Statistics and Application 统计学与应用, **2026, 15(1), 66-78**
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2026.151007

积分在概率论中的应用

王科皓

福建师范大学数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2025年12月5日；录用日期：2025年12月26日；发布日期：2026年1月7日

摘 要

积分是连接微积分与概率论的重要工具，在连续型随机现象的研究中具有核心作用。本文围绕积分在概率论中的应用展开系统梳理：从概率密度函数、分布函数、期望与方差等基本概念出发，阐述了积分在描述概率分布、计算随机变量特征数及处理多维联合分布中的关键作用。在理论介绍的基础上，通过一维与多维随机变量的典型实例，展示积分在求解参数、计算区间概率、推导分布函数、获得边缘密度和条件密度等方面的具体应用过程。研究表明，积分不仅是连续型概率模型的基础工具，也是理解随机规律、构建统计分析方法的重要途径。本文的讨论为进一步开展概率论学习与应用提供了参考。

关键词

概率论，积分，概率密度函数，期望，随机变量

The Application of Integral in Probability Theory

Kehao Wang

College of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: December 5, 2025; accepted: December 26, 2025; published: January 7, 2026

Abstract

Integration serves as a fundamental bridge between calculus and probability theory, playing a central role in the study of continuous random phenomena. This paper provides a systematic review of the applications of integrals in probability theory. Starting from the basic concepts of probability density functions, distribution functions, expectations, and variances, it illustrates how integrals are used to describe probability distributions, compute characteristics of random variables, and handle multidimensional joint distributions. Based on the theoretical framework, various examples of one-dimensional and multidimensional random variables are presented to demonstrate the use of

文章引用: 王科皓. 积分在概率论中的应用[J]. 统计学与应用, 2026, 15(1): 66-78. DOI: 10.12677/sa.2026.151007

integration in parameter determination, interval probability calculation, distribution function derivation, and the acquisition of marginal and conditional densities. The study shows that integration is not only the foundation of continuous probability models but also an essential tool for understanding random behavior and constructing statistical analysis methods. This discussion provides a useful reference for further learning and application of probability theory.

Keywords

Probability Theory, Integral, Probability Density Function, Expectation, Random Variable

1. 引言

随着数学的发展，积分在概率论中的应用越来越广泛，积分是微积分的一个关键组成部分。本节中就研究背景、内容以及意义进行介绍。

1.1. 研究背景

概率论与微积分是数学的 2 个不同分支，概率论是研究随机现象统计规律的一门数学科学，微积分即采用极限这一工具对函数进行了很好的研究，微积分思想不仅贯穿于高等数学的整个学习当中，同时也是构建概率论大厦的基石[1]。概率论及其研究对象是随机事件及其发生的可能性。随机变量和随机过程在概率论中扮演重要角色，它们描述了随机事件所遵循的规律[2]。然而，在实际问题中，我们往往需要对随机变量进行量化分析，计算其期望、方差等数学特征，这就需要引入积分的概念。

积分在概率论中的应用的研究背景可以追溯到 17 世纪的概率论的发展以及 19 世纪的积分学的建立。随着时间的推移，概率论和积分学逐渐融合，为统计学和数学的交叉领域提供了丰富的研究内容和方法。

在数学和统计学领域，研究人员致力于开发新的积分方法，以更好地解决概率论中的复杂问题，如随机过程的统计特性、随机变量的积分表示等。专家们在研究随机过程和随机微分方程时广泛使用积分方法。他们利用积分形式来表示随机微分方程的解，探索随机过程的性质和行为，并研究它们的长时间行为和极限行为。在统计学中，积分方法被广泛应用于贝叶斯统计推断。研究者们利用积分来计算后验分布和边缘分布，从而进行参数估计、模型比较和预测。在非参数统计学中，积分方法被用于估计密度函数、分布函数和相关函数等。

在当代，随着计算机技术的发展，数值积分在概率论中的应用也变得日益重要。数值积分可以帮助研究人员处理复杂的概率模型和大规模的数据，为实际问题的求解提供了有效的途径。

