

相依异质部件构成故障安全系统的统计优化

苟 倩

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年12月30日; 录用日期: 2026年1月21日; 发布日期: 2026年2月2日

摘 要

本文研究了由 N 种类型异质部件构成的故障安全系统的统计优化。考虑同一类型部件相依可交换, 不同类型部件之间独立的情况下, 故障安全系统的平均失效时间的比较, 以及使得平均成本率函数最小的每种类型部件的最优数量。

关键词

异质部件, 故障安全系统, Copula, 优化序, 成本函数

Statistical Optimization of Fail-Safe Systems with Dependent Heterogeneous Components

Qian Gou

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: December 30, 2025; accepted: January 21, 2026; published: February 2, 2026

Abstract

This paper studies the statistical optimization of fail-safe systems composed of heterogeneous components of various types. It considers the case where components of the same type are exchangeable and dependent, while components of different types are independent, and compares the mean time to failure, and the optimal number of each type of component that minimizes the average cost rate function.

Keywords

Heterogeneous Components, Fail-Safe Systems, Copula, Majorization, Cost Function



1. 引言

在可靠性理论和工程安全的实际应用中，常见的串联系统非常脆弱，任何一个部件失效都会导致系统故障，而并联系统又有着高昂的经济成本，使其难以实现。因此，可靠性工程师设计了一种可靠性更高、成本更低的故障安全系统。

故障安全系统是一种非常常见的容错系统类型，系统寿命对应于次序统计量 $X_{2:n}$ ，当系统中超过两个部件失效时，整个系统就会失效，这在航空航天和核电站等领域的系统设计中被广泛应用。Pham 等(1992) [1]中一些典型的例子包括核电站控制系统和航空航天系统，这些系统的设计原则是在发生故障时也能保证安全，而不是完全防止故障的发生。这类系统的应用可以在安全监测和反应堆紧急停机功能系统中找到。例如，核电站通常采用三个并联运行的计数器来监测通风系统中的空气放射性水平，其设计意图是在检测到危险的放射性水平时启动反应堆停机程序，当两个或更多计数器同时记录到危险的放射性水平时，反应堆将执行停机操作。

目前，已有多篇文献研究了故障安全系统，例如，Zhao 等(2011) [2]研究了具有异质指数分布部件的故障安全系统在扩散序下的比较结果并且将这一结果推广到了比例失效率模型。Zhang 等(2019) [3]讨论了两个包含独立部件且受独立随机冲击影响的故障安全系统在普通随机序、失效率序以及似然比序下的比较结果。Zhang 等(2023) [4]在普通随机序和失效率序的意义下分析了统计相依部件受随机冲击影响下存活概率和部件寿命对故障安全系统可靠性的影响。Hawtader 等(2023) [5]研究了受随机冲击影响的相依异质部件构成故障安全系统的寿命的随机比较。Lv 等(2025) [6]研究了来自相依的一般半参数分布族观测值的第二小顺序统计量的随机比较。

对于系统中部件相依的可靠性分析的文章并不多见。Eryilmaz (2020) [7]研究了具有多类型相依部件并联系统的平均失效时间以及系统中的最优部件数量。Torrado (2022) [8]得到了具有多种类型相依部件的并联系统在部件数量分配向量满足弱超优序的情况下的平均失效时间的比较结果，并且研究了使得平均成本率函数最小的每种类型部件的最优数量。Torrado 等(2024) [9]分析了具有相依部件的串 - 并联系统的两个重要的可靠性指标：系统中失效部件的平均数量以及系统的平均失效时间以及使得与纠正性维护策略相关的平均成本率函数最小的每个子系统的最优部件数量。了解平均失效时间以及最优部件数量对于评估系统的整体性能和可靠性至关重要，因此受上述文章的启发，本文研究了多类型相依部件构成故障安全系统的寿命分析以及使得平均成本率函数最小的多类型异质部件故障安全系统中每种类型部件的最优数量，进一步将 Torrado 等(2024) [9]中串 - 并联系统的结果推广到具有多类型异质部件的故障安全系统中。

2. 预备知识

在本文中我们研究了具有多类型相依部件的故障安全系统，部件之间的相依性由 Copula 函数来构建，为了进一步了解 Copula 函数的重要性，我们给出了著名的多元分布的 Sklar's 定理。令 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为具有边缘分布 $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ 的 n 元联合分布函数，则存在一个 Copula 函数 $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ，满足

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (1.1)$$

若 $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ 是连续函数, 则 $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 唯一确定。

