

基于ARMA-APARCH模型碳排放权交易市场的风险度量

李 琼¹, 武 东²

¹徽商职业学院信息工程学院, 安徽 合肥

²安徽农业大学信息与人工智能学院, 安徽 合肥

收稿日期: 2025年8月9日; 录用日期: 2025年8月29日; 发布日期: 2025年9月11日

摘 要

自从“双碳目标”提出以来, 碳交易市场价格波动剧烈。因此, 研究碳排放权交易价格的波动性及其风险度量具有明确的现实意义。本文选取了广州、北京两个碳交易市场, 构建了基于正态分布和广义有偏学生氏t分布的ARMA-APARCH模型, 对碳排放权交易价格的日收益率序列进行拟合。在实证分析中, 对碳排放权收益率序列进行了VaR计算, 统计表明, 基于广义有偏学生氏t分布的ARMA-APARCH模型的VaR能较好地度量金融风险。

关键词

碳排放权价格, ARMA-APARCH模型, 广义有偏学生氏t分布, VaR

ARMA-APARCH Model-Based Risk Measure-Ment in Carbon Trading Markets

Qiong Li¹, Dong Wu²

¹School of Information Engineering, Huishang Vocational College, Hefei Anhui

²School of Information and Artificial Intelligence, Anhui Agricultural University, Hefei Anhui

Received: Aug. 9th, 2025; accepted: Aug. 29th, 2025; published: Sep. 11th, 2025

Abstract

Since the proposal of the “dual carbon goals”, carbon trading markets have experienced significant price volatility. This study investigates the price fluctuations and risk measurement of carbon emission allowances, focusing on the Guangzhou and Beijing carbon trading markets. We developed

ARMA-APARCH models based on normal distribution and generalized skewed Student's t-distribution to fit the daily return series of carbon trading prices. Through empirical analysis, Value at Risk (VaR) calculations were conducted for carbon allowance return series. The statistical results indicate that the VaR derived from the generalized skewed Student's t-distribution-based ARMA-APARCH model demonstrates superior performance in financial risk measurement.

Keywords

Carbon Emission Allowance Price, ARMA-APARCH Model, Generalized Skewed Student's t-Distribution, Value at Risk

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

金融时间序列的核心研究对象是资产价值随时间的动态变化规律。其中, 股票序列是最典型的金融时间序列, 其特征主要表现为: 收益率序列的非平稳性(如存在趋势或结构突变)、弱相关性(收益率之间无明显自相关但波动率存在显著滞后依赖)、波动性聚类(高波动期与低波动期交替聚集)、厚尾性(极端事件发生概率高于正态分布假设)以及杠杆效应(利空消息对波动率的冲击强于等量利好消息)。为刻画这些复杂特征, GARCH 族模型成为主流建模工具[1]-[3]。

1982 年, Engle 提出自回归条件异方差模型(ARCH), 通过将条件方差建模为历史残差平方的线性组合, 成功应用于英国通货膨胀率预测。1986 年, Bollerslev 扩展 ARCH 模型, 引入滞后条件方差项, 形成广义自回归条件异方差模型(GARCH) [4], 显著提升了波动率的拟合效率。然而, 传统 GARCH 模型假设价格涨跌对波动的影响对称, 与实践中“坏消息引发更大波动”的现象矛盾。为此, 非对称 GARCH 模型应运而生: EGARCH 模型通过对条件方差取对数, 允许正负残差对波动产生非对称影响[5]; GJR-GARCH 模型则通过引入虚拟变量区分正负冲击, 直接量化杠杆效应[6]。APARCH 模型是极具概括能力的一个 GARCH 族模型[7]。实证表明, 这些模型能更精准捕捉金融市场的不对称波动特征。

在 GARCH 族模型的分布假设与风险度量优化研究方面。传统 GARCH 模型常假设正态分布, 但金融数据普遍呈现尖峰厚尾特性。学者通过改进残差分布提升风险价值(VaR)计算精度: t 分布和广义误差分布(GED)因其厚尾特性被广泛采用。陈学华和杨辉耀(2003)发现基于 GED 的 GARCH 模型能更准确刻画沪深股市尾部风险, 而正态分布会低估极端损失[7]; 宋永辉等(2018)进一步指出, GED 分布对创业板市场 VaR 值的计算误差显著低于传统方法, 尤其在置信水平 95%时表现更优[8]。不同 GARCH 族模型在不同市场中适用性各异: 周茂华等(2011)对比 RiskMetrics、GARCH 族及极值理论在黄金市场的应用, 发现学生 t 分布更适合上海市场(高风险、厚尾显著), 而正态分布对伦敦市场(波动相对平稳)拟合更佳[9]; 分位数 GARCH (QGARCH)模型通过引入流动性指标和非预期交易量因子, 进一步提升了低分位点(如 1%) VaR 估计的稳定性, 尤其在极端风险预测中表现突出。