从更为抽象和严谨的理论角度看，积分在概率论中的引入并不仅仅是一种计算工具，而是建立在测度论基础之上的核心概念。现代概率论通常以测度论作为公理化基础，将概率视为定义在样本空间上的一种特殊测度。在这一框架下，随机变量被视为可测函数，而其分布则由概率测度所刻画。对于连续型随机变量，常见的概率密度函数并非概率本身，而是概率测度相对于勒贝格测度的“密度”。这一思想由拉东－尼科迪姆定理严格刻画，该定理保证了在适当条件下，概率测度可以表示为某一非负可积函数关于勒贝格测度的积分形式。由此，概率、期望等概念本质上均可统一为对可测函数的积分运算。这一测度论视角不仅为概率论提供了坚实的理论基础，也使积分在概率论中的应用具有了更深层的数学内涵，为随机过程、随机分析以及现代统计理论的发展奠定了重要基础。

综上所述，积分在概率论中的应用的研究背景可以追溯到数百年前的概率论和积分学的发展，随着时间的推移和数学理论的深化，积分在概率论中的应用也逐渐得到了丰富和深化。

1.2. 研究内容

本文对积分在概率论中的应用进行综述，包括其基本概念、原理和方法，并给出了具体例题进行分析。

首先介绍概率密度函数和概率分布函数的定义性质。然后，通过对概率密度函数的积分，推导和计算随机变量的概率分布函数。其次，介绍期望和方差的定义和计算方法。详细介绍了概率密度函数和概率分布函数的定义和性质。并探讨积分在计算这些统计量中所起的作用。我们还将研究多维随机变量的积分，介绍如何计算描述随机过程的平均性和离散性至关重要的统计量，如多维随机变量的期望、方差等。

概率论作为数学的一个重要分支，旨在研究随机现象背后的规律和概率分布。而积分作为数学中的基本工具之一，也在概率论中发挥着重要作用[3]。本文将探讨积分在概率论中的各种应用，并对相关研究进行综述和总结。

1.3. 研究意义

积分作为微积分的重要概念，被广泛应用于概率论中。积分不仅是微积分的一个重要组成部分，也是概率论中描述随机现象的重要工具。积分作为一种度量工具，能够精确地描述随机事件的概率分布及其相关性质。

在概率论中，深入研究积分在概率论中的应用，可以帮助我们更好地理解随机现象的本质，从而对实际问题中的随机现象进行更准确的建模和预测，通过分析随机变量的性质来帮助我们对除此以外的随机现象有更好的认识。积分方法往往是一些复杂的概率分布或随机过程中的有效解题方法之一，因此深入研究积分在概率理论中的应用，对概率论和统计学的发展具有重要的促进作用。

因此，深入研究积分在概率论中的应用不仅可以加深我们对概率论的理解，还能够为各个领域的实际问题提供解决方案，推动相关领域的发展和进步。

此外，积分还可以用来分析统计量，如随机变量的期望值、方差、协方差等。因此，研究积分在概率论中的应用具有重要的理论意义和实际应用价值。

2. 基本概念和理论

在概率论中，概率密度函数(PDF)、概率分布函数(CDF)以及期望和方差是基本概念。这些概念在概率论和统计学中都有广泛的应用，用于描述和分析随机变量的行为和性质。

2.1. 概率分布函数和概率密度函数的定义和性质

随机变量是概率论当中十分重要、核心的概念。随机变量的本质是一个实值函数，该函数可以将样本空间中的每一个样本点都对应映射到数轴上。

2.1.1. 定义

1) 概率分布函数的定义

取得有限个值的则称为离散型随机变量；

区间(a,b)所有值都能被取到，则称为连续型随机变量。

本文讨论的是积分在概率论中的应用，所以下文讨论的都是连续型随机变量。为了描述随机变量的概率分布，引进了分布函数的概念[4]。

定义 2.1 [5]设 X 是一个随机变量，对任意实数 x，称

$$F(x) = P(X \le x) \tag{2.1}$$

为随机变量 X 的分布函数。且称 X 服从 $f(x)$，记为 $X \sim F(x)$。

由定义可见，任何随机变量 X 都有与之对应的分布函数存在。

2) 概率密度函数的定义

对于连续随机变量，它可以告诉我们某一数值在给定的取值范围内出现的相对可能性大小，通过概率密度函数可以计算一些重要的统计量，如均值、方差、分位数等，通过对随机变量取值范围上的概率密度大小，从而更好地了解和分析数据的特点。此外，概率密度函数也为我们在实际应用中提供了概率计算和推断的依据，这些函数在假设检验、置信区间估计和预测分析等方面发挥了重要作用。

