Statistics and Application 统计学与应用, 2026, 15(11), 101-107
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2026.1511248

Hans汉斯

Bergman空间上卷积形Toeplitz算子

樊芦萱

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2026年10月10日；录用日期：2026年11月1日；发布日期：2026年11月11日

摘　要

Bergman空间上Toeplitz算子是函数空间算子理论的重要研究对象。本文主要研究Bergman空间上卷积形Toeplitz算子的代数性质。首先给出该卷积形Toeplitz算子有界性的条件，借助积分三角不等式、圆盘自同构导数公式、变量替换以及柯西–施瓦茨不等式完成定理的充分性与必要性证明。其次利用Bergman空间的标准正交基，结合几何级数展开、幂级数分解与空间正交关系，推导得到卷积形Toeplitz算子的矩阵元表达式，证明该算子在标准正交基下为下三角矩阵，主对角线元素为常数，并给出不同阶数下算子矩阵的具体实例。相关结果有助于进一步理解卷积形Toeplitz算子的结构特征，丰富Bergman空间上算子理论的研究内容。

关键词

Bergman空间，卷积形Toeplitz算子，有界性，矩阵表示

Algebraic Properties of Convolution-Form Toeplitz Operators on the Bergman Space

Luxuan Fan

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: October 10, 2026; accepted: November 1, 2026; published: November 11, 2026

Abstract

Toeplitz operators on Bergman spaces constitute an important research subject in operator theory of function spaces. This paper mainly investigates the algebraic properties of convolution-type Toeplitz operators on Bergman spaces. First, the condition for the boundedness of such convolution-type Toeplitz operators is established. The necessity and sufficiency of the theorem are proved by means of the integral triangle inequality, derivative formula for disk automorphisms, variable substitution and the Cauchy-Schwarz inequality. Second, based on the orthonormal basis of the

文章引用: 樊芦萱. Bergman 空间上卷积形 Toeplitz 算子[J]. 统计学与应用, 2026, 15(11): 101-107.
DOI: 10.12677/sa.2026.1511248

Bergman space, combined with geometric series expansion, power-series decomposition and orthogonality relations of the space, the expression for matrix elements of convolution-type Toeplitz operators is derived. It is shown that the operator admits a lower-triangular matrix representation with constant main-diagonal entries under the standard orthonormal basis, and concrete examples of operator matrices of different orders are presented. The obtained results contribute to further understanding the structural features of convolution-type Toeplitz operators and enrich the research of operator theory on Bergman spaces.

Keywords

Bergman Space, Convolution-Type Toeplitz Operator, Boundedness, Matrix Representation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

算子理论是泛函分析的重要研究分支，而 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的结构与代数性质，一直是复分析领域备受关注的研究课题。Bergman 空间与 Toeplitz 算子的基础理论可参见文献[1]。Bergman 空间是复分析与算子理论交叉研究的核心载体。刻画该空间上乘法算子的各类性质，长期以来都是该领域经典研究课题。在传统 Bergman 空间框架下，乘法主要采用“逐点相乘”模式；该模式虽然结构直观，但难以兼顾非局部关联的刻画与运算灵活性。现有关于 Bergman 空间上算子的研究，大多围绕固定加权复合算子和普通 Toeplitz 算子以及调和符号的可交换算子对展开，见文献[2]。鲜有文献结合 Möbius 变换来构造卷积形 Toeplitz 算子。其中，文献[2]系统梳理了 Bergman 空间上加权复合算子的经典研究成果；文献[3]运用局部化方法研究 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的局部谱与 Fredholm 性质，给出拟换位子紧性以及 Fredholm 算子的充分判别条件，介绍了 Toeplitz 算子的性质。文献[4]讨论 Bergman 空间上算子的矩阵结构，基于正交基和再生核计算算子矩阵元，探究三角型算子矩阵特征，为本文卷积形 Toeplitz 算子矩阵元的推导提供方法参考。Axler 在文献[5]中首次揭示了 Bergman 空间与 Bloch 空间上乘法算子的基本交换关系；刘朝晖等人在文献[6]整理了复合 Toeplitz 算子复对称性方向的最新研究进展。与此同时，Möbius 自映射所具备的共形和可逆几何优势，以此优化乘法算子的结构构造。经典卷积的定义参见文献[7]。实直线 $\mathbb{R}$ 上的经典卷积形式定义为

