

# 平均应力耦合的接触应力优化方法

史策<sup>1</sup>, 李文静<sup>1</sup>, 张建霆<sup>2</sup>, 文家锐<sup>1</sup>, 姚斯晟<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>昆明学院数学学院, 云南 昆明

<sup>2</sup>新疆大学机械工程学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年4月19日; 录用日期: 2026年5月11日; 发布日期: 2026年5月21日

## 摘要

接触界面应力分布的优化在摩擦接触系统设计中具有重要意义, 其核心问题在于协调应力均匀化与摩擦演化之间的相互作用。针对传统模型中摩擦行为与应力分布相互独立的不足, 本文提出一种全局耦合摩擦模型, 将摩擦系数表示为平均接触应力的函数, 从而建立摩擦状态与整体应力水平之间的耦合关系。在此基础上, 构建了一类同时包含应力均匀化机制、摩擦风险调节机制和名义载荷约束惩罚项的接触应力优化模型, 并揭示了各组成部分之间的权衡关系。由于摩擦项依赖平均应力, 模型通过平均应力引入全局耦合效应, 使目标函数呈现非可分的非凸结构。针对该问题, 本文设计了动态正则近端梯度算法进行求解, 并结合模型结构讨论了其收敛性质。数值结果表明, 所提出模型能够有效刻画摩擦-应力耦合关系, 所设计算法能够改善接触应力分布, 降低局部峰值, 并在优化精度、峰值控制和分布均匀性方面表现出较好的综合性能。

## 关键词

接触应力优化, 平均应力耦合摩擦模型, 非凸优化, 改进型近端梯度算法

# Contact Stress Optimization Method under Mean Stress Coupling

Ce Shi<sup>1</sup>, Wenjing Li<sup>1</sup>, Jianting Zhang<sup>2</sup>, Jiarui Wen<sup>1</sup>, Sisheng Yao<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematics, Kunming University, Kunming Yunnan

<sup>2</sup>School of Mechanical Engineering, Xinjiang University, Wulumuqi Xinjiang

Received: April 19, 2026; accepted: May 11, 2026; published: May 21, 2026

## Abstract

The optimization of contact stress distribution plays an important role in the design of frictional contact

\*通讯作者。

文章引用: 史策, 李文静, 张建霆, 文家锐, 姚斯晟. 平均应力耦合的接触应力优化方法[J]. 统计学与应用, 2026, 15(5): 184-191. DOI: 10.12677/sa.2026.155118

systems, where the key issue lies in coordinating the interaction between stress uniformity and friction evolution. To address the limitation of traditional models in which friction behavior is independent of stress distribution, a globally coupled friction model is proposed, where the friction coefficient is expressed as a function of the mean contact stress, thereby establishing a coupling relationship between the friction state and the overall stress level. On this basis, a contact stress optimization model is constructed, which incorporates a stress uniformity term, a friction risk regulation term, and a nominal load constraint penalty term, revealing the trade-off among these components. Due to the dependence of the friction term on the mean stress, a global coupling effect is introduced, leading to a nonseparable and nonconvex objective function. To solve the resulting problem, a dynamic regularized proximal gradient algorithm is developed, and its convergence properties are discussed based on the model structure. Numerical results demonstrate that the proposed model can effectively characterize the friction-stress coupling relationship, and the designed algorithm is capable of improving the contact stress distribution, reducing local peaks, and achieving good overall performance in terms of optimization accuracy, peak control, and distribution uniformity.

## Keywords

Contact Stress Optimization, Mean Stress Coupled Friction Model, Nonconvex Optimization, Modified Proximal Gradient Algorithm

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

摩擦接触系统广泛存在于机械结构、传动装置及材料工程中,其中接触界面的应力分布直接影响系统稳定性、磨损行为及结构寿命[1]。因此,通过合理调节接触应力分布以降低局部应力集中并改善整体受力状态,一直是接触力学与工程优化中的重要研究内容。