定义 2.2 [6]设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，如果存在实数轴上的一个非负可积函数 $p(x)$，使得对任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

则称 $p(x)$ 为 X 的概率密度函数，简称为密度函数或密度。同时称 X 为连续随机变量，称 $F(x)$ 为连续分布函数。

概率密度函数的图形面积也被称为该范围的累积分布函数。在统计学中，我们经常使用概率密度函数来进行数据建模和推断，通过概率密度函数来计算事件的概率。此外，概率密度函数也被广泛应用在模型的训练和推断过程中。

2.1.2. 性质

1) 概率分布函数的性质

任一分布函数 $F(x)$ 都具有如下三条基本性质：

① 非降性：分布函数是一个不减函数。

② 有界性：分布函数的值域在 0 到 1 之间。

③ 右连续性：分布函数是右连续函数。

成为分布函数必须具备的条件是：根据上述三种性质判断一个函数能否成为分布函数。

2) 概率密度函数的性质

概率密度函数的性质包括以下四点：

① 非负性：对于所有的概率密度函数的取值，都大于零。即 $F(x) \ge 0$。

② 规范性：概率密度函数在整个定义域的积分为 1。

③ 连续型随机变量取特定值的概率为 0。

④ $P\{a < x < b\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

这些性质是理解概率密度函数在概率论中的基础。

2.2. 连续型随机变量的期望和方差

期望和方差在概率论中扮演着重要的角色，因为它们提供了对随机变量分布的关键性描述和性质的度量。

2.2.1. 期望

连续型随机变量的期望表示了一个随机变量的平均值，它是对该变量在所有可能取值上的加权平均。例如：随机变量服从均匀分布，则其期望值等于取值范围的中点。许多常见的连续型随机变量都有已知的期望值，例如正态分布、指数分布和伽玛分布等。

期望是一个随机变量的中心趋势的度量，它代表着在一系列观察中这个随机变量的平均值。期望可以用来描述随机变量的平均特征。期望是一种重要的统计量。期望是一种重要的统计量。

总之，期望既具有理论上的重要性，又具有广泛的实际应用价值，作为统计学和概率论中的一个重要概念。

2.2.2. 方差

方差是衡量其取值的离散程度的指标，方差大，随机变量的取值波动大，方差小，值起伏不是很大。

标准差是方差的平方根便于解释数据的分布特征，方差具有非负性质，即方差不会小于零，当仅恒定随机变量时，方差为零，在正态分布中，方差决定了分布的形状，即方差越大，分布越分散；方差具有非负性质，即方差不小于零，方差不小于零方差越小，就会越集中地分布。

方差用于分析和描述数据的波动性，以及评估模型的准确性和稳定性，在统计学、金融学、工程学等领域有广泛的应用。

3. 积分在概率论中的应用

微积分是研究极限、微分学、积分学和无穷级数等的一个数学分支，是一门研究变化的学问。研究函数的局部变化情况。不定积分指的是微积分中的分运算。定积分是计算一个函数在某一区域中相加的结果[7]。

3.1. 概率密度函数的积分求概率分布函数

要计算概率密度函数的积分以获得概率分布函数，你可以将概率密度函数从负无穷积分到变量的值。这将给出累积概率直到该值。

定义 3.1 [8]假设概率密度函数为 $f(x)$，那么概率分布函数 $F(x)$ 的计算公式如下所示：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t, \tag{3.1}$$