碳排放权交易市场的价格波动具有显著的异方差性、区域差异性和政策敏感性。学者通过 GARCH 族模型深入分析其波动特征: (1) 波动集聚与长记忆性: 我国试点碳市场的收益率序列普遍存在波动聚集效应, 且条件方差呈现长期记忆特征。吕勇斌和邵律博(2015)基于 GARCH 模型发现, 各省市碳价收益率均存在显著波动集聚, 需通过增强市场透明度平抑异常波动[10]。(2) 非对称效应与区域差异: 江婷(2023)

结合 ARMA-EGARCH 和 VAR 模型分析广州、湖北、北京、上海四地碳市场,发现前三者对利空和利好消息均敏感,而上海市场仅对利好消息反应显著,凸显区域市场成熟度与投资者结构的差异[11]。(3) 多模型比较与政策启示: 研究显示, GARCH 模型能有效拟合碳价波动的条件异方差,而 VAR 模型在预测交互影响方面更具优势。建议结合“市场导向”与“政府监管”双轨机制,完善碳定价形成机制[12][13]。鉴于此,本文采用基于广义有偏学生氏 t 分布的 ARMA-APARCH 模型对我国碳排放权交易市场进行研究,并结合 VaR 模型给出碳排放权交易市场的风险度量。

2. 模型概述

2.1. ARMA 模型

自回归移动平均模型(ARMA 模型)常用于拟合平稳序列的模型,其数学表达式为:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \cdots - \theta_q e_{t-q}$$

式中, e_t 为白噪声序列。显然,当 $q=0$ 时, ARMA(p,q) 模型退化成了 AR(p) 模型;当 $p=0$ 时, ARMA(p,q) 模型退化成了 MA(q) 模型。

2.2. 广义有偏学生氏 t 分布

广义有偏学生氏 t 分布的密度函数为

$$p(x|\mu, \sigma, m, \lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\lambda + \frac{1}{\lambda}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{\lambda^2 x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}, & x < 0 \\ \frac{2}{\lambda + \frac{1}{\lambda}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{m\lambda^2}\right)^{-\frac{m+1}{2}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\sqrt{m-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\sigma^2 = \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 1\right) - \mu^2$$

式中, μ 和 σ^2 分别表示该分布的均值和方差。若随机变量 X 服从广义有偏学生氏 t 分布,记为 $X \sim \text{GST}(\mu, \sigma, m, \lambda)$ 。

2.3. APARCH 模型

Bollerslev 所推广的 GARCH 模型未能充分捕获金融时间序列的厚尾性和杠杆效应等。APARCH 模型由 Ding 等人提出,是对 ARCH (自回归条件异方差)模型和 GARCH (广义自回归条件异方差)模型的进一步推广。基于广义有偏学生氏 t 分布的 APARCH 模型的数学表达式也分为均值方程和方差方程两个部分,分别表示为:

$$r_t = \mu_t + a_t, a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim D(0,1) \quad (1)$$

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^m a_i (|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$$

(2)

式中， μ_t 为条件平均值， $\delta > 0$ ， $D(0,1)$ 为标准化分布。

若 $D(0,1)$ 所的分布为标准化广义有偏学生氏 t 分布，则得到基于广义有偏学生氏 t 分布的 APARCH 模型，简称为 APARCH-GST 模型。类似地，可构建基于正态分布的 APARCH 模型，简记为 APARCH-N 模型。系数 ω 、 α_i 、 γ_i 和 β_i 满足一定的正则性条件使波动率大于 0。

3. 碳排放权交易市场的实证

3.1. 碳市场的数据来源及描述统计

现在将北京绿色交易所和广州碳交易所的碳排放权的日收盘价格序列作为研究对象，时间的起始点分别为 2021 年 6 月 9 日到 2025 年 4 月 18 日。因为 2019 年至 2021 年是全球爆发疫情，这样可以减少在此之前股票价格大幅度波动对数据质量的影响。收益率选取日收盘价格的对数收益率，即 p_t 为第 t 天的收盘价格，则第 t 天的收益率的公式为 $r_t = 100(\ln p_t - \ln p_{t-1})$ 。

