Statistics and Application 统计学与应用, **2026, 15(3), 35-42**
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2026.153053

Hans汉斯

随机变量函数中包含Φ(*X*)的数学期望研究

陈宣戈[1]，顾蓓青[1]，雷　平[2]，徐晓岭[1]

[1]上海对外经贸大学统计与数据科学学院，上海
[2]上海对外经贸大学国际经贸学院，上海

收稿日期：2026年2月4日；录用日期：2026年2月26日；发布日期：2026年3月5日

摘　要

论文研究随机变量函数中包含 $\Phi(X)$ 的数学期望，给出了几个定理的证明，而证明方法上具有较好的借鉴作用。

关键词

正态分布，分布函数，数学期望

Study on the Mathematical Expectation of Functions of Random Variables Involving Φ(*X*)

Xuange Chen[1], Beiqing Gu[1], Ping Lei[2], Xiaoling Xu[1]

[1]School of Statistics and Data Science, Shanghai University of International Business and Economics, Shanghai
[2]School of International Business, Shanghai University of International Business and Economics, Shanghai

Received: February 4, 2026; accepted: February 26, 2026; published: March 5, 2026

Abstract

This paper studies the mathematical expectation of functions of random variables that involve Φ(*X*), provides proofs of several theorems, and the proof methods offer good reference value for related research.

Keywords

Normal Distribution, Distribution Function, Mathematical Expectation

文章引用: 陈宣戈, 顾蓓青, 雷平, 徐晓岭. 随机变量函数中包含 Φ(*X*)的数学期望研究[J]. 统计学与应用, 2026, 15(3): 35-42. DOI: 10.12677/sa.2026.153053

1. 引言

正态分布在概率论与数理统计中起着举足轻重的作用，也是最为重要的教学内容之一，具体可查阅文献[1]-[5]。设随机变量 $X\sim N(0,1)$，其密度函数与分布函数分别记为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$，$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t$。若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其密度函数与分布函数分别记为 $\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$。本文研究随机变量函数中包含 $\Phi(X)$ 的数学期望，给出了几个定理的证明，证明方法上具有较好的借鉴作用。

2. 随机变量函数中包含 $\Phi(X)$ 的数学期望

引理 1： 记 t 的函数 $g_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x$，$g_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x$，$g_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x$ 以及 $g_4(t)=\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x$，则

$$g_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},g_2(t)=\frac{1}{2},g_3(t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{1+t^2}+\arctan t\right),g_4(t)=\frac{1}{4}+\frac{\arctan t}{2\pi}$$

证明： (1) 易见
$$g_1(0)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=0$$

$$g'_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\varphi(tx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\exp\left(-\frac{1+t^2}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}x^2\exp\left(-\frac{1+t^2}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\int_0^{+\infty}y^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$$

则
$$g_1(t)=\int_0^t g'_1(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(2) 易见 $g_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{0}x^2\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{+\infty}x^2\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}x^2\varphi(x)\Phi(-tx)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

(3) 易见
$$g_3(0)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|\varphi(x)\mathrm{d}x=0$$

$$g'_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|x|\varphi(x)\varphi(tx)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x^3\varphi(x)\varphi(tx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}x^3\exp\left\{-\frac{(1+t^2)x^2}{2}\right\}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\frac{1}{(1+t^2)^2}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\frac{1}{(1+t^2)^2}$$

$$g_3(t)=\int_0^t g'_3(z)\mathrm{d}z=\int_0^t\frac{2}{\pi}\frac{1}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z=\frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1+z^2}+\arctan z\right)\right]\Bigg|_0^t=\frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{1+t^2}+\arctan t\right)$$

(4) 易见
$$g_4(0)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$

$$g_4'(t)=\int_0^{+\infty}x\varphi(x)\varphi(tx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}x\exp\left(-\frac{1+t^2}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+t^2}$$

则

$$g_4(t)=g_4(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^t\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{\arctan t}{2\pi}$$

