

基于Bartlett修正的变换调整经验似然在长记忆时间序列中的应用

张文豪

广西师范大学数学与统计学院, 广西 桂林

收稿日期: 2026年6月20日; 录用日期: 2026年7月11日; 发布日期: 2026年7月22日

摘 要

本文提出基于Bartlett修正的TAE_L-B方法, 统一使用标准似然比统计量, 并系统比较不同伪观测及其系数对覆盖率的影响。由于经验似然无需计算参数估计的协方差, 在卡方近似下容易构造置信区间, 并且置信区间的形状由数据进行驱动, 因此被广泛应用于包括时间序列等诸多领域。本文在剖面Whittle得分框架下, 对四种方法进行蒙特卡洛对比: 标准经验似然(EL)、固定权重TAE_L(4, a_n)、固定权重TAE_L(2, a_n)、以及Bartlett修正TAE_L-B。模拟覆盖ARFIMA(0, d , 0)、ARFIMA(1, d , 0)和ARFIMA(0, d , 1)三种模型, 样本量 $n = 50, 70, 100, 150$, 各重复1000次。模拟结果表明, TAE_L(4, a_n)在所有场景下覆盖率系统性偏低, 在二维模型中 $n = 150$ 时降至0.64~0.69, 甚至不如未修正的EL。将系数修正为2后, TAE_L(2, a_n)和TAE_L-B均表现良好, 覆盖率接近名义水平。在ARFIMA(1, d , 0)模型(φ, d) = (0.5, 0.4)且 $n = 150$ 时, TAE_L-B的覆盖率达到0.932, 比TAE_L(2, a_n)的0.902高出三个百分点。在Fisher信息较弱的二维参数区域, Bartlett修正可额外提升2%~3%的覆盖率。本研究为长记忆时间序列的参数区间估计提供了一个更为可靠稳健的方法。

关键词

经验似然, 调整经验似然, 变换经验似然, Bartlett修正, 长记忆时间序列, ARFIMA模型

Application of the Bartlett-Corrected Transformed Adjusted Empirical Likelihood for Long-Memory Time Series Models

Wenhao Zhang

School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi

Received: June 20, 2026; accepted: July 11, 2026; published: July 22, 2026

Abstract

This paper proposes a Bartlett-corrected *TAE_L_B* (transformed adjusted empirical likelihood) method, which consistently uses the standard likelihood ratio statistic, and systematically compares the impact of different pseudo-observation strategies and coefficients on coverage probability. Since empirical likelihood does not require estimating the covariance of parameter estimates, confidence intervals can be easily constructed under the chi-squared approximation with data-driven shapes, and it has been widely applied in many fields, including time series. Under the profiled *Whittle* score framework, Monte Carlo comparisons of four methods are conducted: standard empirical likelihood (*EL*), fixed-weight *TAE_L*(4, a_n), fixed-weight *TAE_L*(2, a_n), and Bartlett-corrected *TAE_L_B*. Simulations cover three models—*ARFIMA*(0, d , 0), *ARFIMA*(1, d , 0), and *ARFIMA*(0, d , 1)—with sample sizes $n = 50, 70, 100, 150$, each with 1000 replications. The results show that *TAE_L*(4, a_n) exhibits systematically low coverage across all scenarios, dropping to 0.64~0.69 in two-parameter models at $n = 150$, which is even worse than the uncorrected *EL*. After correcting the coefficient to 2, both *TAE_L*(2, a_n) and *TAE_L_B* perform well, with coverage probabilities close to the nominal level. *TAE_L_B* achieves a coverage of 0.932 at $(\varphi, d) = (0.5, 0.4)$ with $n = 150$ in *ARFIMA*(1, d , 0), outperforming *TAE_L*(2, a_n) at 0.902 by three percentage points. The Bartlett correction provides an additional 2%~3% coverage gain in two-parameter regions with weak Fisher information. This study offers a theoretically consistent and computationally robust tool for constructing confidence regions in long-memory time series models.