Table 1. Descriptive statistics of carbon emission right yield (%) in the carbon trading market
表 1. 碳交易市场碳排放权收益率(%)的描述统计

碳市场	样本量	均值	标准差	偏度	峰度	Shapiro 检验 P 值	ADF 检验 P 值
北京	456	0.0182	11.3982	0.0664	0.6308	<0.0001	0.01
广州	952	0.0009	2.8479	-0.1667	3.3611	<0.0001	0.01

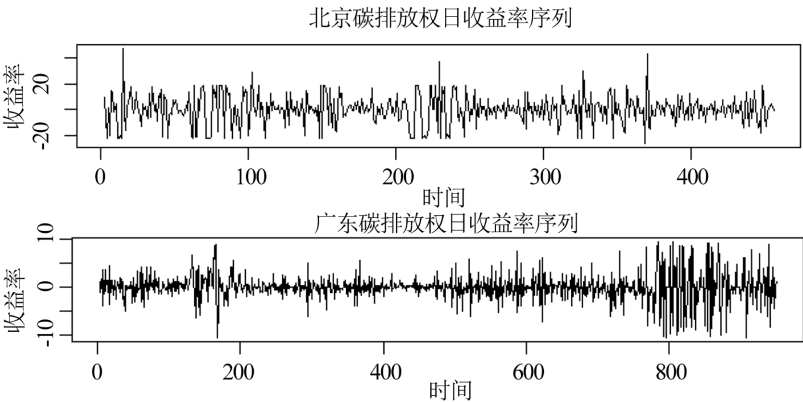


Figure 1. Time series diagrams of daily return rates of carbon emission rights in two carbon markets
图 1. 两个碳市场碳排放权日收益率序列图

- 基于碳交易市场收益率序列的描述性统计(表 1)及其图 1，可得出以下特征分析：
- (1) 平稳性与分布特性：ADF 检验结果显示，北京与广东碳市场的收益率序列均通过显著性水平检验(p 值小于 0.01)，表明序列具有宽平稳性。进一步通过 Shapiro 检验发现，两市场收益率均拒绝正态分布假设，呈现典型的尖峰厚尾特征。
 - (2) 区域波动差异：北京碳市场收益率序列的标准差达 11.3982，显著高于广东市场的 2.8479，反映出其价格波动更为剧烈，可能与政策调整频繁、市场流动性差异相关。
 - (3) 尾部风险对比：广东市场表现出更强的超额峰度(Kurtosis = 3.3611)，其分布尾部厚度是北京市场(Kurtosis = 0.6306)的 5.33 倍，意味着广东市场出现极端收益率事件的概率更高，这与该市场参与者结构

复杂、信息传导效率较低的特征相符。

3.2. 碳市场的最优 ARMA 模型拟合及残差相关检验

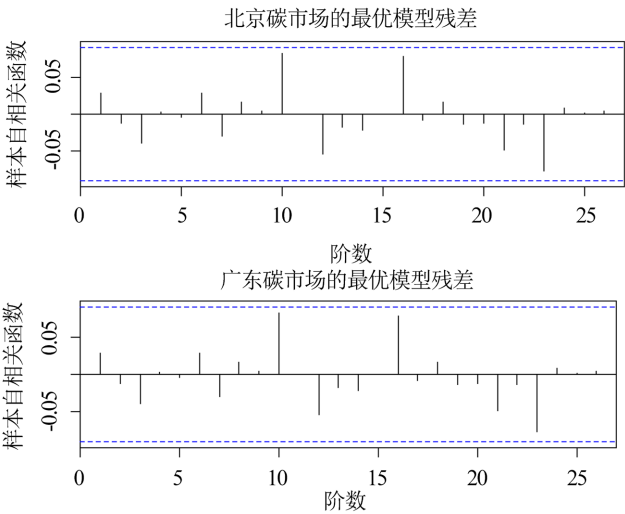
Table 2. Descriptive statistics of carbon emission right yield (%) in the carbon trading market
表 2. 碳市场的最优 ARMA 模型的参数估计

碳市场	参数	估计值	标准误差	t 值	P 值
北京	AR1	0.6532	0.0864	7.5558	<0.0001
	AR4	-0.1448	0.0472	-1.6746	0.0947
	MA1	-0.7857	0.0795	-9.0886	<0.0001
广东	AR1	0.3387	0.1234	2.7455	0.0062
	AR4	-0.1016	0.0359	-2.8286	0.0048
	MA1	-0.5016	0.1212	-4.1390	<0.0001