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

该卷积依托整个实轴上的一维 Lebesgue 积分，采用简单的实平移变换 $t-\tau$；对参与运算的可积函数没有解析性约束，不含加权核因子、正交投影以及额外可变参数，是任意两个可积函数之间的双线性运算。传统卷积运算在 L^2 空间上不具备闭性：两个平方可积函数的乘积属于 L^1，而不属于 L^2。本文提出的新型卷积定义在开单位圆盘的 Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 上，表达式为

$$\left(A_f g\right)(z) = P(f * g)(z) = P\left(f \cdot (g \circ \varphi_z)\right)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w) g\left(\varphi_z(w)\right)}{(1-z\bar{w})^2}\mathrm{d}A(w),$$

对任意 $g \in L_a^2(\mathbb{D})$ 成立。其中 P 是从 $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A)$ 到 Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 的正交投影；积分采用圆盘上二维面积 Lebesgue 测度；用圆盘 Möbius 自映射 $\varphi_z(w)$ 替换实平移；引入 Bergman 再生核权因子 $\frac{1}{(1-\bar{z}w)^2}$，

同时借助正交投影 P 保证输出函数的解析性；再借助 Möbius 变换由此得到卷积形 Toeplitz 算子 $A_f:L^2(\mathbb{D})\to L_a^2(\mathbb{D})$。它与实直线上的卷积有着本质区别，为研究再生核 Hilbert 空间上 Toeplitz 算子提供了一套全新的卷积研究框架。

设 $\mathbb{D}\subset\mathbb{C}$ 为复平面上的有界开区域，$\mathrm{d}A(z)=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 表示 $\mathbb{D}$ 上的二维 Lebesgue 面积测度。在此测度框架下，平方可积函数空间 $L^2(\mathbb{D})$ 定义为 $\mathbb{D}$ 上全体复值可测函数构成的线性空间，且满足积分条件：

$$\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2\,\mathrm{d}A(z)<\infty.$$

在 $L^2(\mathbb{D})$ 上可以定义内积

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{D}}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}A(z)$$

以及对应的标准 L^2 范数

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}=\left(\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2\,\mathrm{d}A(z)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

该内积与范数使 $L^2(\mathbb{D})$ 成为可分完备 Hilbert 空间。值得注意的是，$L^2(\mathbb{D})$ 仅对函数施加平方可积条件，没有解析性和连续性或者有界性的附加要求。因此 $L^2(\mathbb{D})$ 中包含大量非解析函数、复共轭函数以及不规则可测函数；点赋值映射 $f\mapsto f(\zeta)$ 并不是 $L^2(\mathbb{D})$ 上的有界线性泛函。与之相对，解析平方可积函数空间 $L_a^2(\mathbb{D})$，即经典 Bergman 空间是 $L^2(\mathbb{D})$ 的闭子空间。严格定义 $L_a^2(\mathbb{D})=L^2(\mathbb{D})\cap H(\mathbb{D})$，其中 $H(\mathbb{D})$ 代表 $\mathbb{D}$ 上全体全纯函数构成的空间。$L_a^2(\mathbb{D})$ 中的函数必须同时满足两条核心条件：在 $\mathbb{D}$ 上处处全纯，并且关于面积测度平方可积，即

$$\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2\,\mathrm{d}A(z)<\infty.$$

$L_a^2(\mathbb{D})$ 直接继承 $L^2(\mathbb{D})$ 的内积与范数，本身构成可分 Hilbert 空间。对比一般空间 $L^2(\mathbb{D})$，Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 具备十分关键的良好性质：所有点赋值泛函都是一致有界的连续线性泛函。由 Riesz 表示定理，该空间存在唯一的再生核函数，这也使得 Bergman 空间成为再生核 Hilbert 空间的典型范例。这一结构差异，是定义在 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子和 Hankle 算子等算子理论的重要基础。全文中，Bergman 空间记作 L_a^2，由所有在 $\mathbb{D}$ 上全纯且关于测度 $\mathrm{d}A$ 平方可积的函数组成。L_a^2 是具有再生核的 Hilbert 空间。点 $z\in\mathbb{D}$ 处的再生核为

$$K_z(\omega)=\frac{1}{(1-\bar{z}\omega)^2}=\sum_{j=0}^{\infty}(1+j)\bar{z}^j\omega^j,\quad z,\omega\in\mathbb{D}.$$