在数学建模中,接触应力优化通常以离散接触节点处的应力为优化变量,通过构造目标函数刻画应力分布特征。已有研究多关注应力均匀化或载荷分配问题,并通过凸优化模型实现应力平滑调节[2]。然而,在实际摩擦接触系统中,摩擦系数往往会随接触应力或其统计量发生变化,从而使摩擦行为与应力分布之间产生耦合关系,进而导致优化问题呈现非凸和非可分特征。

为描述上述现象,本文提出一种全局耦合摩擦模型,将摩擦系数表示为平均接触应力的函数,使摩擦状态能够随整体应力水平变化而动态调整。在此基础上,构建了一类包含应力均匀化项、摩擦风险项和名义载荷约束惩罚项的接触应力优化模型,从而揭示接触应力分布调节与摩擦风险控制之间的权衡结构[3][4]。

针对所建立的非凸优化模型,本文设计了动态正则近端梯度算法进行数值求解,并结合模型的结构性质对算法收敛行为进行讨论。数值实验表明,所提出方法能够有效改善接触应力分布,降低局部应力峰值,并在不同初始条件下保持较好的稳定性与鲁棒性[5][6]。

本文的主要工作包括:构建全局耦合摩擦接触应力优化模型,分析其基本数学性质,设计相应的近端梯度求解算法,并通过数值实验验证方法的有效性。

## 2. 接触应力优化模型

### 2.1. 变量与约束

考虑由  $n$  个离散接触节点组成的接触界面,记接触应力向量为

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

其中  $\sigma_i \geq 0$  表示第  $i$  个节点处的法向接触应力。传统模型通常取总载荷为固定值，即

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i = P.$$

但在实际工况下，总载荷往往存在一定波动，因此本文采用区间约束形式描述载荷变化范围，即

$$P_{\min} \leq \mathbf{1}^\top \sigma \leq P_{\max},$$

其中  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top$ ，且  $0 < P_{\min} < P_{\max}$ 。

据此，可行域定义为

$$\mathcal{C} = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_i \geq 0, i = 1, \dots, n, P_{\min} \leq \mathbf{1}^\top \sigma \leq P_{\max} \right\}$$

进一步定义平均接触应力为

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{n} \mathbf{1}^\top \sigma.$$

由于总载荷不再固定，故  $\bar{\sigma}$  能够反映系统整体应力水平的变化。

## 2.2. 平均应力耦合摩擦模型

为描述整体载荷水平对摩擦状态的影响，本文将摩擦系数表示为平均接触应力的函数：

$$\mu(\bar{\sigma}) = \mu_{\min} + \frac{\mu_{\max} - \mu_{\min}}{1 + e^{-k(\bar{\sigma} - \sigma_0)}}$$

其中  $\mu_{\min}$  和  $\mu_{\max}$  分别为摩擦系数下界与上界， $k > 0$  为斜率参数， $\sigma_0 > 0$  为转折点参数。

该函数能够描述摩擦系数随平均应力增大而逐渐变化并趋于稳定的特征。由于

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i,$$

故  $\mu(\bar{\sigma})$  依赖于全部节点应力，体现出整体耦合作用。

## 2.3. 优化模型构造

为了兼顾接触应力均匀性与摩擦风险，本文构造如下目标函数。

首先，定义应力均匀化项

$$F_1(\sigma) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \bar{\sigma})^2.$$

其次，定义摩擦风险项

$$F_2(\sigma) = \mu(\bar{\sigma}) \|\sigma\|_2^2.$$

考虑到系统通常围绕某一名义载荷工作，引入惩罚项

$$F_3(\sigma) = \frac{\rho}{2} (\mathbf{1}^\top \sigma - P_0)^2,$$

其中  $P_0 \in [P_{\min}, P_{\max}]$ ， $\rho > 0$ 。

因此，总目标函数定义为

$$F(\sigma) = \alpha F_1(\sigma) + (1-\alpha)F_2(\sigma) + F_3(\sigma), \quad 0 < \alpha < 1.$$