其中 $F(x)$ 表示在 x 处以下的累计概率， $f(x)$ 表示概率密度函数。

在概率论和统计学中，它们是描述和分析连续型随机变量概率分布的非常重要的工具，这两个函数之间关系密切，可以通过概率密度函数推导出概率分布函数，也可以通过概率分布函数推导出概率密度函数。

3.2. 随机变量的期望和方差的积分计算方法

连续型随机变量的期望与方差可以通过公式计算。

3.2.1. 期望计算方法

计算连续性随机变量的期望通常使用积分。计算公式如下：

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

这个积分表示 x 乘以其概率密度函数 $f(x)$ 在整个实数轴上进行积分。期望可以理解为权重于随机变量在每个取值上取值的概率(composition)的随机变量 x 在所有可能取值上的加权平均。

期望(Expression)是对随机变量提供有关随机变量平均值信息的中心位置的度量。

当计算连续性随机变量的期望时，有几点需要注意：

① 积分范围：积分范围通常是整个定义域，但有时也可以是特定的区间，具体取决于问题的要求。

② 随机变量的函数：要计算的是某个函数关于随机变量的期望，使用函数的形式进行积分。即若有函数 $g(x)$，则期望可以表示为：

$$E\left(g\left(x\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

3.2.2. 方差计算方法

计算连续性随机变量的方差也需要使用积分。方差的计算公式如下：

$$Var\left(X\right)=E\left[\left(X-\mu\right)^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\mu\right)^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x, \tag{3.4}$$

其中，u 是随机变量的期望(均值)，$f\left(x\right)$ 是随机变量的概率密度函数。这个积分表示随机变量取值与其期望的偏差的平方的加权平均值。

上述公式计算较为复杂，在实际应用中我们更常使用方差的性质进行计算：

$$Var\left(x\right)=E\left(x^2\right)-\left[E\left(x\right)\right]^2, \tag{3.5}$$

根据期望的性质易证明[9]。

方差是用来衡量随机变量的变异程度的重要统计量，它在数据分析和建模中经常被使用。

3.3. 多维随机变量及联合分布

对于二维连续性随机变量而言，在计算过程中主要利用到的是二重积分的计算。设二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 的分布函数为 $F\left(X,Y\right)$，如果存在非负函数 $f\left(x,y\right)$，对于任意实数 x,y，

$$F\left(x,y\right)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f\left(u,v\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{3.6}$$

则称 $\left(X,Y\right)$ 为二维随机变量。称 $f\left(x,y\right)$ 为 $\left(X,Y\right)$ 的联合密度函数。

多维随机变量是指具有多个随机分量，通常表示为 $\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 的随机变量，可以用它们来描述多个随机特征同时存在的情况，例如在多个统计分析领域，机器学习和信号处理。

在概率论和统计学中，研究多维随机变量及其联合分布的性质和特征是非常重要的。它们为数据分析、推断和建模提供了基础，也为许多实际问题的解决提供了有力工具。

联合密度函数的性质

边缘密度函数是指在多维随机变量的联合密度函数中，为了得到单个或部分随机变量的密度函数而对某一个或多个随机变量进行积分。

1) 边缘密度函数

从联合密度函数中可以求得各个边缘分布的密度数。对于二维随机变量 $\left(X,Y\right)$，其边缘密度函数为：

$$P_x\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}p\left(x,y\right)\mathrm{d}y,-\infty<x<\infty \tag{3.7}$$

称为 X 的边际密度函数，称

$$P_y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}p\left(x,y\right)\mathrm{d}x,-\infty<y<\infty \tag{3.8}$$

为 Y 的边际密度函数。

边缘密度函数描述多维随机变量中某一个或几个变量的概率分布而不考虑其他变量的取值，它是由提供单一随机变量信息而不涉及其他随机变量信息的边缘密度函数在概率论和统计学中非常重要的，通过多维随机变量的联合密度函数对其他变量进行积分而得到的。这些边缘密度函数可以用来计算期望，方差，以及各种概率计算单个变量(regency computing)。

