数的对数敏感度解。

在图 9 和图 10 中，很明显$\rho,\sigma,\langle k_1\rangle$对 A 有积极影响，而参数μ,p,δ则有相反的影响。除ρ,σ,μ,p对 A 有较持久的稳定影响外，其余所有参量都在最初阶段展现出最强影响力，而在后续逐渐稳定的阶段逐渐失去对有意识个体比例的影响。

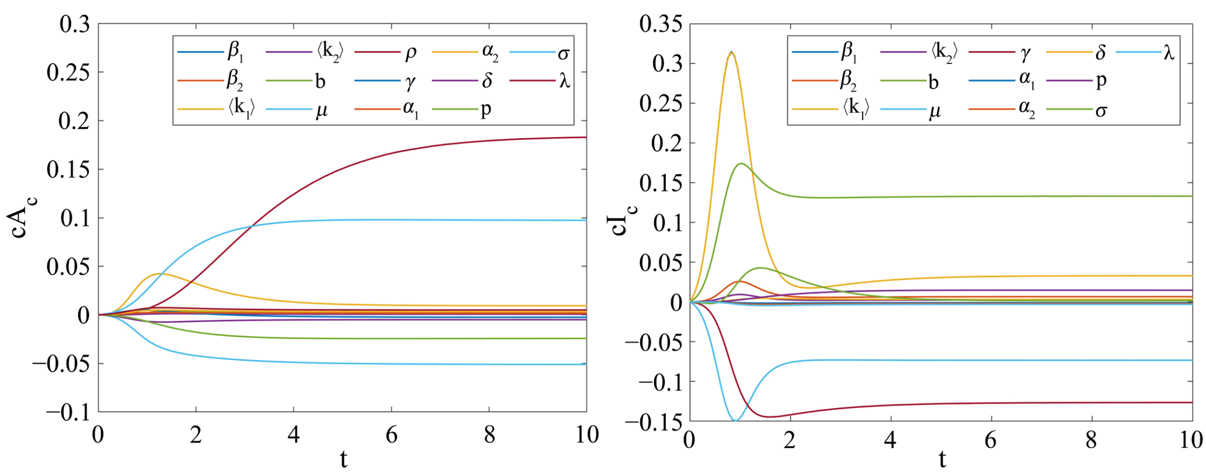


Figure 9. The semi-relative sensitivity of parameters in the s-SAIQS model
图 9. 各参数在 s-SAIQS 模型中的半相对敏感度解

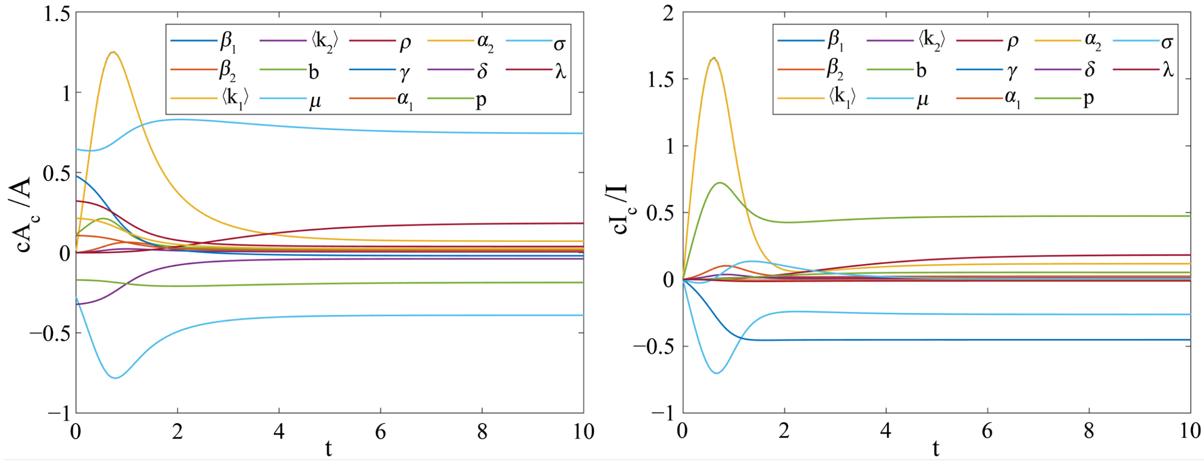


Figure 10. The logarithmic sensitivity of parameters in the s-SAIQS model
图 10. 各参数在 s-SAIQS 模型中的对数敏感度解

在对于感染者密度的敏感度解中，很明显$\langle k_1\rangle, b$对I有正相关作用，而参数γ, μ则有相反的影响。而且在后续逐渐稳定的阶段，出生率 b 对感染者密度的增大有着最大影响，隔离率γ对控制感染者密度有着最明显影响。高阶感染率β_2的影响整体较小。

比较两种敏感度分析的结果，可以得出结论：出生率 b 和死亡率μ是影响传染病爆发水平的重要参数。除此之外，隔离措施对控制感染者密度有着极强影响。在隔离措施与信息意识影响同时存在的情况，隔离措施对传染病的控制程度明显更佳。