接下来, 我们回忆阿基米德 Copula (Archimedean Copula) 函数的定义和 FGM Copula 的定义。

定义 1 [10] 对于一个单调非增并且连续的函数 $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, 使得 $\phi(1) = 0, \phi(0) = \infty$ 并且 ϕ^{-1} 是 ϕ 的反函数, 如果 $(-1)^k \phi^{[k]}(x) \geq 0, k = 0, 1, \dots, n-1$ 并且 $(-1)^{n-2} \phi^{[n-2]}(x)$ 是递减并且凸的则称由

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \dots + \phi(u_n)) \quad (1.2)$$

给出的函数 $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 是具有生成元 ϕ 的阿基米德 Copula 函数, 其中 $u_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$ 。

关于阿基米德 Copula 及其应用的更详细讨论, 可参考 Zhang 等(2022) [11]。

定义 2 [10] 一个 n 维 FGM (Farlie-Gumbel-Morgenstern) Copula 的定义如下:

$$C(v_1, v_2, \dots, v_n) = \prod_{j=1}^n v_j \left(1 + \theta \prod_{j=1}^n (1 - v_j) \right) \quad (1.3)$$

其中 $\theta \in [0, 1]$ 并且 $v_j \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, n$ 。

关于 FGM Copula 函数及其应用的更详细讨论, 可参考 Zhang 等(2022) [12]。接着, 我们给出优化序的定义, 它是建立统计与概率中各种不等式的基本工具之一。

定义 3 [13] 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是两个 n 维的实值向量, 设 $x_{1:n} \leq x_{2:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ 和 $y_{1:n} \leq y_{2:n} \leq \dots \leq y_{n:n}$ 分别表示 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 中元素的增排列。若 $\sum_{j=1}^i x_{j:n} \leq \sum_{j=1}^i y_{j:n}$, 则称向量 $\mathbf{x}$ 在弱超优序下大于 $\mathbf{y}$, 记作 $\mathbf{x} \succeq^w \mathbf{y}$ 。

关于优化序及其应用的更详细的讨论, 可参考达高峰等(2022) [14]。

3. 模型描述

在本文中, 我们考虑一个由 N 种类型相依部件构成的故障安全系统, 同一类型的部件相依同分布且并联放置, 每种类型的部件所构成的子系统之间相互独立, 只要有二个或二个以上的子系统失效那么这个故障安全系统就会失效。

特别地, 我们假设第 ℓ 个子系统中的相依可交换部件共有 $m^{[\ell]}$ 个, 并且这 $m^{[\ell]}$ 个部件是同分布的, 其中 $\ell = 1, 2, \dots, N$, 令 $S_j^{[\ell]}$ 代表第 ℓ 个子系统中的第 j 个部件的寿命, $j = 1, 2, \dots, m^{[\ell]}$ 。那么第 ℓ 个子系统中部件寿命的分布函数表示为

$$F^{[\ell]}(t) = P(S_j^{[\ell]} \leq t) \quad (2.1)$$

$S^{[\ell]}$ 代表第 ℓ 个子系统的寿命, 它可以表示为

$$S^{[\ell]} = \max \{S_1^{[\ell]}, S_2^{[\ell]}, \dots, S_{m^{[\ell]}}^{[\ell]}\} = S_{m^{[\ell]}, m^{[\ell]}}^{[\ell]} \quad (2.2)$$

假设第 ℓ 个子系统中 $m^{[\ell]}$ 个可交换部件的寿命之间的相依性由一个 $m^{[\ell]}$ 维的阿基米德 Copula 函数 $C^{[\ell]}: [0, 1]^{m^{[\ell]}} \rightarrow [0, 1]$ 所构建。第 ℓ 个子系统的寿命的分布函数可以表示为

$$\begin{aligned} \bar{F}_{s^{[\ell]}}(t) &= 1 - P\left(\max \{S_1^{[\ell]}, S_2^{[\ell]}, \dots, S_{m^{[\ell]}}^{[\ell]}\} \leq t\right) \\ &= 1 - P\left(S_1^{[\ell]} \leq t, S_2^{[\ell]} \leq t, \dots, S_{m^{[\ell]}}^{[\ell]} \leq t\right) \\ &= 1 - C^{[\ell]}\left(F_{s^{[\ell]}}(t), F_{s^{[\ell]}}(t), \dots, F_{s^{[\ell]}}(t)\right) \\ &= 1 - \phi\left[m^{[\ell]} \phi^{-1}\left(F^{[\ell]}(t)\right)\right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