定理 1：设随机变量 $X\sim N(0,1)$，则(1) $E\left[\Phi(X)\right]=\frac{1}{2}$；(2) $E\left[X\Phi(X)\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$；(3) $E\left[X^2\Phi(X)\right]=\frac{1}{2}$；(4) $E\left[|X|\Phi(X)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$；(5) $E\left[X|X|\Phi(X)\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}$

证明：(1) 由于 $\Phi(X)\sim U(0,1)$，则 $E\left[\Phi(X)\right]=\frac{1}{2}$，并由引理 1 可知：

(2) $$E\left[X\Phi(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\Phi(x)\mathrm{d}x=g_1(1)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

(3) $$E\left[X^2\Phi(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\Phi(x)\mathrm{d}x=g_2(1)=\frac{1}{2}$$

(4) $$\begin{aligned}E\left[|X|\Phi(X)\right]&=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\varphi(x)\Phi(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\varphi(x)\Phi(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0}x\varphi(x)\Phi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}x\varphi(x)\Phi(x)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}x\varphi(x)\Phi(-x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

(5) $$E\left[X|X|\Phi(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|\varphi(x)\Phi(x)\mathrm{d}x=g_3(1)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}$$

引理 2：记 t 的函数 $I(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x$，则

(1) 若 n 为偶数，$I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$；

(2) 若 n 为奇数，

$$\begin{aligned}I(t)&=\frac{1}{\pi}2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\int_0^t\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n/2+1}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\sum_{i=0}^{(n+1)/2-1}(-1)^i\frac{C_{(n+1)/2-1}^i}{2i+1}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^i\end{aligned}$$

证明：(1)若 n 为偶数，

$$\begin{aligned}I(t)&=\int_0^{+\infty}x^n\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{0}x^n\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}x^n\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}x^n\varphi(x)\Phi(-tx)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}x^n\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\end{aligned}$$

(2) 若 n 为奇数，

$$\begin{aligned}I(t)&=\int_0^{+\infty}x^n\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{0}x^n\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}x^n\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}x^n\varphi(x)\Phi(-tx)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{+\infty}x^n\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}x^n\varphi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

易见
$$I(0)=0$$
$$I'(t)=2\int_0^{+\infty}x^{n+1}\varphi(x)\varphi(tx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}x^{n+1}\exp\left[-\frac{(1+t^2)x^2}{2}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{2^{n/2}}{(1+t^2)^{n/2+1}}\int_0^{+\infty}x^{n/2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\frac{2^{n/2}}{(1+t^2)^{n/2+1}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$$
$$I(t)=\int_0^t I'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\int_0^t\frac{1}{(1+x^2)^{n/2+1}}\mathrm{d}x$$

由于 n 是奇数，记 $n=2k-1,k=1,2,\cdots$，考虑不定积分：
$$I_k=\int\frac{1}{(1+x^2)^{n/2+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(1+x^2)^{k+1/2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2\theta}{\sec^{2k+1}\theta}\mathrm{d}\theta=\int\frac{1}{\sec^{2k-1}\theta}\mathrm{d}\theta=\int\cos^{2k-1}\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\int(1-\sin^2\theta)^{k-1}\mathrm{d}\sin\theta=\int(1-u^2)^{k-1}\mathrm{d}u=\int\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_{k-1}^i u^{2i}\mathrm{d}u=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{C_{k-1}^i}{2i+1}u^{2i+1}+C$$
$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{C_{k-1}^i}{2i+1}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^i+C$$

由此
$$\int_0^t\frac{1}{(1+x^2)^{n/2+1}}\mathrm{d}x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\sum_{i=0}^{(n+1)/2-1}(-1)^i\frac{C_{(n+1)/2-1}^i}{2i+1}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^i$$

进而
$$I(t)=\frac{1}{\pi}2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\sum_{i=0}^{(n+1)/2-1}(-1)^i\frac{C_{(n+1)/2-1}^i}{2i+1}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^i$$

注：记 t 的函数 $I(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^n\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x$，类似于引理的证明有：
$$I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