Keywords

Empirical Likelihood, Adjusted Empirical Likelihood, Transformed Empirical Likelihood, Bartlett Correction, Long-Memory Time Series, *ARFIMA* Model

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

经验似然(*empirical likelihood, EL*)由 Owen [1] [2]提出, 是一种非参数统计推断方法。其核心优势在于经验似然比统计量渐近服从卡方分布, 无需估计协方差矩阵即可构造置信域。Monti [3]利用周期图坐标的渐近独立性将其推广至短记忆时间序列, Yau [4]进一步将其扩展至长记忆 *ARFIMA* 模型。

然而, *EL* 在小样本下面临两个问题。其一, 估计方程凸包可能不包含原点, 导致 *EL* 比率无定义。Whittle [5]提出剖面 *whittle* 将方差作为冗余参数从似然函数之中分离出来。Chen 等人[6]提出调整经验似然(*adjusted EL, AEL*), 通过添加伪观测值保证解的存在性, 并且。Liu 和 Chen [7]引入 *Bartlett* 修正权重代替固定调整水平, 将覆盖误差提升至 $O(n^{-2})$, 讲述了关于调整系数 a_n 的选取, 取 $a_n = \max(1, \log m/2)$, 并指出当样本量较小时可取固定的正常数以简化计算。其二, 即使方程凸包包含原点, 卡方逼近精度不足, 也会导致置信域覆盖不足。Jing 等人[8]提出变换经验似然(*transformed EL, TEL*), 通过对 *EL* 比率进行截断二次收缩来扩大置信域, 本文的转换似然系数和样本量与此文一致。

对于长记忆时间序列, Gamage、Ning 和 Gupta [9]将 *AEL* 应用于 *ARFIMA* 模型, Gamage 和 Ning [10]进一步将其与 *TEL* 结合, 提出了 *TAE_L* 方法。Zhang 等人[11]在无 *TEL* 的情形下提出了基于 *Bartlett* 修正

的 AEL^* 方法, 使用两个伪观测值并取得了优于固定权重 AEL 的覆盖表现。

本文在统一使用剖面得分的框架下, 系统比较了不同系数和伪观测策略对 $TAEI$ 方法覆盖概率的影响, 并提出 $TAEI_{B:Bartlett}$ 修正的 AEL 与 TEL 的组合, 为长记忆时间序列模型提供更稳健的置信域构造方法。

2. 模型设定与估计方程

考虑平稳可逆的 $ARFIMA(p, d, q)$ 过程 $\{X_t\}_{t=1}^n$, 满足

$$\Phi(B)(1-B)^d X_t = \Theta(B)\epsilon_t, \quad t \in Z$$

其中, B 为滞后算子, $d \in (0, 0.5)$ 为长记忆参数, $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ 和 $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ 分别为自回归和移动平均多项式。两个多项式的根均在单位圆外以保证平稳性和可逆性, 且无公共因子以避免参数冗余。 $\{\epsilon_t\}$ 为独立同分布的高斯白噪声, $E(\epsilon_t) = 0$, $Var(\epsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ 。

模型的谱密度函数为:

$$f(\omega; \beta, \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} \frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2}, \quad \omega \in (0, \pi)$$

其中, $\beta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, d)^\top \in B \subset R^{p+q+1}$ 为待估参数向量, σ^2 为冗余参数, B 为紧参数空间。定义傅里叶频率 $\omega_j = 2\pi j/n$, $j = 1, \dots, m$, 其中 $m = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ 为频率点个数。周期图为:

$$I(\omega_j) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\omega_j t} \right|^2, \quad j = 1, \dots, m.$$

Whittle [5] 对数似然函数(忽略常数项)为:

$$\ell_w(\beta, \sigma^2) = \sum_{j=1}^m \left\{ \log f(\omega_j; \beta, \sigma^2) + \frac{I(\omega_j)}{f(\omega_j; \beta, \sigma^2)} \right\}$$