接下来, 我们令随机向量 $\mathbf{S} = (S^{[1]}, S^{[2]}, \dots, S^{[N]})$, 故障安全系统的寿命为 $T = [S^{[1]}, S^{[2]}, \dots, S^{[N]}]_{2:N}$ 以及随机向量 $\mathbf{S}^{[\ell]} = (S^{[1]}, S^{[2]}, \dots, S^{[\ell-1]}, S^{[\ell+1]}, \dots, S^{[N]})$, $\ell = 1, 2, \dots, N$ 。由此, 故障安全系统寿命的生存函数可以表示为

$$\begin{aligned}\bar{F}_T(t) &= P\left([S^{[1]}, S^{[2]}, \dots, S^{[N]}]_{2:N} > t\right) \\ &= P(\mathbf{S}_{2:N} > t) \\ &= P(\mathbf{S}_{2:N} > t, \mathbf{S}_{1:N} \leq t) + P(\mathbf{S}_{2:N} > t, \mathbf{S}_{1:N} > t) \\ &= \sum_{\ell=1}^N P(S^{[\ell]} \leq t, \mathbf{S}^{[\ell]} > t) + P(\mathbf{S} > t) \\ &= P(S^{[1]} \leq t, \mathbf{S}^{[1]} > t) + P(S^{[2]} \leq t, \mathbf{S}^{[2]} > t) + \dots + P(S^{[N]} \leq t, \mathbf{S}^{[N]} > t) + P(\mathbf{S} > t) \\ &= \phi\left[m^{[1]}\phi^{-1}(F^{[1]}(t))\right] \prod_{\ell=2}^N \left[1 - \phi\left[m^{[\ell]}\phi^{-1}(F^{[\ell]}(t))\right]\right] + \dots + \prod_{\ell=1}^N \left[1 - \phi\left[m^{[\ell]}\phi^{-1}(F^{[\ell]}(t))\right]\right]\end{aligned}\quad (2.4)$$

4. 主要结果

在这一章节中, 我们首先对相依异质元件构成的故障安全系统的平均失效时间进行了分析, 了解这个可靠性指标对评估系统的整体性能和可靠性至关重要。

4.1. 平均失效时间的比较

定理 4.1 令 T_1 和 T_2 分别表示由 N 个独立子系统构成的两个故障安全系统的寿命, 其中子系统由相依可交换并且同分布的部件组成, 每个子系统内部的部件由一个具有生成元 ϕ 的相同的阿基米德 Copula 函数连接。另外, 这两个故障安全系统具有根据向量 $(m^{[1]}, m^{[2]}, \dots, m^{[N]})$ 和 $(n^{[1]}, n^{[2]}, \dots, n^{[N]})$ 分配的部件的不同寿命, 这些向量符合条件 $m^{[1]} \geq m^{[2]} \geq \dots \geq m^{[N]} \geq 0$ 以及 $n^{[1]} \geq n^{[2]} \geq \dots \geq n^{[N]} \geq 0$ 。如果不同子系统内部的部件的分布函数满足 $F^{[1]} \leq F^{[2]} \leq \dots \leq F^{[N]}$ 并且 $-x\phi'(x)$ 在 x 上单调递减, 那么当 $t > 0$ 时, $(m^{[1]}, m^{[2]}, \dots, m^{[N]}) \prec_w (n^{[1]}, n^{[2]}, \dots, n^{[N]})$ 意味着 $\bar{F}_{T_1}(t) \geq \bar{F}_{T_2}(t)$ 。

证明: 首先我们为了方便计算令 $A_\ell = P(S^{[\ell]} > t) = \bar{F}_{S^{[\ell]}}(t) = \phi(m^{[\ell]}\phi^{-1}(F^{[\ell]}(t)))$, $B_\ell = F_{S^{[\ell]}}(t) = 1 - A_\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, N$ 。接下来, 注意到 $\bar{F}_{T_1}(t) \geq \bar{F}_{T_2}(t)$ 等价于 $-\bar{F}_{T_1}(t) \leq -\bar{F}_{T_2}(t)$, 因此根据[13]中定理 3.A.7, 当 $m^{[1]} \geq m^{[2]} \geq \dots \geq m^{[N]} \geq 0$ 时, 我们需要去证明,

$$0 \geq -\frac{\partial \bar{F}_{T_1}(t)}{\partial m^{[1]}} \geq -\frac{\partial \bar{F}_{T_1}(t)}{\partial m^{[2]}} \geq \dots \geq -\frac{\partial \bar{F}_{T_1}(t)}{\partial m^{[N]}} \quad (3.1)$$

接下来我们给出 $\bar{F}_{T_1}(t)$ 的表达式,

$$\bar{F}_{T_1}(t) = \sum_{\ell=1}^N \left[A_\ell \prod_{k=1, k \neq \ell}^N B_k \right] + \prod_{\ell=1}^N B_\ell \quad (3.2)$$

