

小样本下Weibull分布参数的贝叶斯估计研究

罗 琼

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年7月17日; 录用日期: 2026年8月9日; 发布日期: 2026年8月19日

摘 要

Weibull分布是可靠性工程中刻画产品寿命特征的重要模型, 其参数的精确估计直接关系到寿命预测与维修决策的可靠性。本文在形状参数已知的假设下, 系统研究Weibull分布尺度参数的贝叶斯估计方法。首先给出尺度参数的极大似然估计; 其次, 分别在无信息先验和共轭先验下, 结合平方损失函数推导贝叶斯估计的解析表达式; 最后通过蒙特卡洛模拟, 在不同样本量和参数真值下比较三种估计方法的均方误差与偏差。结果表明, 无信息先验下的贝叶斯估计与极大似然估计在点估计上完全等价; 共轭先验通过引入合理的先验信息, 在小样本下能够显著降低估计的均方误差与偏差, 且样本量越小提升幅度越明显。

关键词

Weibull分布, 贝叶斯估计, 极大似然估计, 小样本

Research on Bayesian Estimation of Weibull Distribution Parameters with Small Sample Sizes

Qiong Luo

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: July 17, 2026; accepted: August 9, 2026; published: August 19, 2026

Abstract

The Weibull distribution is a crucial model in reliability engineering for characterizing product lifespan features, where accurate parameter estimation directly impacts the reliability of lifespan prediction and maintenance decisions. Under the assumption of a known shape parameter, this study systematically investigates Bayesian estimation methods for the scale parameter of the Weibull

distribution. First, the maximum likelihood estimation of the scale parameter is derived. Second, analytical expressions for Bayesian estimation are obtained under both non-informative and conjugate priors, combined with the squared error loss function. Finally, Monte Carlo simulations are employed to compare the mean squared error and bias of three estimation methods under different sample sizes and true parameter values. The results indicate that Bayesian estimation under non-informative priors is fully equivalent to maximum likelihood estimation in point estimation; conjugate priors, by incorporating reasonable prior information, can significantly reduce the mean squared error and bias of estimation with small samples, and the improvement becomes more pronounced as the sample size decreases.

Keywords

Weibull Distribution, Bayesian Estimation, Maximum Likelihood Estimation, Small Sample

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Weibull 分布作为可靠性工程中最重要寿命分布之一, 凭借其形状参数可灵活刻画失效率递增、恒定与递减三种失效模式, 在机械电子、航空航天、新材料试验等领域具有广泛应用[1][2]。模型参数的精确估计直接影响产品寿命预测与维修决策的可靠性。然而, 实际工程中受试验成本与技术条件限制, 可获取的失效数据往往十分有限。因此, 小样本下 Weibull 分布参数的精确估计, 已成为工程统计领域亟待解决的关键问题。宫琦等[3]提出一种虚拟增广 - 贝叶斯相结合的估计方法, 用以解决小样本情形下可靠性参数估计困难的问题。孔祥芬等[4]提出小样本下基于 LSSVM 算法的飞机 IDG 可靠性分析方法。

经典统计方法以极大似然估计(MLE)为代表, 虽具有良好的大样本渐近性质, 但在小样本情形下其估计偏差显著、置信区间覆盖率严重偏离名义水平, 难以满足高可靠性产品的评估需求[5]。贝叶斯估计通过引入参数的先验分布, 能够在小样本下借用先验信息来弥补数据信息的不足, 为小样本可靠性评估提供了极具潜力的解决方案[6][7]。在此背景下, 系统研究 Weibull 分布参数的贝叶斯估计方法, 并评估其在小样本下的估计性能, 具有重要的理论意义与工程应用价值。

Weibull 分布的参数估计一直是可靠性统计研究的核心课题之一[8]。在经典统计框架下, 极大似然方法因其渐近有效性而被广泛采用, 但需依赖数值迭代求解, 且在小样本下表现不佳。针对小样本问题, 众多学者尝试引入各类改进方法, 但均难以从根本上解决小样本下估计精度不足的困境。程静等[9]在 Linux 损失下研究了 Weibull 分布参数的 Bayes 估计及其容许性, 并给出了多层 Bayes 估计的数值实现。

本文在形状参数已知的假设下, 系统研究 Weibull 分布尺度参数的极大似然估计和贝叶斯估计, 分别构造无信息先验和共轭先验在平方损失函数下贝叶斯估计的解析表达式。通过蒙特卡洛模拟, 系统比较三种估计方法在小样本下的均方误差与偏差表现。