Table 3. Optimal ARMA model of carbon market and its related residual tests
表 3. 碳市场的最优 ARMA 模型及其相关残差检验

碳市场	模型	Log Likeli-hood	AIC	BIC	残差 Ljung-Box 检验 P 值	残差 ARCH 效应检验 P 值
北京	ARMA(4,1)	-1736.2	3480.4	3496.9	0.9671	0.0000
广东	ARMA(4,1)	5.408	6	0.60%		0.0001

表 2 和表 3 分别呈现了两个碳市场的疏系数 ARMA(4,1)模型的参数估计结果及其残差诊断检验。通过图 2 展示的残差序列与平方残差序列样本自相关函数(SACF)图可以发现, 虽然两个模型的残差序列均满足白噪声特性(Q 检验统计量在 5%显著性水平下均不显著), 但其平方残差序列的 SACF 呈现出显著的自相关特征(多阶滞后项超出置信区间)。这验证了残差序列存在条件异方差现象, 即具有显著的 ARCH 效应。实证结果表明, 两个碳市场收益率序列通过 ARMA(4,1)模型能有效提取线性相关结构, 但残差中仍存在未被捕捉的非线性波动集聚特征。



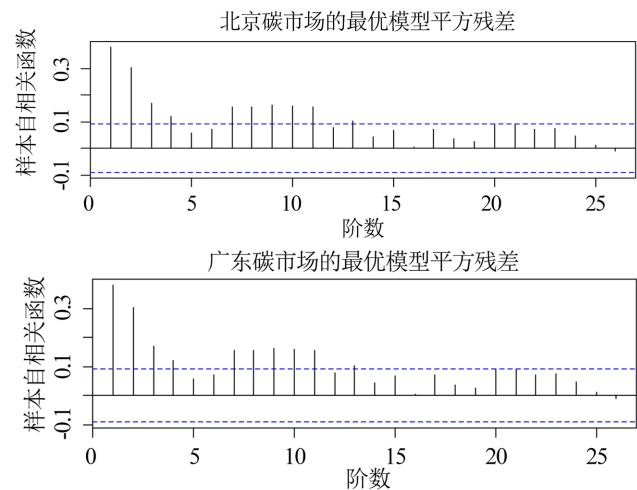


Figure 2. ACF plots of residuals and squared residuals from the optimal models for the two carbon markets
图 2. 两个碳市场碳排放权日收益率序列图

3.3. 碳市场的 APARCH 族模型

Table 4. Parameter estimation results of the APARCH model
表 4. APARCH 模型的参数估计结果

碳市场	北京		广东	
模型	APARCH-N	APARCH-SGED	APARCH-N	APARCH-SGED
参数				
mu	-0.0841 (0.4630)	-0.0707 (0.4350)	0.0189 (0.0593)	0.1470 (0.0468)
omega	6.7223 (3.8087)	4.9203 (1.8843)	0.1189 (0.0430)	0.0983 (0.0410)
alpha1	0.3904 (0.0916)	0.4450 (0.1004)	0.1336 (0.0228)	0.2308 (0.0310)
gamma1	0.1926 (0.1127)	0.2128 (0.1122)	-0.0279 (0.0590)	-0.0730 (0.0742)
beta1	0.3567 (0.1962)	0.3196 (0.1432)	0.8532 (0.0235)	0.8079 (0.0263)
delta	1.3017 (0.7143)	1.1545 (0.5885)	2.0000 (0.4302)	1.6246 (0.0954)
skew	-	0.8080 (0.0535)	-	1.1272 (0.0222)
dof	-	1.6599 (0.1623)	-	0.9521 (0.0513)

表 4 列举了两个碳市场碳排放权收益率序列的 ARMA-APARCH 族模型的拟合结果，从拟合效果来看，ARMA-APARCH 族模型能较好地拟合两个碳排放权收益率序列，下面进一步研究碳排放权收益率序列的风险特征及其规律。

4. 碳排放权交易市场的风险度量

4.1. VaR 的计算原理

风险度量是金融领域量化投资风险的核心工具，其通过构建数学模型与统计方法，评估资产在未来特定时期内可能面临的潜在损失、不确定性及波动性水平。作为风险管理体系的重要组成部分，风险度量旨在为投资者、金融机构及企业提供多维风险信息，辅助其优化资产配置策略、制定风险对冲方案，并为监管机构构建系统性风险预警框架提供数据支撑。