由引理 2 易见如下定理 2：

定理 2：(1) 若 n 为偶数，$E[X^n\Phi(X)]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$；(2) 若 n 为奇数，
$$E[X^n\Phi(X)]=\frac{1}{\pi}2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{(n+1)/2-1}(-1)^i\frac{C_{(n+1)/2-1}^i}{2i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$
(3) $E\left[|X|^n\Phi(X)\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$

特别地，当 $n=1$ 时，
$$I(t)=\frac{1}{\pi}2^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\int_0^t\frac{1}{(1+x^2)^{1/2+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{1}{(1+x^2)^{1/2+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$
$$E[X\Phi(X)]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}},\quad E[|X|\Phi(X)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

当 $n=2$ 时，
$$E[X^2\Phi(X)]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

当 $n=3$ 时，

$$I(t)=\frac{1}{\pi}2^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)\int_0^t\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2+1}}\mathrm{d}x=\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{3+2t^2}{1+t^2},$$

$$E\left[X^3\Phi(X)\right]=\frac{5}{4\sqrt{\pi}},\quad E\left[|X|^3\Phi(X)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

当 $n=4$ 时，

$$E\left[X^4\Phi(X)\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

当 $n=5$ 时，

$$I(t)=\frac{1}{\pi}2^{5/2}\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)\int_0^t\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{5/2+1}}\mathrm{d}x=\frac{15}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{5/2+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{15+20t^2+8t^4}{\left(1+t^2\right)^2},$$

$$E\left[X^5\Phi(X)\right]=\frac{43}{8\sqrt{\pi}},\quad E\left[|X|^5\Phi(X)\right]=4\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

定理 3：设随机变量 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $E\left[\Phi(X)\right]=\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)$

证明：

$$E\left[\Phi(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$$

考虑如下问题：若 $Z_1\sim N\left(\mu,\sigma^2\right),Z_2\sim N(0,1)$，且 Z_1,Z_2 相互独立，求 $P(Z_2-Z_1<0)$

由于 $Z_2-Z_1\sim N\left(-\mu,\sigma^2+1\right)$，$\frac{Z_2-Z_1+\mu}{\sqrt{\sigma^2+1}}\sim N(0,1)$，则

$$P(Z_2-Z_1<0)=P\left(\frac{Z_2-Z_1+\mu}{\sqrt{\sigma^2+1}}<\frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)=\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)$$

将 (Z_1,Z_2) 视作二维正态分布，然后求 $P(Z_2-Z_1<0)$

易见

$$P(Z_2-Z_1<0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Z_2}(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}f_{Z_1}(y)\mathrm{d}y$$

则

$$E\left[\Phi(X)\right]=\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)$$

另证：$E\left[\Phi(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\Phi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\Phi(\sigma x+\mu)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\varphi(y)\mathrm{d}y$

考虑如下问题：若 $Z_1\sim N(0,1),Z_2\sim N(0,1)$，且 Z_1,Z_2 相互独立

将 (Z_1,Z_2) 视作二维正态分布，则 $P(Z_2-\sigma Z_1\le\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\varphi(y)\mathrm{d}y$

又易见

$$Z_2-\sigma Z_1\sim N\left(0,1+\sigma^2\right),\frac{Z_2-\sigma Z_1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\sim N(0,1)$$

$$P(Z_2-\sigma Z_1\le\mu)=P\left(\frac{Z_2-\sigma Z_1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\le\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)=\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)$$

则
$$E\left[\Phi(X)\right]=\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)$$

定理 4： 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$\sigma>0$ 则 $E\left[\Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\right]=1-\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)$

注 2：若将定理 3 改为：若随机变量 $X\sim N(0,1)$，$\sigma>0$，则
$$E\left[\Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\varphi(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y\int_{\sigma y+\mu}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

考虑如下问题：若 $Z_1\sim N(0,1),Z_2\sim N(0,1)$，且 Z_1,Z_2 相互独立
将 (Z_1,Z_2) 视作二维正态分布，则 $P(Z_1-\sigma Z_2\ge\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y\int_{\sigma y+\mu}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$