2. Weibull 分布与极大似然估计

2.1. Weibull 分布

定义 1 若连续型随机变量 X 的概率密度和为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\beta > 0$ 为尺度参数, $\eta > 0$ 为形状参数, 则称 X 服从参数为 β , η 的 Weibull 分布。

对应的分布函数、可靠度函数与失效率函数分别为

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}, \\ R(x) &= 1 - F(x) = e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}, \\ h(x) &= \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1}. \end{aligned}$$

2.2. 极大似然估计

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 Weibull 总体的样本, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是对应的样本值, 本文假设尺度参数 β 已知, 形状参数 η 未知。则似然函数为

$$L(\eta, \beta | x) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{\eta^\beta} x_i^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\eta}\right)^\beta}, \quad (2)$$

对似然函数(2)取对数得到对数似然函数

$$\ln L(\eta, \beta) = n \ln \beta - n \beta \ln \eta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\eta}\right)^\beta, \quad (3)$$

对对数似然函数(3)关于 η 求导并令其为零, 可得

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = -\frac{n\beta}{\eta} + \frac{\beta}{\eta^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n x_i^\beta = 0, \quad (4)$$

由式(4)可解出参数 η 的极大似然估计为

$$\hat{\eta}_{MLE} = \left(\frac{S}{n}\right)^{1/\beta}$$

其中 $S = \sum_{i=1}^n x_i^\beta$ 为充分统计量。

2.3. 贝叶斯估计

为便于计算, 令 $\theta = \frac{1}{\eta^\beta}$ 。假设参数 β 已知, 故对参数 η 的估计可看作对参数 $\theta > 0$ 的估计。似然函数(2)可改写为

$$L(\theta | x, \beta) = \theta^n \beta^n \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} e^{-\theta x_i^\beta} \propto \theta^n e^{-\theta S}, \theta > 0, \quad (5)$$

2.3.1. 无信息先验

无法提供任何先验信息时, 可采用无信息先验, 本文采用 Jeffreys 先验准则构造无信息先验。对似然函数(5)取对数并关于 θ 求二阶导可得

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2}$$

Fisher 信息量为

$$I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2}$$

由 Jeffreys 先验正比于 Fisher 信息量的平方根可得

$$\pi_J(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)} \propto \frac{1}{\theta}, \quad \theta > 0 \quad (6)$$

由贝叶斯定理, 联合后验分布为

$$\pi_J(\theta|x) \propto L(\theta|x, \beta) \pi_J(\theta) \propto \theta^n e^{-\theta S} \frac{1}{\theta} = \theta^{n-1} e^{-\theta S} \quad (7)$$

采用平方损失函数 $L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$, 则参数 θ 的贝叶斯估计量为

$$\hat{\theta}_{\text{Bayes}, J} = E(\theta|x) = \frac{\int_0^\infty \theta \cdot L(\theta|S) \cdot \pi_J(\theta) d\theta}{\int_0^\infty L(\theta|S) \cdot \pi_J(\theta) d\theta} \quad (8)$$

将似然函数(5)与后验分布(7)代入式(8)可得

$$\hat{\theta}_{\text{Bayes}, J} = \frac{\int_0^\infty \theta \cdot \theta^n e^{-S\theta} \cdot \theta^{-1} d\theta}{\int_0^\infty \theta^n e^{-S\theta} \cdot \theta^{-1} d\theta} = \frac{\int_0^\infty \theta^n e^{-S\theta} d\theta}{\int_0^\infty \theta^{n-1} e^{-S\theta} d\theta} = \frac{\Gamma(n+1)/S^{n+1}}{\Gamma(n)/S^n} = \frac{n}{S}$$

对应参数 η 的估计量为

$$\hat{\eta}_{\text{Bayes}, J} = \left(\frac{n}{S}\right)^{-1/\beta_0} \quad (9)$$

由上式可知, 在无信息先验与平方损失函数下, 贝叶斯点估计与极大似然估计一致。

2.3.2. 共轭先验

由式(5)可知, Weibull 分布关于参数 θ 的似然函数与 Gamma 分布具有相同的核, 因此取其共轭先验为 Gamma 分布:

$$\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \tau),$$

其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\tau\theta}, \quad \theta > 0$$