于是, 接触应力优化模型可写为

$$\min_{\sigma \in C} F(\sigma).$$

## 2.4. 模型性质分析

由定义可知, 可行域  $C$  由非负约束和线性不等式约束构成, 因此为非空闭凸集。

对于目标函数,  $F_1(\sigma)$  为关于应力向量的凸二次函数,  $F_3(\sigma)$  也是凸二次函数。相比之下,

$$F_2(\sigma) = \mu(\bar{\sigma}) \|\sigma\|_2^2$$

中包含平均应力的非线性函数与二次项的乘积结构, 具有明显的全局耦合特征。在一般参数条件下, 其 Hessian 不再保持半正定性, 该项通常不满足凸性, 因此总目标函数  $F(\sigma)$  为非凸函数。

综上, 本文建立了一个带载荷区间约束的接触应力优化模型。该模型能够同时描述应力均匀化需求、整体摩擦效应及名义载荷偏离惩罚, 为后续数值求解提供了基础。

## 3. 数值求解方法

### 3.1. 算法思路

针对第二章建立的接触应力优化模型, 本文采用改进型近端梯度算法(DRPG)进行求解。该方法在每一步迭代中, 对目标函数的光滑部分进行梯度线性化, 并结合二次近端项与动态正则项构造子问题, 从而得到新的迭代点[7]。

与经典投影梯度法相比, DRPG 方法同时引入了自适应步长  $\lambda_k$  和动态正则权重  $\mu_k$ , 能够在保证算法实现简洁的基础上, 提高迭代稳定性与数值鲁棒性。考虑到原问题仍包含非负约束和总载荷区间约束, 本文在近端子问题中保留可行域限制, 以保证迭代结果始终满足物理约束[8]。

### 3.2. DRPG 迭代格式

记第二章目标函数的光滑部分为  $E_1(\sigma)$ , 可行域为

$$C = \{\sigma \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_i \geq 0, P_{\min} \leq \mathbf{1}^T \sigma \leq P_{\max}\}.$$

在第  $k$  次迭代时, 给定当前点  $\sigma$ 、步长  $\lambda_k > 0$  及正则权重  $\mu_k > 0$ , 构造如下近端子问题:

$$\sigma^{k+1} = \arg \min_{s \in C} \left\{ \alpha \langle \nabla E_1(\sigma^k), s - \sigma^k \rangle + \frac{1}{2\lambda_k} \|s - \sigma^k\|_2^2 + (1-\alpha)\mu_k \|s\|_2 \right\}.$$

其中, 第一项反映光滑部分的局部一阶近似, 第二项为近端稳定项, 第三项为应力相关的正则化项。该格式兼顾了下降性与稳定性, 适合本文模型的数值求解。

### 3.3. 参数选取与停止准则

为增强算法适应性, 本文采用自适应步长策略更新  $\lambda_k$ 。当目标函数下降充分时, 适当增大步长; 当下降效果不明显时, 缩小步长, 以提高迭代稳定性。正则权重  $\mu_k$  随迭代动态调整, 用于平衡应力均匀化与数值鲁棒性[9]。

当满足

$$\|\sigma^{k+1} - \sigma^k\|_2 \leq \varepsilon$$

时，停止迭代，其中  $\varepsilon > 0$  为给定误差容限。

### 3.4. 算法步骤

本文所采用的 DRPG 算法步骤如下。

步骤 1: 给定模型参数、初始点  $\sigma^0 \in C$ 、初始步长  $\lambda_0$ 、初始正则权重  $\mu_0$ 、误差容限  $\varepsilon$  及最大迭代次数  $K_{\max}$ 。

步骤 2: 计算当前点  $\sigma^k$  处的梯度  $\nabla E_1(\sigma^k)$ 。

步骤 3: 求解约束近端子问题，得到新迭代点  $\sigma^{k+1}$ 。

步骤 4: 根据目标函数下降情况更新步长  $\lambda_k$  和正则权重  $\mu_k$ 。

步骤 5: 若满足停止准则，则输出结果；否则继续迭代。

### 3.5. 本章小结

本章针对接触应力优化模型，构建了改进型近端梯度算法。该方法通过引入自适应步长和动态正则权重，在保持算法结构简洁的同时增强了数值稳定性，并可为下一章的数值实验提供求解基础。