将谱密度写为 $f(\omega; \beta, \sigma^2) = \sigma^2 h(\omega; \beta) / (2\pi)$, 进行参数估计之前先将 σ^2 作为冗余参数剔除, 对数似然函数 $\ell_w(\beta, \sigma^2)$ 关于 σ^2 求偏导并令其等于 0 解得 $\hat{\sigma}^2(\beta) = \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^m I(\omega_j) / h(\omega_j; \beta)$ 。对数似然的估计方程为:

$$\sum_{j=1}^m \psi_j(\beta) = 0$$

其中, $\psi_j(\beta)$ 为得分函数, 其维数 $q = p + q + 1$ 等于 β 的维数。

由 Yau [4], 当 $d \in [\delta, 0.5 - \delta]$ (对某固定 $\delta > 0$) 时, $\{I(\omega_j)\}_{j=1}^m$ 渐近独立, 从而得分 $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ 可作为渐近独立的估计函数。

3. 经验似然方法

3.1. 标准经验似然

在经验似然的计算之中, 如果原点落在凸包 $\Omega_\beta = \{\psi_j(\beta), j = 1, \dots, m\}$ 内, 则有最优解, 反之则无最优解导致经验似然无定义使得由经验似然比构造出来的置信区间覆盖率偏低。按照 Owen [1] [2] 的一般框

架, EL 比定义为:

$$R(\boldsymbol{\beta}) = -2 \sup \left\{ \sum_{j=1}^m \log(mp_j) : p_j \geq 0, \sum p_j = 1, \sum p_j \boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{\beta}) = 0 \right\}$$

由拉格朗日算法可以得出 $p_j = [1 + \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\psi}_j]^{-1}$, 其中拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 满足:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\boldsymbol{\psi}_j}{1 + \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\psi}_j} = \mathbf{0}$$

EL 比率统计量为:

$$R(\boldsymbol{\beta}) = 2 \sum_{j=1}^m \log(1 + \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{\beta}))$$

那么就可以构造出 $\boldsymbol{\beta}$ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 置信域为 $\{\boldsymbol{\beta} : R(\boldsymbol{\beta}) \leq \chi_q^2(1 - \alpha)\}$ 。这里, $\chi_q^2(1 - \alpha)$ 是自由度为 q 的卡方分布的 $1 - \alpha$ 分位数。

3.2. 调整经验似然

基于标准经验似然构造的置信域通常会伴随覆盖率较低的问题, 原因就在于原点可能会落在凸包外, 导致无法找到最优解。Chen 等人[6]等提出通过添加伪观测值保证凸包包含原点。定义第 $m+1$ 个伪观测值:

$$\boldsymbol{\psi}_{m+1} = -a_m \bar{\boldsymbol{\psi}}, \quad \bar{\boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\psi}_j$$

研究表明, 调整经验似然 AEL 保留了经验似然 EL 的一阶渐近性质, 并在一些例子中发现 $a_n = \max(1, \log m/2)$ 是有效的。

固定权重 AEL 比率为:

$$R_A^{(fix)}(\boldsymbol{\beta}) = 2 \sum_{j=1}^{m+1} \log(1 + \boldsymbol{\lambda}^\top \tilde{\boldsymbol{\psi}}_j)$$

3.3. 变换经验似然

考虑到标准经验似然在小样本下存在覆盖不足的倾向, 本文采用 Jing 等人[8]提出的变换经验似然 (TEL) 方法以修正该问题。该方法通过线性结合非线性变换放松了凸包约束的影响, 能够提供更接近名义水平的覆盖概率。本文采用该方法对 AEL 比率施加截断二次变换:

$$R_T(\boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} R_A(\boldsymbol{\beta}) \left(1 - \frac{R_A(\boldsymbol{\beta})}{n_{eff}} \right), & R_A(\boldsymbol{\beta}) \leq n_{eff}/2 \\ R_A(\boldsymbol{\beta})/2, & R_A(\boldsymbol{\beta}) > n_{eff}/2 \end{cases}$$

其中, n_{eff} 为有效样本量。TEL 满足: (1) 对任意的 $\boldsymbol{\beta}$, $0 \leq R_T(\boldsymbol{\beta}) \leq R_A(\boldsymbol{\beta})$; (2) $R_T(\boldsymbol{\beta})$ 关于 $R_A(\boldsymbol{\beta})$ 单调递增; (3) $R_T(\boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} \chi_q^2$; (4) 置信域保持数据驱动形状。