在实际应用中，特别是在处理多个变量之间的关系时，边缘密度函数常被用来分析多维随机变量的特性。

2) 连续型随机变量的条件分布

对一切 $P_Y(y)>0$，给定 $Y=y$ 条件下 X 的条件密度函数和条件分布函数分别为

$$P(x\mid y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}, F(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x}p(u\mid y)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{x}\frac{p(u,y)}{p_Y(y)}\mathrm{d}u. \tag{3.9}$$

条件分布函数是在已知的某一条件下在给定某一条件下的分布函数，如：给定一个人的年龄，条件分布函数可以描述其身高的概率分布；或者给出一个患者的病症，条件分布函数可以描述出他患某种疾病的概率分布，比如这样的情况。

这些性质是联合密度函数的基本特征，有助于我们理解和分析多维随机变量的分布特征。根据以上的两种性质，下文将给出相关的例题进行分析。

4. 实例分析

概率论中大部分的问题都可以通过微积分的方法来进行处理分析。概率论中涉及到连续性随机变量的问题几乎都要使用积分，因而积分计算在概率中显得尤为重要[10]。

本文主要讨论积分在概率论中的应用。以下给出一些具体问题并进行分析。

4.1. 单变量函数的积分在概率论中的应用

对于一维连续型随机变量，计算其相关问题常用的是一重积分。针对不同的问题进行具体分析，下面给出一些例题及其分析过程。

4.1.1. 通过性质求解未知参数

在实际学习中，经常遇到一类问题：题目给出一个含未知参数的概率密度函数(概率分布函数)，需要通过概率密度函数的性质进行求解未知参数，例如：

例 1 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}a\mathrm{e}^{-2x}, x\geq 0,\\ 0, x<0,\end{cases}$$

其中 a 为常数，试求 a。

分析：规范性密度函数的重要性质，说明由于概率的总和必须是 1。所以在整个定义域中概率密度函数的积分为 1。已知 X 为一随机变量，那么 X 必然满足规范性。所以可以通过对题中所给的概率密度在定义域上积分结果为 1 这一条件来求解未知常数 a。

解： 由

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1, \tag{4.1}$$

代入原题已知条件，当 $x<0$ 时，积分为 0；当 $x\geq 0$ 时，积分下限为 0，上限为无穷，$f(x)=a\mathrm{e}^{-2x}$，即由 $\int_{0}^{\infty}a\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=1$ 可得 $a=2$。

对于这类问题，关键在于列出积分等式。值得注意的是，对于有着不同定义域的函数，要具体分段讨论，对各部分进行全定义域上的积分并各部分相加结果为 1，构成全定 a 义域的积分，最后求解出所求未知参数。

4.1.2. 通过单变量函数的积分求解区间上的概率

实际学习中，也经常遇到这样一类问题：题目给出一个概率密度函数(概率分布函数)和一个(定义域上的)区间，要求计算已知概率密度函数(概率分布函数)在该区间上的概率，继续引用例 1 中的概率密度

函数，例如：

例 2 [11]设 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, x\geq 0,\\ 0, x<0,\end{cases}$$

试求 $p(x>0.5)$。

分析：上文总结概率密度函数的性质时，

$$P\{a<x<b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

作为一条十分关键性质，它可以被用来解决这一类问题。

解：已知 X 为一随机变量，且在 $x>0$ 时，$f(x)=2\mathrm{e}^{-2x}$，题目中求 $p(x>0.5)$ 的值，可以转换成问题：$f(x)=2\mathrm{e}^{-2x}$ 在 $x>0.5$ 上的积分，即：

$$p(x>0.5)=\int_{0.5}^{\infty}2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

对于这类问题，关键在与列出积分式。需要注意的是，针对于不同的积分区域要选择相对应的概率密度函数进行积分运算，对于包含密度函数的不同分段区间的积分区域，要分段进行分析，逐段计算并求和，即可得出所求区域内的总概率。本题中，$x>0.5$ 属于 $x\geq 0$ 的范围内，所以直接对 $f(x)=2\mathrm{e}^{-2x}$ 进行积分即可。