首先我们把第 ℓ 项单拎出来, 只有 A_ℓ 和 B_ℓ 与 $m^{[\ell]}$ 有关, 其他项对 $m^{[\ell]}$ 求导为零, 那么对函数 $\bar{F}_{T_1}(t)$ 关于 $m^{[\ell]}$ 求偏导可得,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{T_1}(t)}{\partial m^{[\ell]}} &= \frac{\partial}{\partial m^{[\ell]}} \left[A_\ell \prod_{k=1, k \neq \ell}^N B_k + \sum_{j=1, j \neq \ell}^N \left(A_j \prod_{h=1, h \neq j}^N B_h \right) + \prod_{\ell=1}^N B_\ell \right] \\ &= \frac{\partial A_\ell}{\partial m^{[\ell]}} \prod_{k=1, k \neq \ell}^N B_k + \frac{\partial B_\ell}{\partial m^{[\ell]}} \sum_{j=1, j \neq \ell}^N \left(A_j \prod_{h=1, h \neq \ell, j}^N B_h \right) + \frac{\partial B_\ell}{\partial m^{[\ell]}} \prod_{k=1, k \neq \ell}^N B_k\end{aligned}\quad (3.3)$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_\ell}{\partial m^{[\ell]}} &= \phi^{-1}\left(F^{[\ell]}(t)\right)\phi'\left(m^{[\ell]}\phi^{-1}\left(F^{[\ell]}(t)\right)\right), \\ \frac{\partial B_\ell}{\partial m^{[\ell]}} &= -\phi^{-1}\left(F^{[\ell]}(t)\right)\phi'\left(m^{[\ell]}\phi^{-1}\left(F^{[\ell]}(t)\right)\right) = -\frac{\partial A_\ell}{\partial m^{[\ell]}}\end{aligned}\quad (3.4)$$

所以有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{T_1}(t)}{\partial m^{[\ell]}} &= \frac{\partial A_\ell}{\partial m^{[\ell]}} \left[\prod_{k=1, k \neq \ell}^N B_k - \sum_{j=1, j \neq \ell}^N \left(A_j \prod_{h=1, h \neq \ell, j}^N B_h \right) - \prod_{k=1, k \neq \ell}^N B_k \right] \\ &= -\frac{\partial A_\ell}{\partial m^{[\ell]}} \sum_{j=1, j \neq \ell}^N \left(A_j \prod_{h=1, h \neq \ell, j}^N B_h \right)\end{aligned}\quad (3.5)$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{T_1}(t)}{\partial m^{[\ell]}} &= -\phi^{-1}\left(F^{[\ell]}(t)\right)\phi'\left(m^{[\ell]}\phi^{-1}\left(F^{[\ell]}(t)\right)\right) \left[\prod_{h=1, h \neq \ell}^N \left(1 - \phi\left(m^{[h]}\phi^{-1}\left(F^{[h]}(t)\right)\right) \right) \right] \\ &\quad \times \left[\sum_{j=1, j \neq \ell}^N \frac{\phi\left(m^{[j]}\phi^{-1}\left(F^{[j]}(t)\right)\right)}{1 - \phi\left(m^{[j]}\phi^{-1}\left(F^{[j]}(t)\right)\right)} \right] \geq 0\end{aligned}\quad (3.6)$$

因为 $\phi^{-1}\left(F^{[\ell]}(t)\right) \geq 0$, $\phi' \leq 0$, 且 $\phi \in [0, 1]$, 所以 $1 - \phi \in [0, 1]$ 。现在我们定义函数 $\psi(n, u) = -u\phi'(nu)$, 那么函数 $\bar{F}_{T_1}(t)$ 关于 m^ℓ 求偏导就可以记为

$$\frac{\partial \bar{F}_{T_1}(t)}{\partial m^{[\ell]}} = \psi(n, u) \left[\prod_{h=1, h \neq \ell}^N \left(1 - \phi\left(m^{[h]}\phi^{-1}\left(F^{[h]}(t)\right)\right) \right) \right] \left[\sum_{j=1, j \neq \ell}^N \frac{\phi\left(m^{[j]}\phi^{-1}\left(F^{[j]}(t)\right)\right)}{1 - \phi\left(m^{[j]}\phi^{-1}\left(F^{[j]}(t)\right)\right)} \right] \quad (3.7)$$