其中 $\alpha > 0, \tau > 0$ 为预先给定的超参数。当缺乏精确的先验信息时, 可采用弱信息先验, 取 $\alpha=1, \tau=1$, 此时先验分布 $\theta \sim \text{Gamma}(1,1)$ 等价于均值为 1、方差为 1 的指数分布, 先验信息较弱。

由贝叶斯定理, 联合后验分布为

$$\pi(\theta|x) = \frac{L(\theta|x, \beta) \cdot \pi(\theta)}{\int_0^\infty L(\theta|x, \beta) \cdot \pi(\theta) d\theta} \quad (10)$$

采用平方损失函数 $L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$, 则参数 θ 的贝叶斯估计量为

$$\hat{\theta}_{\text{Bayes}} = E(\theta | x) = \int_0^{\infty} \theta \cdot \pi(\theta | x) d\theta \quad (11)$$

将似然函数(5)与后验分布(10)代入式(11)可得

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{Bayes}} &= \frac{\int_0^{\infty} \theta L(\theta | x, \beta) \cdot \pi(\theta) d\theta}{\int_0^{\infty} L(\theta | x, \beta) \cdot \pi(\theta) d\theta} \\ &= \frac{\int_0^{\infty} \theta^{(n+\alpha+1)-1} e^{-\theta(S+\tau)} d\theta}{\int_0^{\infty} \theta^{(n+\alpha)-1} e^{-\theta(S+\tau)} d\theta} \end{aligned} \quad (12)$$

对分子, 令 $a = n + \alpha + 1, b = S + \tau$, 可得

$$\int_0^{\infty} \theta^{(n+\alpha+1)-1} e^{-\theta(S+\tau)} d\theta = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(S+\tau)^{n+\alpha+1}} \quad (13)$$

对分母, 令 $a = n + \alpha, b = S + \tau$, 可得

$$\int_0^{\infty} \theta^{(n+\alpha)-1} e^{-\theta(S+\tau)} d\theta = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(S+\tau)^{n+\alpha}} \quad (14)$$

将式(13)和(14)代入式(12)可得

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{Bayes}} &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(S+\tau)^{n+\alpha+1}} \cdot \frac{(S+\tau)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \cdot \frac{1}{S+\tau} \\ &= \frac{n+\alpha}{S+\tau} \end{aligned}$$

对应参数 η 的估计量为

$$\hat{\eta}_{\text{Bayes}} = \left(\hat{\theta}_{\text{Bayes}} \right)^{-1/\beta} = \left(\frac{n+\alpha}{S+\tau} \right)^{-1/\beta} \quad (15)$$

3. 数值模拟

为了评估贝叶斯方法在小样本条件下的有限样本条件, 本文使用蒙特卡洛数值模拟, 对第二章的极大似然估计(MLE)与第三章所属的两种贝叶斯估计——无信息先验下的贝叶斯估计(Bayes, J)和共轭先验下的贝叶斯估计(Bayes), 进行点估计性能比较。通过在不同样本量、不同参数真值组合下计算均方误差(MSE)与偏差(Bias), 验证贝叶斯估计在小样本可靠性评估中的有效性与稳健性。

本文选取两组 Weibull 分布参数真值:

- 1) 场景 A: 形状参数 $\beta_0 = 0.8$, 尺度参数 $\eta_0 = 50$ 。此时失效率递减, 模拟电子产品早期失效阶段。超参数取 $\alpha_0 = 1, \tau_0 = 23$
- 2) 场景 B: 形状参数 $\beta_0 = 2.0$, 尺度参数 $\eta_0 = 100$ 。此时失效率递增, 模拟机械部件磨损老化阶段。超参数取 $\alpha_0 = 1, \tau_0 = 10000$

为考察小样本条件下各方法的估计性能, 设定三种样本量水平: $n = 5, 10, 20$, 分别代表极端小样本、较小样本和接近中等样本的情形。每种参数组合下独立重复模拟 1000 次。模拟结果见表 1 和表 2。

Table 1. Maximum likelihood estimation of the scaling parameter, Bayesian estimation without information prior, and Bayesian estimation with conjugate prior (Scenario A)**表 1.** 尺度参数的极大似然估计、无信息先验下的贝叶斯估计、共轭先验下的贝叶斯估计(场景 A)

样本量	评价指标	MLE	Bayes, J	Bayes
5	MSE	800.68	800.68	553.85
5	Bias	0.78	0.78	0.49
10	MSE	387.15	387.15	319.93
10	Bias	-0.44	-0.44	-0.43
20	MSE	195.04	195.04	176.88
20	Bias	-0.35	-0.35	-0.33