4.1.3. 通过积分方法求概率分布函数

从概率密度函数与概率分布函数的定义出发，可以发现通过概率分布函数分别对每段定义域上的函数进行求导，即可得出对应的概率密度函数。对于这个性质，也可以反推出概率密度函数在每段上的变上限积分即为对应的概率分布函数。但在实际求解中，常会犯一些错误。下文将给出例题与常见错解并分析纠正错解。

例 3 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1-x, 0\leq x<1,\\ x-1, 1\leq x<2,\\ 0, \text{其他},\end{cases}$$

求分布函数 $F(x)$。

常见错解：

当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=0$；

当 $0\leq x<1$ 时，$F(x)=0+\int_0^1 1-x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$；

当 $1\leq x<2$ 时，$F(x)=\frac{1}{2}+\int_1^2 x-1\mathrm{d}x=1$；

当 $2\leq x$ 时，$F(x)=1+\int_2^{\infty}0\mathrm{d}x=1$，

于是 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, x\leq 0,\\ \frac{1}{2}, 0\leq x<1,\\ 1, 1\leq x<2,\\ 1, 2\leq x.\end{cases}$

错误解析：从题目中可以看出，当 x 属于 $0\leq x<1$，$1\leq x<2$，$2\leq x$ 时，$F(x)$ 为一个分段函数。而

错误之处就在于将$\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$拆成若干个部分之和时，直接对整段区间进行积分再进行相加，这并不是正确的做法。产生该错误可能是因为如下原因：没有充分理解概率分布函数的定义：

$$F(x)=P(X\le x). \tag{4.3}$$

即其直观意义是求随机变量$(-\infty,x]$的概率。

需要在无穷区间上对进x行积分，由于$F(x)$为一分段函数，所以需要将$\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$拆成若干个积分之和。要注意的是在$x$已经遍及过的区间内，要对对应的函数进行整段积分，而最后一个积分要求是x的变上限积分，再加上前面已经遍及过的部分，才是正确计算概率分布函数的方法。特别的，由于不定积分中会存在常数C，所以要结合概率分布函数的右连续性进行确定常数。

解：对分段函数每段进行不定积分：当$x<0$时，$F(x)=0$；

当$0\le x<1$时，$F(x)=0+\int_0^x(1-x)\mathrm{d}x=x-\frac{1}{2}x^2$；

当$1\le x<2$时，再根据概率分布函数的右连续性，

$$F(x)=0+\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^x(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2-x+1;$$

当$2\le x$时，$F(x)=1$。

综上可得出正确的概率分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ x-\frac{1}{2}x^2, 0\le x<1,\\ \frac{1}{2}x^2-x+1, 1\le x<2,\\ 1, 2\le x.\end{cases}$$

在解决该类问题的过程中，可以结合图形来进行直观理解概率分布函数的定义。对于求解过程中的最后一个积分的部分，要关注它是一个变上限积分，即积分上限是x，而不是它所位于的定义域的右端点。

4.1.4. 通过单变量函数的积分求一维随机变量的期望与方差

例 4 设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, -1<x\le 0,\\ 1-x, 0<x\le 1,\\ 0, \text{其他},\end{cases}$$

试求期望$E(x)$和方差$Var(x)$。

分析：求随机变量的期望与方差最关键的就是知道该随机变量的概率密度函数，若已知的是分布函数，需要计算出密度函数再由期望与方差的计算公式求解。本题中已知密度函数，所以只需要用上文提到的期望与方差的计算式进行计算即可。

$$Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2. \tag{4.4}$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6};$$

所以

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X^2\right)\right]^2=\frac{1}{6}.$$

只要知道了期望的计算方法，通过方差的性质可以方便地计算方差，使用方差的原本定义式计算起来较为复杂。

例 5 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}a+bx^2,0\le x\le 1,\\0,其他,\end{cases}$$

如果 $E(x)=\frac{2}{3}$，求 a 和 b。

解析：通过对已知条件的分析，并考虑随机变量概率密度函数的各种性质，联立方程组求解随机变量中未知常数的求解的具体思路。本题中，$E(x)=\frac{2}{3}$ 是求解的关键已知条件，但存在 A、B 两个未知数，已知一个条件不能求解两个未知数，此时可联想到上文例 1 中提到的概率密度中的一个关键性质：概率密度函数的归一性。将两个条件列出等式，联立求解 A、B 即可。