3.4. 本文 $TAEL_B$ 算法流程

- (1) 计算剖面 *whittle* 得分 σ^2 作为冗余参数先进行替代后的似然函数的得分函数。
- (2) 一维情形: 计算 *Bartlett* 因子 a , 若不可用则回退至 a_n ; 添加 $\boldsymbol{\psi}_{m+1} = -a\bar{\boldsymbol{\psi}}$, $n_{eff} = m+1$ 。二维及

以上维情形：计算 a_1, a_2 ，添加 $\psi_{m+1} = -a_1\bar{\psi}$ 和 $\psi_{m+2} = a_2\bar{\psi}$ ， $n_{eff} = m + 2$ 。

- (3) 计算 AEL 比率 $R_A = 2 \sum_{j=1}^{n_{eff}} \log(1 + \lambda^\top \tilde{\psi}_j)$ 。
- (4) 施加 TEL 变换： $R_T = R_A(1 - R_A/n_{eff})$ ，若 $R_A \leq n_{eff}/2$ ，否则 $R_T = R_A/2$ 。
- (5) 置信域： $\{\beta: R_T(\beta) \leq \chi_{q,1-\alpha}^2\}$ 。

该算法包含了一维和二维以上的 *Bartlett* 修正，通过融合 *AEL* 和 *TEL* 提升了经验似然的覆盖率。

4. 模拟研究

为便于模拟研究的讨论，本节统一说明所比较的四种方法的具体构成。所有方法均基于剖面 *Whittle* 得分，并在 95%名义水平下构造置信域。*EL* (标准经验似然)，即 *Owen* (1988)原始框架，不引入伪观测值，不施加 *TEL* 变换。*EL* 作为基准，反映未经任何修正时的覆盖表现。

Tael(4, a_n)，引入 1 个伪观测值，由于构造的似然比统计量当系数为 4 时服从卡方分析，故系数取为 4，所有观测值和伪观测值等权重，施加 *TEL* 变换。*Tael*(2, a_n)，由于构造的似然比统计量当系数为 2 时服从卡方分析，故系数取为 2，依据 *Liu* 和 *Chen* [7]的理论结论，较小常系数可降低高阶覆盖误差。*Tael_B*，引入 2 个伪观测值，权重 a_n 由 *Bartlett* 因子决定，由得分的一阶矩和二阶矩估计得到。同样施加 *TEL* 变换。以数据驱动的权重替代固定权重，自适应调整置信域。在这一节中，对 *ARFIMA*(0, d , 0)、*ARFIMA*(1, d , 0)和 *ARFIMA*(0, d , 1)三个模型进行蒙特卡洛模拟。 $\epsilon_t \sim N(0,1)$ ，样本量 $n = 50, 70, 100, 150$ ，各配置 1000 次重复，名义水平 95%。比较四种方法：(1) *EL*；(2) *Tael*(4, a_n) (固定 a_n 、1 个观测值、*TEL*)；(3) *Tael*(2, a_n) (固定 a_n 、1 伪观测值、*TEL*)；(4) *Tael_B* (*Bartlett* 权重、*TEL*)。基于上述四种方法我们比较它们对应的覆盖率。

4.1. *ARFIMA*(0, d , 0)

Table 1. 95% confidence interval coverage probabilities and average lengths for *ARFIMA*(0, d , 0) model
表 1. *ARFIMA*(0, d , 0)模型的 95%置信区间覆盖概率与平均长度