我们要证明 $\frac{\partial \bar{F}_{T_1}(t)}{\partial m^{[\ell]}}$ 为减函数, 那就等价于对上式再次求导小于等于 0。首先对函数 $\psi(n, u)$ 关于 n 进行求导

$$\frac{\partial \psi(u, n)}{\partial n} = -u^2 \phi''(nu) = -\left[\phi^{-1}\left(F^{[\ell]}(t)\right)\right]^2 \phi''\left(m^{[\ell]}\phi^{-1}\left(F^{[\ell]}(t)\right)\right) \leq 0 \quad (3.8)$$

根据定义, $(\phi^{-1})^2 \geq 0$, 其次根据阿基米德 Copula 生成元的 n 重单调性可知 $\phi'' \geq 0$, 由此可知上式不等号成立。从而, 如果 $m^{[\ell_1]} \geq m^{[\ell_2]}$, 那么 $\psi\left(m^{[\ell_1]}, \phi^{-1}\left(F^{[\ell_1]}(t)\right)\right) \leq \psi\left(m^{[\ell_2]}, \phi^{-1}\left(F^{[\ell_1]}(t)\right)\right)$, 另一方面, 根据定义 ϕ^{-1} 是减函数, 如果 $F^{[\ell_1]}(t) \leq F^{[\ell_2]}(t)$, 就有 $\phi^{-1}\left(F^{[\ell_1]}(t)\right) \geq \phi^{-1}\left(F^{[\ell_2]}(t)\right)$, 因此 $\psi\left(m^{[\ell_2]}, \phi^{-1}\left(F^{[\ell_1]}(t)\right)\right) \leq \psi\left(m^{[\ell_2]}, \phi^{-1}\left(F^{[\ell_2]}(t)\right)\right)$ 。因为函数 ψ 在 x 上递减, 当且仅当 $-x\phi'(x)$ 关于 x 递减。

定理 4.1 表明, 当每种类型部件的寿命有序并且阿基米德 Copula 的生成元满足 $-x\phi'(x)$ 关于 x 递减时, 每种类型部件的分配向量在弱超优序下越小对应的形成的故障安全系统的寿命就越大。在下述的引理中我们列出了几种满足定理条件的 Copula 函数。

引理 4.2 在阿基米德 Copula 函数中, 满足函数 $-x\phi'(x)$ 关于 x 递减的 Copula 包括岗贝尔(Gumbel-Hougaard) Copula, 它的生成元为 $\phi(x) = (-\ln x)^\theta, \theta \geq 1, x \geq 0$ 以及克林顿(Clayton) Copula, 它的生成元为 $\phi(x) = 1/\theta(x^{-\theta} - 1), \theta > 0, x \geq 0$, 接着我们以克林顿 Copula 为例, 观察

$$-x\phi'(x) = -x(-x^{-\theta-1}) = x^{-\theta} \quad (3.9)$$

对上式关于 x 求导可得

$$\frac{\partial(-x\phi'(x))}{\partial x} = -\theta x^{-\theta-1} < 0 \quad (3.10)$$

由 $\theta > 0$ 和 $x \geq 0$ 可得 $\theta x^{-\theta-1} > 0$, 故 $-\theta x^{-\theta-1} < 0$, 那么函数 $-x\phi'(x)$ 关于 x 递减。

引理 4.3 根据弱超优序的定义, 当 $(m^{[1]}, m^{[2]}, \dots, m^{[N]}) \prec^w (n^{[1]}, n^{[2]}, \dots, n^{[N]})$ 时, 我们可以得到 $m^{[1]} + m^{[2]} + \dots + m^{[N]} \geq n^{[1]} + n^{[2]} + \dots + n^{[N]}$ 。因此, 如果定理 4.1 的充分条件都满足的情况下, 可得

$$\mathbb{E}(T_1) = \int_0^\infty \bar{F}_{T_1}(t) dt \geq \int_0^\infty \bar{F}_{T_2}(t) dt = \mathbb{E}(T_2) \quad (3.11)$$

换句话说, 在定理 4.1 的条件满足的情况下, 系统的平均失效时间随着部件数量在增加。

例 4.4 考虑两个由三种类型部件构成的故障安全系统, 我们假设同一种类型的部件相依并由克林顿 Copula 连接, 我们在前面的定理 4.1 中, 已经验证了函数 $-x\phi'(x)$ 关于 x 是递减的, 下面我们给出克林顿 Copula 的表达式

$$C^{[\ell]}(u) = (mu^{-\theta} - m + 1)^{-1/\theta}, \theta > 0, u \in [0, 1], \ell = 1, 2, 3 \quad (3.12)$$