又易见
$$Z_1-\sigma Z_2\sim N\left(0,1+\sigma^2\right),\frac{Z_1-\sigma Z_2}{\sqrt{1+\sigma^2}}\sim N(0,1)$$
$$P(Z_2-\sigma Z_1\ge\mu)=P\left(\frac{Z_1-\sigma Z_2}{\sqrt{1+\sigma^2}}\ge\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)$$

则
$$E\left[\Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\right]=1-\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)$$

定理 5： 设随机变量 $X\sim\chi^2(1)$，则 $E\left[\Phi\left(\sqrt{X}\right)\right]=\frac{3}{4}$

证明： 易见 $E\left[\Phi\left(\sqrt{X}\right)\right]=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{e}^{-x/2}\Phi\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\varphi(x)\Phi(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)\mathrm{d}y$

考虑如下问题：若 $Z_1\sim N(0,1),Z_2\sim N(0,1)$，且 Z_1,Z_2 相互独立，则
$$\int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

则
$$E\left[\Phi\left(\sqrt{X}\right)\right]=\frac{3}{4}$$

另证： 由引理 1 知：$g_4(t)=\int_0^{+\infty}\varphi(x)\Phi(tx)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{\arctan t}{2\pi}$
$$E\left[\Phi\left(\sqrt{X}\right)\right]=2g_4(1)=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{4}$$

注： 定理 3~5 中引入随机变量 Z_1,Z_2 也是求解这类题目的常用方法。

引理 3： 设 $X\sim N(0,1)$，k 为正整数，(1) 若 k 为奇数，则 $E\left(X^k\right)=0$；(2) 若 $k=2l$ 为偶数，l 为正整数，则 $E\left(X^k\right)=\frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)=\frac{2^l}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)=(2l-1)(2l-3)\cdots3\cdot1$

证明： 易见，若 k 为奇数，$E\left(X^k\right)=0$

若 n 为偶数，即 $n=2l$，则 $E\left(X^k\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x^k\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$
$$=\frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}x^{(k-1)/2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)=\frac{2^l}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{2^l}{\sqrt{\pi}}\left(l+\frac{1}{2}-1\right)\left(l+\frac{1}{2}-2\right)\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=(2l-1)(2l-3)\cdots3\cdot1$$

若记函数 $M(k)=\begin{cases}1, & k\text{为偶数}\\ 0, & k\text{为奇数}\end{cases}$，于是 $E(X^k)=M(k)\frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$

特别地，若 $X\sim N(0,1)$，则 $E(X)=E(X^3)=E(X^5)=E(X^7)=0$，$E(X^2)=1$，$D(X)=1$

$$E(X^4)=3,\quad D(X^2)=2,\quad E(X^6)=15,\quad E(X^8)=105$$

定理 6： 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，n 是正整数，则

$$E\left[X^n\Phi(aX+b)\right]=M(n)\frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Phi(b)\int_0^1\exp\left\{-\frac{b^2}{2(a^2x^2+1)}\right\}\frac{1}{(a^2x^2+1)^{n/2+1}}\left(\frac{abx}{\sqrt{a^2x^2+1}}\right)^{n+1-i}\mathrm{d}x$$

证明： 记函数 $I(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\varphi(x)\Phi(atx+b)\mathrm{d}x$

由引理 3 易见：$I(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\varphi(x)\Phi(b)\mathrm{d}x=M(n)\frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Phi(b)$