样本量	d	<i>EL</i>	<i>Tael</i> (4, a_n)	<i>Tael</i> (2, a_n)	<i>Tael_B</i>
50	0.10	0.879	0.815	0.950	0.940
	0.20	0.900	0.823	0.963	0.957
	0.25	0.890	0.830	0.957	0.947
	0.35	0.910	0.844	0.961	0.959
	0.45	0.927	0.881	0.964	0.958
70	0.10	0.894	0.817	0.935	0.926
	0.20	0.908	0.829	0.942	0.940
	0.25	0.915	0.818	0.948	0.942
	0.35	0.891	0.808	0.946	0.939
	0.45	0.929	0.835	0.957	0.952
100	0.10	0.900	0.803	0.928	0.927
	0.20	0.892	0.782	0.932	0.928
	0.25	0.899	0.803	0.925	0.926
	0.35	0.912	0.819	0.933	0.935
	0.45	0.914	0.813	0.936	0.935

续表

150	0.10	0.918	0.804	0.928	0.929
	0.20	0.910	0.801	0.930	0.936
	0.25	0.925	0.810	0.944	0.943
	0.35	0.902	0.799	0.918	0.922
	0.45	0.918	0.823	0.935	0.938

表 1 给出了 $ARFIMA(0, d, 0)$ 模型下, 不同样本量 $n = 50, 70, 100, 150$ 与长记忆参数 d (0.10~0.45)组合时, 四种方法($EL, TAEI(4, a_n), TAEI(2, a_n), TAEI_B$)的 95%置信区间覆盖概率。从整体表现来看, $TAEI(2, a_n)$ 与 $TAEI_B$ 在所有样本量和 d 值下的覆盖率均非常接近名义水平 0.95, 绝大多数落在 0.92~0.97 之间, 表现最为稳定。传统 EL 方法的覆盖率普遍偏低, 在 0.88~0.93 之间, 显著低于 0.95。而 $TAEI(4, a_n)$ 的覆盖率则明显不足, 大多集中在 0.78~0.88, 尤其在 $n \geq 100$ 时普遍低于 0.82, 存在较严重的欠覆盖问题。即使在样本量较小($n = 50$)或长记忆参数较大($d = 0.45$)时, $TAEI(2, a_n)$ 与 $TAEI_B$ 仍能保持良好的覆盖表现, 且受 d 变化的影响较小。例如, 当 $n = 50$ 、 $d = 0.45$ 时, 两者覆盖率分别为 0.964 和 0.958; 当 $n = 150$ 、 $d = 0.45$ 时, 仍维持在 0.935 与 0.938 左右。这表明在纯长记忆过程中, $TAEI(2, a_n)$ 和 $TAEI_B$ 对长记忆强度具有较好的鲁棒性。

4.2. $ARFIMA(1, d, 0)$

Table 2. 95% confidence interval coverage probabilities for $ARFIMA(1, d, 0)$ model
表 2. $ARFIMA(1, d, 0)$ 模型的 95%置信域覆盖率

样本量	ϕ	d	EL	$TAEI(4, a_n)$	$TAEI(2, a_n)$	$TAEI_B$
50	0.3	0.2	0.877	0.881	0.986	0.979
	0.4	0.3	0.863	0.873	0.989	0.980
	0.5	0.2	0.819	0.833	0.982	0.963
	0.5	0.4	0.814	0.829	0.985	0.966
	0.7	0.4	0.831	0.852	0.993	0.982
70	0.3	0.2	0.874	0.785	0.957	0.958
	0.4	0.3	0.874	0.781	0.956	0.962
	0.5	0.2	0.857	0.757	0.934	0.946
	0.5	0.4	0.833	0.760	0.933	0.941
	0.7	0.4	0.848	0.746	0.952	0.945
100	0.3	0.2	0.869	0.715	0.942	0.949
	0.4	0.3	0.848	0.787	0.915	0.932
	0.5	0.2	0.848	0.803	0.915	0.931
	0.5	0.4	0.840	0.799	0.904	0.915
	0.7	0.4	0.821	0.771	0.905	0.901
150	0.3	0.2	0.859	0.794	0.917	0.925
	0.4	0.3	0.856	0.766	0.898	0.917
	0.5	0.2	0.863	0.738	0.918	0.933
	0.5	0.4	0.860	0.761	0.902	0.932
	0.7	0.4	0.852	0.794	0.892	0.892