Table 2. Maximum likelihood estimation of the scaling parameter, Bayesian estimation without information prior, and Bayesian estimation with conjugate prior (Scenario B)**表 2.** 尺度参数的极大似然估计、无信息先验下的贝叶斯估计、共轭先验下的贝叶斯估计(场景 B)

样本量	评价指标	MLE	Bayes, J	Bayes
5	MSE	461.70	461.70	313.16
5	Bias	-2.78	-2.78	-1.96
10	MSE	241.8	241.8	198.42
10	Bias	-0.78	-0.78	-0.61
20	MSE	122.6	122.6	111.06
20	Bias	-0.37	-0.37	-0.33

从表 1 和表 2 中可得到以下结论：

- 1) 无信息先验贝叶斯估计与极大似然估计的等价性。在所有参数组合下，Bayes 的 MSE 与 Bias 均与 MLE 完全一致。这验证了第 3.2 节的理论结论：在无信息先验 $\pi_j(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$ 与平方损失函数下，贝叶斯点估计与极大似然估计等价。
- 2) 共轭先验贝叶斯估计具有精度优势。在场景 A 和场景 B 中，共轭先验贝叶斯估计的 MSE 和 Bias 都相对较小，表明共轭先验通过引入合理的先验信息，在小样本条件下能够有效降低估计的均方误差，且样本量越小，提升幅度越显著。
- 3) 样本量对估计精度的影响。随着样本量从 5 增加到 20，所有方法的 MSE 均呈现显著下降趋势。这表明样本量的增加能够为参数估计提供更多的数据信息，从而有效提升估计精度。
- 4) 参数真值的影响。对比场景 A 与场景 B，各方法的 MSE 在场景 B 中均显著增大，这符合 MSE 随参数量级增大而增大的统计规律。从相对误差角度观察，两种场景下各方法的相对表现基本一致，说明本文的结论对不同参数量级具有稳健性。
- 5) 偏差来源：似然函数的有偏性，Weibull 分布的形状参数的极大似然估计在小样本下是有偏的，贝叶斯估计虽引入先验，但若先验不能有效修正这种偏性，则偏差会部分保留；先验分布与真实参数的不匹配，当选择的先验与真实参数不符时，后验均值会产生系统性偏移。
- 6) 先验的选择：利用历史数据或专家经验构建经验贝叶斯先验；当缺乏具体经验时，可采用弱信息先验；完全无任何背景信息时，可使用无信息先验。

参考文献

- [1] 宋云麒, 董伟, 薛刚, 等. 基于 Weibull 和 Gamma 随机分布的盐冻作用下风积沙混凝土可靠度分析[J/OL]. 材料导报: 1-14. <https://link.cnki.net/urlid/50.1078.TB.20260529.1011.002>, 2026-07-24.
- [2] 朱聪聪, 崔俊佳, 李光耀, 等. 基于 Weibull 分布的铝/镁异种金属电磁脉冲焊接接头疲劳寿命研究[J]. 机械工程学报, 2026, 62(10): 189-197.
- [3] 宫琦, 任明锐, 邹志超. 基于虚拟增广理论的小样本可靠性参数估计方法[J]. 大连交通大学学报, 2026, 47(3): 127-133.
- [4] 孔祥芬, 刘敬赞, 王杰, 等. LSSVM 算法下飞机 IDG 小样本数据可靠性分析[J]. 机械设计与制造, 2023(1): 17-21+25.
- [5] 张震, 刘俭辉, 赵成, 等. 基于 Bootstrap 的小样本可靠性评估方法[J]. 兰州理工大学学报, 2022, 48(1): 39-44.
- [6] 赵爱红, 岳德权. 小样本下离散广义逆威布尔分布的可靠性统计分析[J]. 统计理论与实践, 2021(5): 8-13.
- [7] 晏宁, 毛志雄, 李英, 等. 小样本数据潜变量建模: 贝叶斯估计的应用[J]. 中国体育科技, 2018, 54(6): 52-58.
- [8] 王晶晶, 孙志绚, 周超. 基于 Weibull 分布的电磁继电器可靠性评估与分析[J]. 机电信息, 2025(14): 78-83.
- [9] 程静, 周菊玲. Weibull 分布尺度参数变点的模型估计[J]. 河南科学, 2022, 40(3): 345-349.