对每一个 $z\in\mathbb{D}$，再生核 K_z 满足再生公式

$$f(z)=\langle f,K_z\rangle,\quad f\in L_a^2.$$

基于以上内容，本文受文献[1]给出的基础算子模型启发，创新性地基于卷积定义一类新的乘法运算：

$$L_a^2(\mathbb{D})=\left\{f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}\,|\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2\,\mathrm{d}A(z)<\infty\right\},$$

引入卷积形 Toeplitz 算子

$$\left(A_fg\right)(z)=P\left(f(w)g\left(\varphi_z(w)\right)\right)(z)$$

对任意 $f\in L^2(\mathbb{D})$，任意 $g\in L_a^2(\mathbb{D})$ 成立，其中投影 $P:L^2(\mathbb{D})\to L_a^2(\mathbb{D})$；通过 Möbius 变换实现算子的结构变换与空间适配。单位圆盘上 Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 的正规正交基为 $\left\{e_n(z)=\sqrt{n+1}z^n\right\}_{n=0}^{\infty}$，这组基底

常用于算子矩阵表示的推导。

从算子构造上来看，卷积形 Toeplitz 算子与经典 Bergman 空间 Toeplitz 算子、加权复合算子既有内在联系又存在本质差异。三者同属 Bergman 空间上重要的线性算子对象，卷积形 Toeplitz 算子与经典 Toeplitz 算子均引入 Bergman 正交投影，保障算子作用后在解析的 Bergman 空间，卷积形 Toeplitz 算子与复合算子都充分利用单位圆盘 Möbius 自同构作为几何变换工具。但经典 Toeplitz 算子的核心是符号与函数逐点相乘后再投影，属于点态局部运算，矩阵具有传统 Toeplitz 矩阵斜对角线元素相等的特征；复合算子与加权复合算子依靠自变量替换完成函数复合，不涉及全域积分运算，一般不呈现规整的三角矩阵结构；而卷积形 Toeplitz 算子以 Möbius 变换改造的二维面积积分卷积为核心，体现非局部的积分叠加效应，正交投影用于修正普通卷积带来的非解析问题，最终在 Bergman 空间标准正交基下表现为主对角线为常数的下三角矩阵，其符号参与积分核的构建，不再是简单的逐点乘法作用。

在关联问题层面，该卷积形 Toeplitz 算子主要具备数学理论层面的研究价值，暂无直接对应的成熟物理模型。数学上它可以视作单位圆盘有界对称域框架下一类经过再生核、正交投影修正的扭曲群卷积，和非交换调和分析、再生核 Hilbert 空间的积分算子理论密切相关，同时它给出了一类矩阵元可显式计算的下三角算子实例，能够为算子谱性质、换位子、Schatten 类条件等命题的检验提供具体范例；虽然实卷积广泛应用于信号处理与量子力学，但该算子是复分析方向的纯数学构造，并非针对特定物理现象建模，仅在理论层面存在潜在的联系，未来或许可以在圆盘相空间的非交换量子化相关研究中作为测试模型使用。本文借助单位圆盘的 Möbius 自同构，构造一类全新卷积形 Toeplitz 算子。和不带投影修正的实值卷积不同，本文提出的卷积形 Toeplitz 算子融入 Bergman 再生核与正交投影算子，为再生核 Hilbert 空间上算子的研究开辟了新的研究框架。

2. 卷积形 Toeplitz 算子的有界性

有界性是算子理论中最基础的性质，也是进一步研究算子自伴性和紧性的代数结构等问题的前提。在 Bergman 空间框架下，Toeplitz 算子的有界性刻画长期受到学者关注。本节将针对前文所定义的卷积形 Toeplitz 算子开展讨论，推导该算子有界的条件。

定理 2.1. 对任意 $f \in L^{\infty}(\mathbb{D})$，若存在常数 $C>0$，满足

$$\left|f(w)\right| \le C \frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{|1-\bar{z}w|^2}, \quad \forall z,w \in \mathbb{D}.$$