表 2 展示了 $ARFIMA(1, d, 0)$ 模型下, 不同样本量 $n = 50, 70, 100, 150$ 、不同自回归系数 ϕ 与长记忆参数 d 组合时, 四种方法(EL , $TAE_L(4, a_n)$, $TAE_L(2, a_n)$, TAE_L_B)在 95%名义置信水平下的实际覆盖率。从整体来看, 当样本量较小($n = 50$)时, $TAE_L(2, a_n)$ 和 TAE_L_B 的覆盖率过高。随着样本量增大至 $n = 70$ 及更大, 传统 EL 的覆盖率仍多数低于 0.88, 而 $TAE_L(2, a_n)$ 与 TAE_L_B 依然保持在 0.89~0.96 左右, 表现更加稳健。 $TAE_L(2, a_n)$ 与 TAE_L_B 受 ϕ 和 d 变化的影响较小, 在不同参数组合下均能维持接近名义水平的覆盖率, 表明它们对 $ARFIMA(1, d, 0)$ 模型的长记忆和自回归结构具有更好的适应能力。

4.3. $ARFIMA(0, d, 1)$

Table 3. 95% confidence interval coverage probabilities for $ARFIMA(0, d, 1)$ model
表 3. $ARFIMA(0, d, 1)$ 模型的 95%置信域覆盖率

样本量	d	θ	EL	$TAE_L(4, a_n)$	$TAE_L(2, a_n)$	TAE_L_B
50	0.2	0.2	0.852	0.856	0.989	0.978
	0.1	0.5	0.845	0.854	0.996	0.987
	0.3	0.3	0.876	0.886	0.996	0.987
	0.4	0.5	0.843	0.850	0.987	0.975
	0.4	0.7	0.770	0.789	0.981	0.948
70	0.2	0.2	0.874	0.775	0.967	0.962
	0.1	0.5	0.887	0.790	0.964	0.961
	0.3	0.3	0.863	0.771	0.956	0.950
	0.4	0.5	0.875	0.774	0.960	0.955
	0.4	0.7	0.810	0.719	0.916	0.918
100	0.2	0.2	0.880	0.741	0.936	0.935
	0.1	0.5	0.874	0.743	0.939	0.933
	0.3	0.3	0.874	0.740	0.935	0.933
	0.4	0.5	0.851	0.716	0.922	0.919
	0.4	0.7	0.820	0.681	0.894	0.901
150	0.2	0.2	0.881	0.733	0.917	0.920
	0.1	0.5	0.889	0.715	0.919	0.921
	0.3	0.3	0.896	0.744	0.930	0.930
	0.4	0.5	0.882	0.714	0.924	0.926
	0.4	0.7	0.852	0.681	0.897	0.902

表 3 报告给定模型 $ARFIMA(0, d, 1)$ 下, 不同样本量 $n = 50, 70, 100, 150$ 、不同长记忆参数 d 与移动平均参数 θ 组合时, 四种方法(EL , $TAE_L(4, a_n)$, $TAE_L(2, a_n)$, TAE_L_B)在 95%名义置信水平下的实际覆盖率。从整体来看, $TAE_L(2, a_n)$ 与 TAE_L_B 在所有样本量和参数组合下均表现最优。当样本量较小($n = 50$)时, 两者的覆盖率略高于名义水平, 分别落在 0.98~0.99 和 0.95~0.99 之间, TEL 变换在小样本下过于修正使得置信域变大, 过覆盖; 随着样本量增大至 $n = 70, 100, 150$, 两者逐渐收敛至 0.90~0.97 的范围, 表现稳健。相比之下, 传统 EL 方法的覆盖率普遍偏低(0.77~0.90)。参数 θ 的增大(如 $\theta = 0.7$)会对所有方法的覆盖表现产生负面影响, 尤其在小样本($n = 50$)时, EL 的覆盖率分别降至 0.770; 而 $TAE_L(2, a_n)$ 与 TAE_L_B 则仍能维持 0.981 和 0.948 的可接受水平, 显示出对较强 MA 结构的良好鲁棒性。随着样本量增加至 $n = 150$, 即使 $\theta = 0.7$, $TAE_L(2, a_n)$ 与 TAE_L_B 的覆盖率仍保持在 0.897 和 0.902 左右。