另一方面, 我们给定第一个故障安全系统 T_1 的部件数量的分配向量为 $(m^{[1]}, m^{[2]}, m^{[3]}) = (6, 5, 2)$, 另一个系统 T_2 的部件数量的分配向量为 $(n^{[1]}, n^{[2]}, n^{[3]}) = (4, 3, 1)$, 其中 $(6, 5, 2) \prec^w (4, 3, 1)$ 。最后我们考虑以 $F^{[1]}(t) = 1 - \exp(-t)$, $F^{[2]}(t) = 1 - \exp(-3t)$, $F^{[3]}(t) = 1 - \exp(-5t)$ 分别作为这三种类型部件的分布函数, 观察到这些分布函数满足定理 4.1 中提到的分布函数有序的条件。在图 1 中, 我们可以看到系统 T_1 的可靠性函数图像总是在 T_2 的上方, 这也就验证了上述定理的结果。当相依参数 $\theta = 5$ 时, 我们计算了两个系统的平均失效时间, 并且得到 $\mathbb{E}(T_1) = 0.478 > 0.410 = \mathbb{E}(T_2)$, 这也就验证了引理 4.3 的结果。

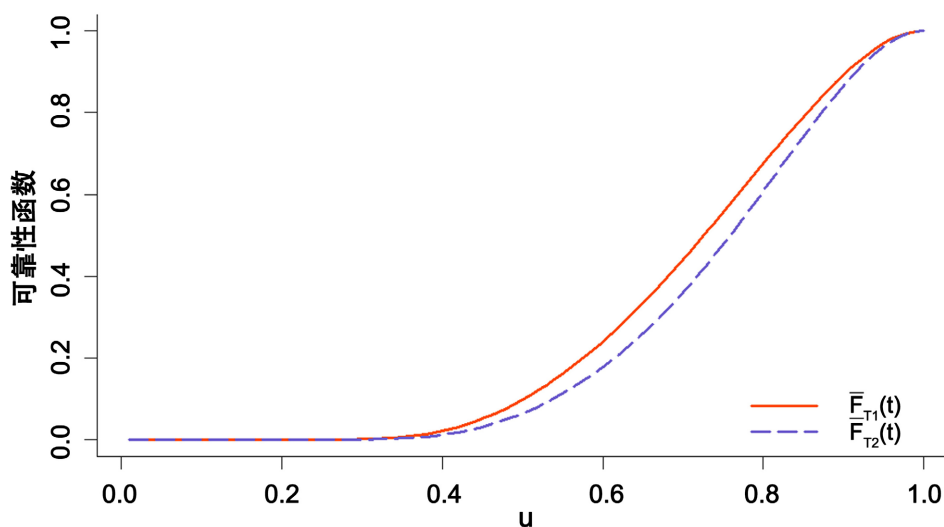


Figure 1. Plots of the reliability function of two different fail-safe systems

图 1. 两个故障安全系统的可靠性函数图像

4.2. 最优部件数量

在这一小节中, 我们深入研究了故障安全系统中一个以最小化平均成本率为目标的优化问题, 通过分析每种类型元件的数量与成本率函数的关系, 找到在系统可靠性和经济可行性之间取得平衡的每种类型元件的最优部件数量。首先, 我们考虑每个子系统中失效部件的平均数量, 对于每个子系统, 我们定义了一个二元变量 $I(s_j^{[\ell]})$ 使得

$$I(S_j^{[\ell]}) = \begin{cases} 1, & \text{if } S_j^{[\ell]} \leq T, \\ 0, & \text{if } S_j^{[\ell]} > T. \end{cases} \quad (3.13)$$

其中 $j=1,2,\dots,m^{[\ell]}$, 且 $\ell=1,2,\dots,N$ 。因此第 ℓ 个子系统中失效部件的数量是

$$\mathcal{M}^{[\ell]}(T) = \sum_{j=1}^{m^{[\ell]}} I(S_j^{[\ell]}) \quad (3.14)$$

因为每个子系统有着同分布的部件, 所以第 ℓ 个子系统中失效部件的平均数量为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{M}^{[\ell]}(T)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{m^{[\ell]}} I(S_j^{[\ell]})\right) = \sum_{j=1}^{m^{[\ell]}} \mathbb{E}(I(S_j^{[\ell]})) = \sum_{j=1}^{m^{[\ell]}} P(S_j^{[\ell]} \leq T) = m^{[\ell]} P(S_1^{[\ell]} \leq T) \\ &= m^{[\ell]} P(S_1^{[\ell]} \leq (S^{[1]}, S^{[2]}, \dots, S^{[N]})_{2:N}) \\ &= m^{[\ell]} \int_0^\infty P((S^{[1]}, S^{[2]}, \dots, S^{[N]})_{2:n} > t) dP(S_1^{[\ell]} \leq t) \\ &= m^{[\ell]} \int_0^\infty \left(\sum_{i=1, i \neq \ell}^N P(S^{[i]} \leq t, S^{\{[i, \ell]\}} > t) + \prod_{i=1, i \neq \ell}^N P(S^{[i]} > t) \right) dF^{[\ell]}(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