$$\begin{aligned}
I'(t)&=a\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n+1}\varphi(x)\varphi(atx+b)\mathrm{d}x=\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n+1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x^2+(atx+b)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\\
&=\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n+1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(a^2t^2+1)x^2+2abtx+b^2\right]\right\}\mathrm{d}x\\
&=\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n+1}\exp\left\{-\frac{a^2t^2+1}{2}\left(x^2+2\frac{abt}{a^2t^2+1}x+\frac{b^2}{a^2t^2+1}\right)\right\}\mathrm{d}x\\
&=\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n+1}\exp\left\{-\frac{a^2t^2+1}{2}\left[\left(x+\frac{abt}{a^2t^2+1}\right)^2+\frac{b^2}{a^2t^2+1}-\left(\frac{abt}{a^2t^2+1}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\\
&=\frac{a}{2\pi}\exp\left\{-\frac{b^2}{2(a^2t^2+1)}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n+1}\exp\left\{-\frac{a^2t^2+1}{2}\left(x+\frac{abt}{a^2t^2+1}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\\
&=\frac{a}{2\pi}\exp\left\{-\frac{b^2}{2(a^2t^2+1)}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u-\frac{abt}{a^2t^2+1}\right)^{n+1}\exp\left\{-\frac{a^2t^2+1}{2}u^2\right\}\mathrm{d}u\\
&=\frac{a}{2\pi}\exp\left\{-\frac{b^2}{2(a^2t^2+1)}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{v}{\sqrt{a^2t^2+1}}-\frac{abt}{a^2t^2+1}\right)^{n+1}\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2+1}}\mathrm{d}v\\
&=\frac{a}{2\pi}\exp\left\{-\frac{b^2}{2(a^2t^2+1)}\right\}\frac{1}{(a^2t^2+1)^{n/2+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(v-\frac{abt}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right)^{n+1}\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}\mathrm{d}v\\
&=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{b^2}{2(a^2t^2+1)}\right\}\frac{1}{(a^2t^2+1)^{n/2+1}}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{n+1-i}C_{n+1}^i\left(\frac{abt}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right)^{n+1-i}\int_{-\infty}^{+\infty}v^i\varphi(v)\mathrm{d}v\\
&=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{b^2}{2(a^2t^2+1)}\right\}\frac{1}{(a^2t^2+1)^{n/2+1}}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{n+1-i}M(i)2^{i/2}C_{n+1}^i\left(\frac{abt}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right)^{n+1-i}\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
I(t)=I(0)+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{n+1-i}M(i)2^{i/2}C_{n+1}^i\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)\\
\cdot\int_0^t\exp\left\{-\frac{b^2}{2(a^2x^2+1)}\right\}\frac{1}{(a^2x^2+1)^{n/2+1}}\left(\frac{abx}{\sqrt{a^2x^2+1}}\right)^{n+1-i}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

进而

$$E\left[X^n\Phi(aX+b)\right]=M(n)\frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Phi(b)\int_0^1\exp\left\{-\frac{b^2}{2(a^2x^2+1)}\right\}\frac{1}{(a^2x^2+1)^{n/2+1}}\left(\frac{abx}{\sqrt{a^2x^2+1}}\right)^{n+1-i}\mathrm{d}x$$

定理 7：设随机变量 $X\sim N(0,1)$，n 是正整数，则 $E\left[\Phi^n(X)\right]=\frac{1}{n+1}$

证明：$E\left[\Phi^k(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi^k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\Phi^{k+1}(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-k\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi^k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=1-kE\left[\Phi^k(X)\right]$

则

$$E\left[\Phi^k(X)\right]=\frac{1}{k+1}$$

致　谢

作者非常感谢各位审稿专家提出的宝贵建议！

基金项目

(1) 上海对外经贸大学“应用统计学”国家一流专业建设项目资助；(2) 上海对外经贸大学“高水平地方高校建设项目－创新人才培养－特定领域急需人才精准培养教学资源建设－AI 赋能教学‘1 + 1 + N’计划－商务统计”(A1A-7003-25-058-02)资助。

参考文献

[1] 徐晓岭, 王蓉华, 顾蓓青. 概率论与数理统计(第二版) [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2021: 50-53.

[2] 方开泰, 许建伦. 统计分布[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016: 102-112.

[3] 徐晓岭, 王蓉华. 概率论与数理统计[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2014: 48-73.

[4] 王蓉华, 徐晓岭, 顾蓓青. 概率论与数理统计案例分析[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2023: 45-47, 48-52.

[5] 王蓉华, 徐晓岭, 顾蓓青, 雷平. 概率论与数理统计案例分析与提高[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2025: 99-102.