解： 由 $\int_0^1\left(a+bx^2\right)\mathrm{d}x=1$ 得

$$a+\frac{1}{3}b=1.$$

又由 $\frac{2}{3}=E(X)=\int_0^1 x\left(a+bx^2\right)\mathrm{d}x$ 得

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b=\frac{2}{3}.$$

联立上述两式，可得 $a=\frac{1}{3},b=2$。

4.1.5. 通过单变量函数的积分求二维随机变量的边际密度函数

例 6 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y},0<x<y,\\0,其他,\end{cases}$$

求边际密度函数 $P_x(x)$ 和 $P_Y(y)$。

解： 当 $x>0$ 时，有 $P_X(x)=\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$，所以边际密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y},0<x<y,\\0,其他,\end{cases}$$

当 $y>0$ 时，有 $P_Y(y)=\int_0^y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=y\mathrm{e}^{-y}$，所以边际密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}y\mathrm{e}^{-y},y>0,\\0,其他.\end{cases}$$

根据上文提到的计算方法，可以容易计算出边际密度函数。边际密度函数的思想简化复杂的问题，在二维随机变量中，对另一个变量进行积分，例如，我想求 x 的边缘密度函数，只需要对 y 在全域上进行积分即可求出，反之类似。

4.2. 多变量函数的积分在概率论中的应用

在计算多维随机变量的特征数时，经常使用多个积分。联合概率密度函数在二维随机变量的情况下，二重积分可以计算概率密度函数值，该函数值在给定区域内，用于分析两个变量之间的关系，以及它们联合概率分布在一定区域内。

联合累积分布函数是两个随机变量的联合概率密度函数的积分，表示两个变量在给定区域内的联合概率。通过二重积分，可以计算给定区域内的联合累积分布函数值，用于计算概率或进行区域概率的计算。通过二重积分，可以计算给定区域内的联合累积分布函数值。通过二重积分，可以计算给定区域内的联合累积分布函数值

通过合理地使用二重积分技术，可以深入研究随机变量之间的关系，分析复杂的概率问题，并从中得到有价值的结论和洞见。

4.2.1. 通过多变量函数的积分计算二维随机变量的特征数

例 7 [12]设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right),0<x<1,0<y<2,\\ 0,\text{其他},\end{cases}$$

求 X 与 Y 的协方差。

解： 先求 X 与 Y 的期望与方差。

$$E(X)=\int_0^1\int_0^2 x\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{5}{7};$$

$$E(Y)=\int_0^1\int_0^2 y\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{8}{7};$$

$$E(X^2)=\int_0^1\int_0^2 x^2\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{39}{70};$$

$$E(Y^2)=\int_0^1\int_0^2 y^2\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{34}{21}.$$

所以依据上文的方差计算公式：

$$Var(X)=\frac{39}{70}-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{23}{490},Var(Y)=\frac{34}{21}-\left(\frac{8}{7}\right)^2=\frac{46}{147},$$

又因为

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^2 xy\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{17}{21},$$

所以 X 与 Y 的协方差为

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147}.$$

本题中先使用二重积分计算了 X 、Y 和 XY 的期望，再计算出 X 与 Y 的方差，最后通过协方差的公式计算出 X 与 Y 的协方差。

条件分布函数在很多领域都有广泛的应用，包括统计学、机器学习、模式识别、信号处理等。在这

些领域，通过分析数据的条件分布可以做出推断、预测或者决策。

4.2.2. 通过多变量函数的积分求二维随机变量的条件分布的概率

例 8 已知随机变量 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}5y^4,0<y<1,\\0,其他,\end{cases}$$

在给定 $Y=y$ 条件下，随机变量 X 的条件密度函数为

$$p(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{y^3},0<x<y<1,\\0,其他.\end{cases}$$