在上式中随机向量 $S^{\{[i, \ell]\}} = \{S^{[1]}, S^{[2]}, \dots, S^{[i-1]}, S^{[i+1]}, \dots, S^{[\ell-1]}, S^{[\ell+1]}, \dots, S^{[N]}\}$, 综上可得整个故障安全系统中失效部件的平均数量就为

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}(T)) = \sum_{\ell=1}^N \left[m^{[\ell]} \int_0^\infty \left(\sum_{i=1, i \neq \ell}^N P(S^{[i]} \leq t, S^{\{[i, \ell]\}} > t) + \prod_{i=1, i \neq \ell}^N P(S^{[i]} > t) \right) dF^{[\ell]}(t) \right] \quad (3.16)$$

系统的平均失效时间为

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \bar{F}_T(t) dt = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^N P(S^{[i]} \leq t, S^{\{[i]\}} > t) + \prod_{i=1}^N P(S^{[i]} > t) \right) dt \quad (3.17)$$

当系统失效时, 我们对失效的部件进行替换, 对未失效的部件进行维修, 那么我们设定在第 ℓ 个子系统中购买一个新部件和维修一个旧部件的成本分别为 $c^{[\ell]}$ 和 $\tilde{c}^{[\ell]}$, $\ell=1,2,\dots,N$, 并且我们假设系统失效时会产生额外的惩罚性成本 $\hat{c}$ 。因此, 重新启动故障安全系统的平均成本率函数可以计算为

$$\begin{aligned} C(m^{[1]}, m^{[2]}, \dots, m^{[N]}) &= \frac{\sum_{\ell} c^{[\ell]} \mathbb{E}(\mathcal{M}^{[\ell]}(T)) + \sum_{\ell} \tilde{c}^{[\ell]} \mathbb{E}(m^{[\ell]} - \mathcal{M}^{[\ell]}(T)) + \hat{c}}{\mathbb{E}(T)} \\ &= \frac{\sum_{\ell} (c^{[\ell]} - \tilde{c}^{[\ell]}) \mathbb{E}(\mathcal{M}^{[\ell]}(T)) + \sum_{\ell} \tilde{c}^{[\ell]} m^{[\ell]} + \hat{c}}{\mathbb{E}(T)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

我们的目标是在满足特定约束条件下, 最小化上述成本函数, 以确定每个子系统中最有效的部件数量。特别地, 我们关注以下优化问题

$$\min C(m^{[1]}, m^{[2]}, \dots, m^{[N]}), \quad (3.19)$$

$$\text{s.t. } \text{CAR} = \sum_{\ell=1}^N c^{[\ell]} \mathbb{E}(\mathcal{M}^{[\ell]}(T)) \leq C_1, \quad (3.20)$$

$$\text{CAP} = \sum_{\ell=1}^N \tilde{c}^{[\ell]} \mathbb{E}(m^{[\ell]} - \mathcal{M}^{[\ell]}(T)) \leq C_2.$$

其中 C_1 代表将失效部件替换为新部件的相关成本(CAR), C_2 代表对未失效部件进行维修的成本(CAP)。当成本值 $c^{[i]}, \tilde{c}^{[i]}, \hat{c}$ 已知时, 成本率函数就可以被构造。我们列出所有满足(4.20)和(4.19)式的 $m^{[1]}, \dots, m^{[i]}$, 最后我们选择使得(4.20)式成立的 $m^{[1]}, \dots, m^{[i]}$ 作为最优值。

Table 1. System mean cost rates, CAR and CAP values
表 1. 平均成本率、CAR、CAP 的值

$m^{[1]}$	$m^{[2]}$	$m^{[3]}$	CAR	CAP	$C(m^{[1]}, m^{[2]}, \dots, m^{[N]})$
1	1	1	8.600	3.093	33.073
2	1	1	10.028	5.250	31.268
3	1	1	10.645	7.888	32.566
1	2	1	8.987	6.901	36.066
1	1	2	9.598	3.451	32.133
2	1	2	10.704	5.821	30.335
1	2	2	9.912	7.302	34.593
1	1	3	10.187	4.071	32.273
1	2	3	10.464	7.945	34.420