5. 结论

本文在统一的剖面 Whittle 得分框架下, 将变换经验似然的方法(TEL)应用于调整经验似然函数(AEL)中, 并对 AEL 得出的似然比函数进行了 Bartlett 修正得出 TAE_L_B 模型, 将其应用于 ARFIMA 模型进行模拟。结果表明, 方法 TAE_L(2, a_n)和 TAE_L_B 对于三种模型假定在小样本下都具有较好的覆盖率。在 ARFIMA(0, d , 0)模型中, 这两种方法的效果基本上相同, 显示出在调整经验似然和变换经验似然之间是否有 Bartlett 修正对结果的影响并不是很大, 原因在于 Bartlett 修正与 TAE_L 的变换方法在目标上高度近似, 均旨在消除经验似然比统计量的一阶误差。在移动平均参数较强(如 $\theta = 0.7$)的极端设定下, TAE_L_B 的覆盖率略优于 TAE_L, 表明 Bartlett 修正此时能提供额外的偏差校正。在多数常规参数下, 两者差异不大, TAE_L(2, a_n)已足够。在实际应用中, 优先考虑应用 TAE_L(2, a_n)方法去进行经验似然置信域估计, 当实际数据样本量较少且移动平均参数较为极端时, 可以考虑加上 Bartlett 修正以获取更好的经验似然置信域覆盖率。本文为实际应用的经验似然置信域构造提供一个小样本下更稳健的方法。

参考文献

- [1] Owen, A.B. (1988) Empirical Likelihood Ratio Confidence Intervals for a Single Functional. *Biometrika*, **75**, 237-249. <https://doi.org/10.1093/biomet/75.2.237>
- [2] Owen, A.B. (1990) Empirical Likelihood Ratio Confidence Regions. *The Annals of Statistics*, **18**, 90-120. <https://doi.org/10.1214/aos/1176347494>
- [3] Monti, A.C. (1997) Empirical Likelihood Confidence Regions in Time Series Models. *Biometrika*, **84**, 395-405. <https://doi.org/10.1093/biomet/84.2.395>
- [4] Yau, C.Y. (2012) Empirical Likelihood in Long-Memory Time Series Models. *Journal of Time Series Analysis*, **33**, 269-275. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.2011.00756.x>
- [5] Whittle, P. (1953) Estimation and Information in Stationary Time Series. *Arkiv för Matematik*, **2**, 423-434. <https://doi.org/10.1007/bf02590998>
- [6] Chen, J., Variyath, A.M. and Abraham, B. (2008) Adjusted Empirical Likelihood and Its Properties. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **17**, 426-443. <https://doi.org/10.1198/106186008x321068>
- [7] Liu, Y. and Chen, J. (2010) Adjusted Empirical Likelihood with High-Order Precision. *The Annals of Statistics*, **38**, 1341-1362. <https://doi.org/10.1214/09-aos750>
- [8] Jing, B.Y., Tsao, M. and Zhou, W. (2017) Transforming the Empirical Likelihood towards Better Accuracy. *Canadian Journal of Statistics*, **45**, 340-352. <https://doi.org/10.1002/cjs.11328>
- [9] Gamage, R.D.P., Ning, W. and Gupta, A.K. (2017) Adjusted Empirical Likelihood for Long-Memory Time-Series Models. *Journal of Statistical Theory and Practice*, **11**, 220-233. <https://doi.org/10.1080/15598608.2016.1271373>
- [10] Gamage, R.D.P. and Ning, W. (2020) Inference for Long-Memory Time Series Models Based on Modified Empirical Likelihood. *Austrian Journal of Statistics*, **49**, 68-79. <https://doi.org/10.17713/ajs.v49i5.983>
- [11] Zhang, X., Zhang, R. and Lu, Z. (2022) Confidence Regions for Parameters in Stationary Time Series Models with Gaussian Noise. *Frontiers in Physics*, **9**, Article 801692. <https://doi.org/10.3389/fphy.2021.801692>