求概率 $p(x>0.5)$。

解： 因为

$$p(x,y)=p_Y(y)p(x\mid y)=\begin{cases}15x^2y,0<x<y<1,\\0,其他.\end{cases}$$

所以

$$p(X>0.5)=\int_{0.5}^{1}\int_{x}^{1}15x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{0.5}^{1}\frac{15}{2}x^2\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{47}{64}.$$

5. 结论

微积分是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支．微积分是建立在实数、函数和极限的基础上的．极限和微积分的概念可以追溯到古代[13]。

微积分广泛应用于物理学各领域，如概率论，统计学，物理学，工程学，物体的加速度、速度、位移等关系，以及复杂的物理场问题的求解，经济学上可以用微积分来建立和分析经济模型，解决优化问题，经济学上可以用微积分来描述物体的加速度，以及生产函数的边际分析题、效用函数与成本函数、供求曲线的弹性计算等对市场行为的认识等等，都是可以通过微积分的方式来求解的。在有一些特殊特殊函数中也可应用，通过微积分中的特殊函数来在概率论中体现，也能够得到广泛的应用，在函数的借用过程中都能够通过概率论来得到分布[14]。

从物理学到工程学，从经济学到生物学，二重积分都扮演着关键的角色，为理解和解决实际问题提供了强有力的工具[15]。数学和物理学是相通的，很多的数学问题具有物理背景，而很多的物理问题也需要数学工具来解决[16]。

本文也存在以下不足之处：积分不仅在概率论中发挥着重要作用，在统计学中的参数估计和假设检验等统计推断中也扮演着关键的角色，本文没有对统计学中的具体作用进行研究说明。例如在统计学当中，通过构建似然函数或方差函数，并利用积分技术对其进行优化或计算，我们可以得到最大似然估计值、最小均方误差估计值等参数估计量，从而进行更准确的数据分析和预测。同时，积分还能够帮助我们推导出各种假设检验的统计量，如 t 检验、F 检验等，用于检验样本数据是否符合某些假设，从而进行科学的决策和推断。积分的使用远不止本文中的研究，希望研究人员继续探究积分在概率论以及更多相关学科中的应用。

综上所述，本文通过对积分在概率论中的多个应用进行详细探讨，展示了积分在统计学和概率论中的重要性和广泛应用价值。这些应用不仅对理论研究具有重要意义，还在实际问题的建模、分析和解决

中发挥着关键作用，为推动科学技术的发展和社会进步提供了有力支持。

参考文献

[1] 范玉妹, 汪飞星, 王萍, 等. 概率论与数理统计[M]. 第 3 版. 北京: 机械工业出版社, 2017.

[2] 张景中. 趣味随机问题[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[3] Moshayedi, N. (2022) Introduction to Probability Theory: A First Course on the Measure-Theoretic Approach. World Scientific Publishing Company.

[4] 王焕男. 微积分在概率论中的应用[J]. 科技创新与应用, 2019(2): 176-178+181.

[5] 刘禄勤, 王文祥, 龚晓庆. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[6] 余长安. 概率论与数理统计[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2007.

[7] 周永涛. 高等数学知识在概率论中的应用[J]. 当代教育实践与教学研究, 2019(16): 237-238+242.

[8] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[9] 李贤平. 概率论基础[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1997.

[10] 刘素红. 定积分在概率论中的应用[J]. 数学学习与研究(教研版), 2009(7): 94-94.

[11] 刘卫锋, 常娟, 刘林. 概率论中定积分计算的若干常见错误与剖析[J]. 郑州师范教育, 2021, 10(6): 1-5.

[12] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程习题与解答[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[13] 郭俊梅. 浅谈微积分在概率统计中的应用[J]. 数学学习与研究, 2012(19): 100.

[14] 赵丽姝. 微积分在概率论中的应用[J]. 科技资讯, 2016, 14(29): 176-177.

[15] 赵振刚. 二重积分及其应用[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2024, 45(1): 68-76.

[16] 宋书宇. 微积分在物理学中的应用[J]. 数理化解题研究, 2023(36): 110-112.