作为上述优化问题的一个应用, 我们考虑一个由三种类型部件构成的故障安全系统。在这里的研究中, 每种类型的元件都构成一个独立的子系统, 那么我们假设第一个系统的部件的相依性由参数为 θ 的 FGM Copula 函数来刻画, 假设第二个系统的部件的相依性由参数为 β 的冈贝尔 Copula 函数来刻画, 假设第三个系统的部件的相依性由参数为 α 的克林顿 Copula 函数来刻画, 这些所有的参数都是不同的。进一步, 我们假设已知替换成本和维修成本分别为 $C_1 = 11$ 和 $C_2 = 9$ 以及成本值 $\mathbf{c} = (c^{[1]}, c^{[2]}, c^{[3]}) = (5, 6, 3)$, $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}^{[1]}, \tilde{c}^{[2]}, \tilde{c}^{[3]}) = (3, 4, 1)$ 并且 $\hat{c} = 14$ 。假设第一个系统中的部件服从分布 $F^{[1]} = 1 - e^{-t^2}$, 第二个系统中的部件服从分布 $F^{[2]} = 1 - e^{-t^3}$, 第三个系统中的部件服从分布 $F^{[3]} = 1 - e^{-t^{1.5}}$ 。在表 1 中我们已经列出了所有满足约束条件的情况, 在所有的组合当中, 有 9 种分配策略满足约束条件, 而使得平均成本率最小的最优的部件数量是 (2,1,2)。

参考文献

[1] Pham, H. and Galyean, W.J. (1992) Reliability Analysis of Nuclear Fail-Safe Redundancy. *Reliability Engineering & System Safety*, **37**, 109-112. [https://doi.org/10.1016/0951-8320\(92\)90003-4](https://doi.org/10.1016/0951-8320(92)90003-4)

[2] Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2010) Dispersive Ordering of Fail-Safe Systems with Heterogeneous Exponential Components. *Metrika*, **74**, 203-210. <https://doi.org/10.1007/s00184-010-0297-5>

[3] Zhang, Y., Amini-Seresht, E. and Zhao, P. (2018) On Fail-Safe Systems under Random Shocks. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **35**, 591-602. <https://doi.org/10.1002/asmb.2349>

[4] Zhang, J., Yan, R. and Zhang, Y. (2022) Reliability Analysis of Fail-Safe Systems with Heterogeneous and Dependent Components Subject to Random Shocks. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, **237**, 1073-1087. <https://doi.org/10.1177/1748006x221122033>

[5] Hawlader, B., Kundu, P. and Kundu, A. (2023) Stochastic Comparisons of Lifetimes of Fail-Safe Systems with Dependent and Heterogeneous Components under Random Shocks. *Statistics*, **57**, 694-709. <https://doi.org/10.1080/02331888.2023.2203926>

[6] Lv, G., Yan, R. and Zhang, J. (2025) Usual Stochastic Orderings of the Second Smallest Order Statistics with Dependent Semi-Parametric Distribution Random Variables. *Communications in Statistics—Theory and Methods*. <https://doi.org/10.1080/03610926.2025.2566988>

[7] Eryilmaz, S. and Ozkut, M. (2020) Optimization Problems for a Parallel System with Multiple Types of Dependent

-
- Components. *Reliability Engineering & System Safety*, **199**, Article ID: 106911. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2020.106911>
- [8] Torrado, N. (2022) Optimal Component-Type Allocation and Replacement Time Policies for Parallel Systems Having Multi-Types Dependent Components. *Reliability Engineering & System Safety*, **224**, Article ID: 108502. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2022.108502>
- [9] Torrado, N. and Ozkut, M. (2024) Analyzing Component Failures in Series-Parallel Systems with Dependent Components. *Computers & Industrial Engineering*, **197**, Article ID: 110604. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.110604>
- [10] Nelsen, R.B. (2006) An Introduction to Copulas. Springer.
- [11] Zhang, J. and Zhang, Y. (2022) A Copula-Based Approach on Optimal Allocation of Hot Standbys in Series Systems. *Naval Research Logistics (NRL)*, **69**, 902-913. <https://doi.org/10.1002/nav.22055>
- [12] Zhang, J., Yan, R. and Wang, J. (2022) Reliability Optimization of Parallel-Series and Series-Parallel Systems with Statistically Dependent Components. *Applied Mathematical Modelling*, **102**, 618-639. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.10.003>
- [13] Marshall, A.W., Olkin, I. and Arnold, B.C. (1979) Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. Springer.
- [14] 达高峰, 丁维勇, 著. 系统可靠性: 签名计算与分析[M]. 北京: 科学出版社, 2022.