需要强调的是, 尽管风险度量在金融决策中具有不可替代的作用, 但其本质是基于历史数据与统计假设的前瞻性估计工具, 无法完全预测黑天鹅事件等极端风险。当前主流风险度量方法主要包括: (1) 尾部风险度量: 如风险价值(VaR)与条件风险价值(CVaR), 聚焦于极端损失的概率与规模; (2) 波动性指标: 如标准差、下行标准差, 衡量资产收益的离散程度; (3) 系统性风险测度: 如贝塔系数(β), 评估资产对市场波动的敏感度。

VaR (风险价值)作为国际通行的风险量化基准, 由 Jorion (1997)系统化定义为: 在既定持有期与置信水平下(如 95%置信度、1 日持有期), 某一金融资产或投资组合在正常市场环境中可能遭受的最大潜在损失。例如, 若某组合的 1 日 95% VaR 值为 100 万元, 则表明在 95%的概率下, 该组合单日损失不会超过 100 万元。

定义 1 设随机变量 Z 表示投资一定数额的资产 W 后, 在未来某一持有期 T 内的损益, 则称满足 $P\{Z < -\text{VaR}\} = \alpha$ 的正数 VaR 为该投资组合在未来持有期 T 内置信水平为 $1-\alpha$ 的风险值。

假设该投资组合在 $[0, T]$ 时期内的收益率 $X = Z/W$ 的分布函数为 $F(x)$, 且该投资组合的收益率分布的下侧 α 分位数为 $x_\alpha = \sup\{x | P\{X \leq x\} \leq \alpha\}$, 则 $\text{VaR}(Z) = -x_\alpha W$, 对于收益率序列 $\{r_t\}$, 可以得到 $\text{VaR}(r_t)$ 的计算公式为

$$\text{VaR}_\alpha = -(\mu + F^{-1}(\alpha)\sigma_t) \quad (3)$$

4.2. VaR 的回测检验

在实际应用中, 由于样本选取不当、模型假定或者是随机因素, VaR 的计算结果可能与实际值存在一定程度上的差异。故本文将借助 R 语言, 使用 Kupiec 于 1995 年提出的失败率检验方法来进行回测检验, 对其效果进行评估。具体原理如下:

若第 t 期的实际损益 r_t 与同期的 VaR 值相比偏高, 那么模型预测失败的次数就会增加 1 次, 反之则记模型预测成功。记样本总个数为 T , 失败总次数为 N 。当 $-\text{VaR}_t \leq r_t$ 时, $N_t = 0$; 当 $-\text{VaR}_t > r_t$ 时, $N_t = 1$, 从而实际 $f = N/T$, 其中 f 服从伯努利分布[13]。

当 VaR 在 $1-\alpha$ 的置信度下, 预期失败率为 α : 若实际失败率 f 远高于 α , 说明 VaR 模型低估了风险; 反之若 f 小于 α , 则说明其高估了风险, f 与 α 的数值越接近, 就说明 VaR 模型对风险的预测越准确[12]。在零假设 $f = \alpha$ 的条件下, Kupiec 提出了似然比率 LR 检验如下:

$$LR = -2\ln\left[(1-\alpha)^{T-N}(\alpha)^N\right] + 2\ln\left[(1-f)^{T-N}(f)^N\right]$$

LR 统计量服从自由度为 1 的卡方分布, 其在 0.05、0.025 和 0.0025 显著性水平下的临界值分别为 3.841、5.024 和 9.210, 若 LR 统计量大于对应置信水平下的临界值[13], 则拒绝原假设, 认为 VaR 模型对实际损失的估计是不合理的, 反之则接受原假设, 认为 VaR 模型可能是准确的。

4.3. 结果分析

本文将通过针对上述两种模型建立 VaR 模型来对碳市场排放权价格进行风险度量。分别取显著性水平为 0.05, 0.01, 0.005 对两种模型计算 VaR 值。根据上文对 VaR 模型原理的介绍, 我们可以知道 VaR 值越大, 代表着风险越高。

表 5 为不同分布下碳排放权价格对数收益率序列的 VaR 值统计结果, 分别统计了 VaR 均值及 Kupiec 回测检验。

由表 5 的 VaR 值统计结果可知:

(1) 在显著性水平的取值为 0.005 时, 用 APARCH-N 模型计算出的 VaR 平均值要小于 APARCH-GST

模型，可以说明若用 APARCH-N 模型来对数据进行风险度量，会低估风险程度；

(2) 基于 APARCH-N 模型计算出的 VaR 值，只有在显著性水平为 0.05 和 0.01 时，其 LR 统计量小于该显著性水平下的临界值，故在这两种显著性水平下可以接受原假设，认为 VaR 模型可能是正确的；而在显著性水平为 0.005 时，基于 APARCH-N 模型建立的 VaR 模型的 LR 统计量的 P 值小于 0.05，故在该显著性水平下，基于 APARCH-N 模型所计算的 VaR 模型对实际损失的估计不合理。而基于广义有偏学生氏 t 分布的 ARMA-APARCH 模型所计算出的 VaR 值在显著性水平为 0.05、0.025、0.0025 时，其 LR 统计量的 P 值均超过 0.05。

Table 5. Results of Kupiec Tests

表 5. Kupiec 检验结果

碳市场	水平	模型	VaR 均值	LR 统计量	P 值
北京	0.05	APARCH-N	17.1186	2.8426	0.0918
		APARCH-GST	18.7889	2.2202	0.1362
	0.01	APARCH-N	24.2122	2.6588	0.1030
		APARCH-GST	28.4982	0.0436	0.8347
	0.005	APARCH-N	26.8076	11.0029	0.0009
		APARCH-GST	32.2206	0.2109	0.6440
广东	0.05	APARCH-N	4.0403	0.8840	0.3471
		APARCH-GST	3.8872	0.6350	0.4255
	0.01	APARCH-N	5.7143	1.1607	0.2813
		APARCH-GST	6.5296	0.2245	0.6356
	0.005	APARCH-N	6.6341	4.4069	0.0358
		APARCH-GST	7.6825	0.9293	0.3350

通过上述比较与研究分析，可以认为基于广义有偏学生氏 t 分布的 ARMA-APARCH 模型可以作为碳市场碳排放权价格收益率序列风险度量的最佳模型。

基金项目

安徽省高校自然科学研究重点项目：双碳目标下碳排放预测模型研究(编号：2023AH053108)。

参考文献

- [1] 郝凤华. 基于 GARCH 族和 EVT 模型的股市风险价值的比较研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2009.
- [2] 王天一, 黄卓. 高频数据波动率建模——基于厚尾分布的 Realized GARCH 模型[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(3): 545-555.
- [3] 杨春晖. 基于 GARCH 类模型和机器学习算法的金融时间序列波动率分析与预测[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东大学, 2022.
- [4] 祝万伟, 李福安. 股票收盘价建立广义自回归条件异方差模型的实证分析[J]. 区域金融研究, 2015(9): 73-76.
- [5] 李月鲜, 刘媛媛, 张巍巍. EGARCH 模型和分位数自回归类模型在风险预测中的比较[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2022, 53(6): 660-666.
- [6] 赵晓波, 周雅瑞. 基于 GJR-GARCH 模型的港币汇率波动不对称性研究[J]. 南京财经大学学报, 2010(2): 39-44.
- [7] 陈学华, 杨辉耀. APARCH 模型在证券投资风险分析中的应用[J]. 运筹与管理, 2003(3): 92-97.

- [8] 宋永辉, 陈晨. 基于 GARCH 模型的我国创业板市场风险度量[J]. 沈阳工业大学学报, 2018, 11(5): 428-434.
- [9] 周茂华, 刘骏民, 许平祥. 基于 GARCH 族模型的黄金市场的风险度量与预测研究[J]. 国际金融研究, 2011(5): 87-96.
- [10] 吕勇斌, 邵律博. 我国碳排放权价格波动特征研究——基于 GARCH 族模型的分析[J]. 价格理论与实践, 2015(12): 62-64.
- [11] 江婷. 基于 ARMA-GARCH 族和 VAR 模型的碳排放权交易价格波动特征研究[J]. 统计学与应用, 2023, 12(1): 173-185.
- [12] 姚萍, 杨爱军, 林金官. 一类金融贝叶斯分位数 GARCH 模型及其在我国汇率市场中的应用研究[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(20): 10-16.
- [13] 苏小囡, 等. 基于广义已实现测度的沪深 300 股指期货波动率预测与风险度量[J]. 长春工程学院学报社会科学版, 2022, 23(2): 31-36.