## 4. 数值实验与结果分析

本文从优化效果、收敛特性和算法对比三个方面对所提方法进行分析。首先给出接触应力优化前后的分布变化，以考察所提方法对局部应力集中现象的改善效果；其次通过不同初始点下的目标函数收敛曲线，分析算法对初始条件的适应性与稳定性；最后将所提出的 DRPG 算法与其他典型算法进行对比，以验证其在优化精度和分布均匀性方面的优势[10]。

接触应力优化前后的分布对比如图 1 所示。可以看出，优化前接触区域内存在较为明显的局部峰值，应力分布起伏较大，均匀性较差；经过优化后，接触应力曲线整体更加平滑，局部峰值得到有效抑制，应力分布趋于均匀。这表明本文所构建的优化模型能够在满足载荷约束的前提下有效降低应力集中程度，从而改善接触状态并提高结构服役可靠性。

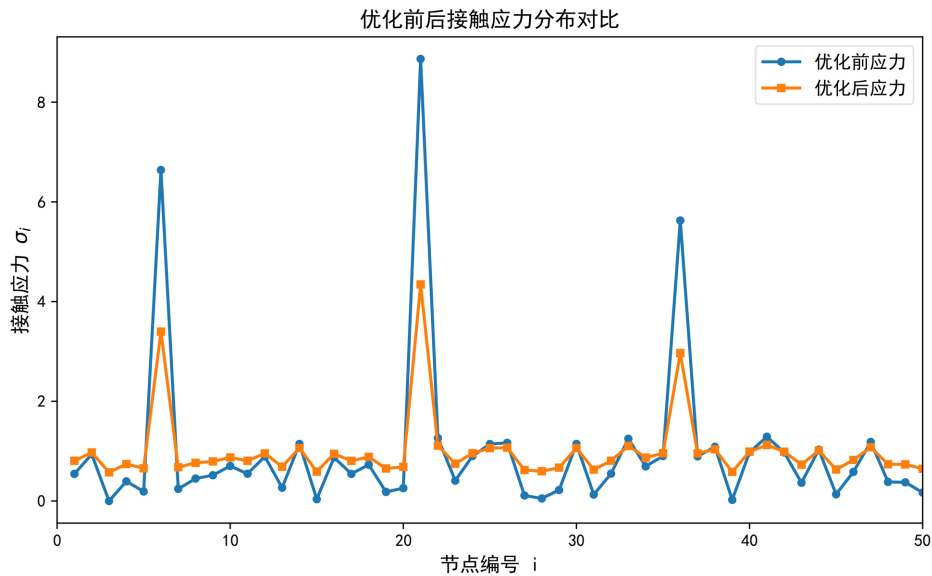
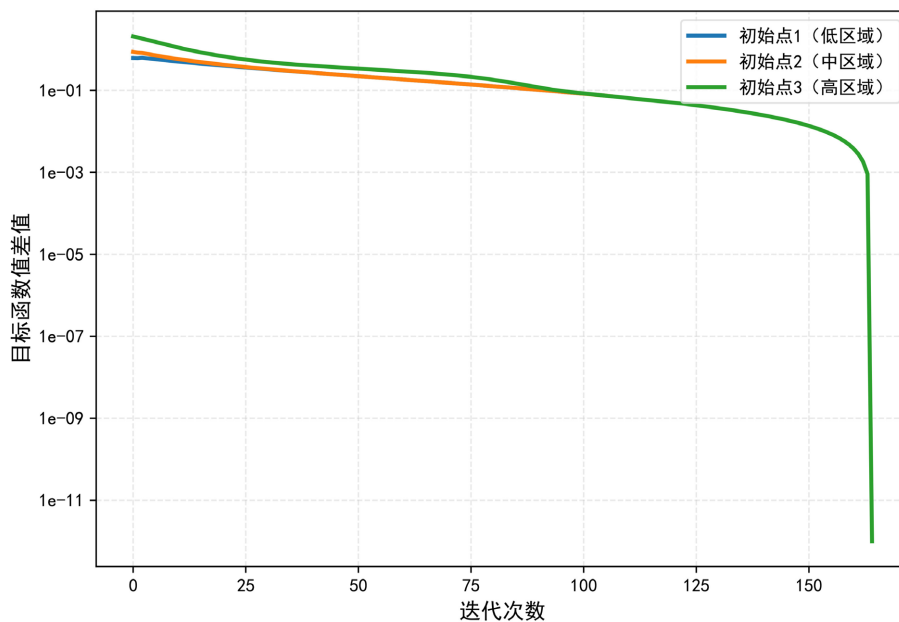