5. 结论

本文同时考虑高阶相互作用、信息意识、出生死亡、隔离措施，建立了 s-SAIQS 模型。在模型分析中，从理论角度推得模型有界性、不变集、平衡点存在性和稳定性条件，同时借助数值模拟，捕捉到不连续相变及双稳态现象。基于数值模拟，研究发现出生死亡与隔离措施对感染者密度有剧烈影响。高阶相互作用下的感染或是信息意识影响很小。作为控制传染病水平的措施，首先进行隔离措施，而后在采用隔离措施的基础上，提高信息传播的水平，从而提高人群处于有意识状态的比例，也可以进一步降低感染者密度，控制传染病水平。

本研究受限于平均场模型，仅能反映在网络上模型的整体趋势，而不能细节地分析网络拓扑对传染病的具体影响。在未来研究中，可以考虑基于实际传染病的过往数据，选取实际的参数拟合数值及合适规模的真实网络进行具体验证。

基金项目

本论文得到北京建筑大学高层次人才引进资助计划(GDRC20220802)资助。

参考文献

[1] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1933) Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London*, **141**, 94-112.

[2] Keeling, M.J. and Eames, K.T.D. (2005) Networks and Epidemic Models. *Journal of the Royal Society Interface*, **2**, 295-307. https://doi.org/10.1098/rsif.2005.0051

[3] Ghoshal, G., Zlatić, V., Caldarelli, G. and Newman, M.E.J. (2009) Random Hypergraphs and Their Applications. *Physical Review E*, **79**, Article 066118. https://doi.org/10.1103/physreve.79.066118

[4] Malik, A.S., Boyko, O., Aktar, N. and Young, W.F. (2001) A Comparative Study of MR Imaging Profile of Titanium Pedicle Screws. *Acta Radiologica*, **42**, 291-293. https://doi.org/10.1080/028418501127346846

[5] Gao, Z., Ghosh, D., Harrington, H.A., Restrepo, J.G. and Taylor, D. (2023) Dynamics on Networks with Higher-Order Interactions. *Chaos*: *An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **33**, Article 040401. https://doi.org/10.1063/5.0151265

[6] Bodó, Á., Katona, G.Y. and Simon, P.L. (2016) SIS Epidemic Propagation on Hypergraphs. *Bulletin of Mathematical Biology*, **78**, 713-735. https://doi.org/10.1007/s11538-016-0158-0

[7] Iacopini, I., Petri, G., Barrat, A. and Latora, V. (2019) Simplicial Models of Social Contagion. *Nature Communications*, **10**, Article no. 2485. https://doi.org/10.1038/s41467-019-10431-6

[8] Wang, D., Zhao, Y., Luo, J. and Leng, H. (2021) Simplicial SIRS Epidemic Models with Nonlinear Incidence Rates. *Chaos*: *An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **31**, Article 053112. https://doi.org/10.1063/5.0040518

[9] Chen, Y., Gel, Y.R., Marathe, M.V. and Poor, H.V. (2023) A Simplicial Epidemic Model for COVID-19 Spread Analysis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **121**, e2313171120. https://doi.org/10.1073/pnas.2313171120

[10] Leng, H., Zhao, Y., Luo, J. and Ye, Y. (2022) Simplicial Epidemic Model with Birth and Death. *Chaos*: *An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **32**, Article 093144. https://doi.org/10.1063/5.0092489

[11] Liu, C., Wu, X., Niu, R., Wu, X. and Fan, R. (2020) A New SAIR Model on Complex Networks for Analysing the 2019 Novel Coronavirus (Covid-19). *Nonlinear Dynamics*, **101**, 1777-1787. https://doi.org/10.1007/s11071-020-05704-5

[12] Huang, S., Chen, F. and Chen, L. (2017) Global Dynamics of a Network-Based SIQRS Epidemic Model with Demographics and Vaccination. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **43**, 296-310. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.07.014

[13] Jiang, J. and Ma, J. (2023) Dynamic Analysis of Pandemic Cross-Regional Transmission Considering Quarantine Strategies in the Context of Limited Medical Resources. *Applied Mathematics and Computation*, **450**, Article 127958. https://doi.org/10.1016/j.amc.2023.127958

[14] Chen, J., Xia, C. and Perc, M. (2024) The SIQRS Propagation Model with Quarantine on Simplicial Complexes. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, **11**, 4267-4278. https://doi.org/10.1109/tcss.2024.3351173

[15] Sheng, Y., Cui, J. and Guo, S. (2023) The Modeling and Analysis of the COVID-19 Pandemic with Vaccination and Isolation: A Case Study of Italy. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **20**, 5966-5992. https://doi.org/10.3934/mbe.2023258

[16] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. https://doi.org/10.1016/s0025-5564(02)00108-6

[17] Bortz, D. (2004) Sensitivity Analysis of a Nonlinear Lumped Parameter Model of HIV Infection Dynamics. *Bulletin of Mathematical Biology*, **66**, 1009-1026. https://doi.org/10.1016/j.bulm.2003.10.011