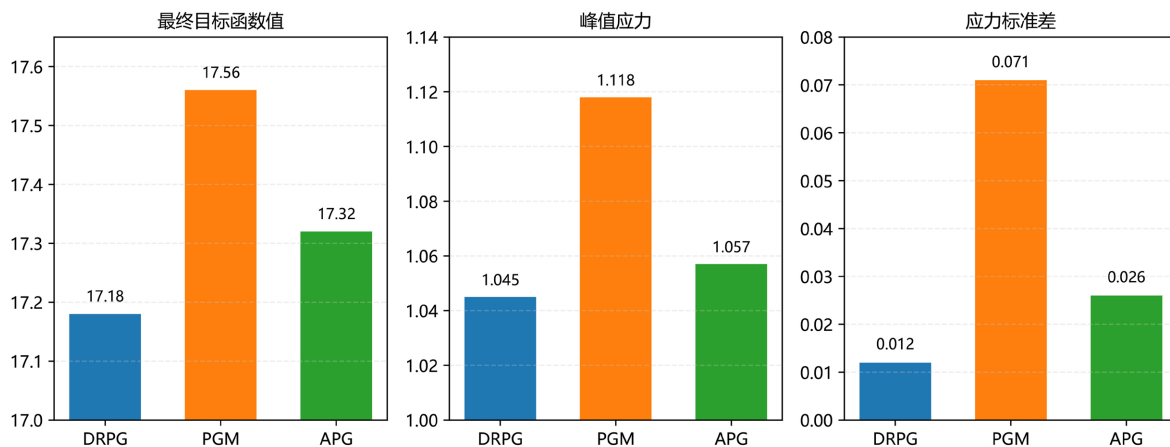
Figure 1. Comparison of contact stress distribution before and after optimization  
图 1. 接触应力优化前后分布对比

不同初始点条件下目标函数值差值的收敛曲线如图 2 所示。结果表明，随着迭代进行，各条曲线均能够稳定下降并逐步收敛到较低水平，说明所提算法具有较好的初值鲁棒性和收敛稳定性。这进一步说明，本文方法不仅适用于特定初始状态，而且能够在不同初始条件下保持较为一致的优化能力[11] [12]。



**Figure 2.** Convergence curves of the objective function under different initial points  
**图 2.** 不同初始点下目标函数收敛曲线

为进一步验证本文方法的优越性，对 DRPG、PGM 和 APG 三种算法的优化结果对比如图 3 所示，比较指标包括最终目标函数值、峰值应力和应力标准差。从图中可以看出，DRPG 在最终目标函数值方面取得了最低结果，说明其能够更有效地逼近优化目标；在峰值应力指标上，DRPG 的结果同样最低，表明其在抑制局部应力集中方面具有更好的效果；在应力标准差指标上，DRPG 也优于其余两种算法，说明其得到的接触应力分布更加均匀。



**Figure 3.** Comparison of optimization performance of different algorithms  
**图 3.** 不同算法的优化效果对比

综合来看, 本文提出的 DRPG 算法在优化精度、峰值控制和分布均匀性等方面均表现出更好的综合性能, 从而验证了该方法在接触应力优化问题中的有效性与适用性。

综上所述, 本文提出的 DRPG 算法能够有效改善接触应力分布, 降低局部峰值, 并在不同初始条件下保持稳定收敛。同时, 与 PGM 和 APG 的对比结果表明, DRPG 在目标函数值、峰值应力和应力均匀性等方面均具有一定优势, 说明该方法适用于接触应力优化问题的数值求解, 并具有较好的工程应用潜力。

## 5. 结论

本文针对接触界面应力分布优化问题, 构建了一个考虑全局摩擦调节效应的接触应力优化模型。通过引入依赖平均接触应力的摩擦函数, 将局部应力分布与整体摩擦状态进行耦合, 从而得到一个带区间载荷约束的结构化非凸优化问题。在此基础上, 本文设计了动态正则近端梯度算法进行求解, 并给出了相应的迭代格式与参数更新策略。

数值实验结果表明, 所提出模型能够有效改善接触应力分布, 降低局部峰值, 并在应力均匀化与摩擦风险控制之间实现合理权衡。同时, 所设计算法在不同初始条件下具有较好的稳定性, 并在与 PGM、APG 等方法的比较中表现出更优的综合性能, 说明该方法适用于接触应力优化问题的数值求解。后续工作可进一步结合更真实的接触边界条件、材料参数及实验数据, 对模型的工程适用性进行拓展研究。

## 基金项目

云南省教育厅科学研究基金项目(2026Y1149)。

## 参考文献

- [1] Barazandeh, B. and Razaviyayn, M. (2020) Solving Non-Convex Non-Differentiable Min-Max Games Using Proximal Gradient Method. ICASSP 2020-2020 *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Barcelona, 4-8 May 2020, 3162-3166. <https://doi.org/10.1109/icassp40776.2020.9054474>
- [2] De Marchi, A. and Themelis, A. (2024) An Interior Proximal Gradient Method for Nonconvex Optimization. *Open Journal of Mathematical Optimization*, **5**, 1-22. <https://doi.org/10.5802/ojmo.30>
- [3] Dutta, S. and Kalyan Patiballa, S. (2025) Design Optimization for Uniform Stress Distribution in Mechanical Metamaterials Using a Maximum Material Utilization Metric. *Journal of Mechanical Design*, **148**, Article 011702. <https://doi.org/10.1115/1.4068956>
- [4] Han, Y., Xu, B., Duan, Z. and Huang, X. (2022) Stress-Based Topology Optimization of Continuum Structures for the Elastic Contact Problems with Friction. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **65**, Article No. 54. <https://doi.org/10.1007/s00158-022-03169-1>
- [5] Kraus, M., Lenzen, M. and Merklein, M. (2021) Contact Pressure-Dependent Friction Characterization by Using a Single Sheet Metal Compression Test. *Wear*, **476**, Article 203679. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2021.203679>
- [6] Liu, Y., Jia, W., Xin, C., Yan, Q., Gao, W., Ning, F., et al. (2025) Analysis of Microstress Distribution Non-Uniformity in the Rolling Deformation Process of Ultra-Thin Magnesium Alloy Sheets. *Journal of Materials Research and Technology*, **36**, 963-973. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2025.03.169>
- [7] Ozaki, S., Matsuura, T. and Maegawa, S. (2020) Rate-, State-, and Pressure-Dependent Friction Model Based on the Elastoplastic Theory. *Friction*, **8**, 768-783. <https://doi.org/10.1007/s40544-019-0321-3>
- [8] Yang, Y. and Yu, J. (2020) Fast Proximal Gradient Descent for a Class of Non-Convex and Non-Smooth Sparse Learning Problems. *Proceedings of the 35th Uncertainty in Artificial Intelligence Conference*, **115**, 1253-1262.
- [9] Zhou, Y., Lin, Q., Li, W., Yue, T., Yan, J. and Hong, J. (2022) Optimization of Elastoplastic Behavior of Contact Interface for Improved Contact Stress Distribution. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **30**, 803-813. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.2024926>
- [10] Zhou, Y., Lin, Q., Shao, H., Wang, C., Li, X. and Hong, J. (2023) Stress-Based Optimization of Assembly Surface Mechanical Properties Oriented to Stress-Uniform Assembly. *Precision Engineering*, **82**, 350-359. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2023.04.010>

- 
- [11] Zhou, Y., Lin, Q., Yang, X., Hong, J., Zhang, N. and Zhao, F. (2021) Material Stiffness Optimization for Contact Stress Distribution in Frictional Elastic Contact Problems with Multiple Load Cases. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, **17**, 503-519. <https://doi.org/10.1007/s10999-021-09544-y>
- [12] Zöller, F., Sturm, V. and Merklein, M. (2015) Experimental and Numerical Investigation on a Pressure Dependent Friction Model. *Key Engineering Materials*, **639**, 403-410. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/kem.639.403>