则算子 A_f 有界。

证明。

对任意 $g \in L_a^2(D)$，有

$$\left\|A_f(g)\right\|^2 = \int_D \left|f(w)g\left(\varphi_z(w)\right)\right|^2 \mathrm{d}A(w) \le \int_D \left|f(w)\right|^2 \left|g\left(\varphi_z(w)\right)\right|^2 \mathrm{d}A(w).$$

令 $u=\varphi_z(w)$，则 $w=\varphi_z^{-1}(u)$，代入得

$$\left\|A_f(g)\right\|^2 = \int_D \left|g(u)\right|^2 \left|f\left(\varphi_z^{-1}(u)\right)\right|^2 \left|\left(\varphi_z^{-1}\right)'(u)\right|^2 \mathrm{d}A(u).$$

记 $W(u)=\left|f\left(\varphi_z^{-1}(u)\right)\right|^2\left|\left(\varphi_z^{-1}\right)'(u)\right|^2$，我们需要验证 $\sup_{u\in D} W(u)<\infty$。

令 $w=\varphi_z(u)$，则

$$\sup_{w\in D}\left|f(w)\right|^2\left|\left(\varphi_z^{-1}\right)'\left(\varphi_z(w)\right)\right|^2<\infty.$$

注意到$\left(\varphi_z^{-1}\right)'\left(\varphi_z(w)\right)=\dfrac{1}{\varphi_{z'}(w)}$，上式等价于$\sup_{w\in D}\dfrac{\left|f(w)\right|^2}{\left|\varphi_{z'}(w)\right|^2}<\infty$，

即存在常数$C>0$，使得

$$\left|f(w)\right|\le C\left|\varphi_z'(w)\right|,\quad \forall w\in D.$$

此时

$$\int_D\left|f(w)\right|^2\left|g\left(\varphi_z(w)\right)\right|^2\mathrm{d}A(w)\le C\int_D\left|g(w)\right|^2\mathrm{d}A(w).$$

对任意$g\in L_a^2(\mathbb{D})$，由算子定义

$$\left\|A_fg\right\|^2=\int_{\mathbb{D}}\left|\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)g\left(\varphi_z(w)\right)}{(1-z\overline{w})^2}\mathrm{d}A(w)\right|^2\mathrm{d}A(z).$$

利用积分三角不等式：

$$\left|\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)g\left(\varphi_z(w)\right)}{(1-z\overline{w})^2}\mathrm{d}A(w)\right|\le\int_{\mathbb{D}}\frac{\left|f(w)\right|\cdot\left|g\left(\varphi_z(w)\right)\right|}{\left|1-z\overline{w}\right|^2}\mathrm{d}A(w).$$

代入条件$\left|f(w)\right|\le C\dfrac{\left(1-|z|^2\right)^2}{\left|1-\overline{z}w\right|^2}$，再利用圆盘自同构导数公式

$$\left|\varphi_{z'}(w)\right|^2=\frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{\left|1-\overline{z}w\right|^4},$$

得到

$$\int_{\mathbb{D}}\frac{\left|f(w)\right|\cdot\left|g\left(\varphi_z(w)\right)\right|}{\left|1-z\overline{w}\right|^2}\mathrm{d}A(w)\le C\int_{\mathbb{D}}\left|g\left(\varphi_z(w)\right)\right|\left|\varphi_{z'}(w)\right|^2\mathrm{d}A(w).$$

作变量替换$u=\varphi_z(w)$，面积测度变换给出

$$\int_{\mathbb{D}}\left|g\left(\varphi_z(w)\right)\right|\left|\varphi_{z'}(w)\right|^2\mathrm{d}A(w)=\int_{\mathbb{D}}\left|g(u)\right|\mathrm{d}A(u).$$

由柯西－施瓦茨不等式

$$\int_{\mathbb{D}}\left|g(u)\right|\mathrm{d}A(u)\le\sqrt{\pi}\left\|g\right\|,$$

于是

$$\left\|A_fg\right\|^2\le C^2\int_{\mathbb{D}}\left(\sqrt{\pi}\left\|g\right\|\right)^2\mathrm{d}A(z)=C^2\pi^2\left\|g\right\|^2.$$

因此

$$\left\|A_fg\right\|\le C\pi\left\|g\right\|,$$

即A_f在$L_a^2(\mathbb{D})$上有界。

$$\left\|A_f(g)\right\|^2\le C\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}\left|g(u)\right|^2\mathrm{d}A(u)\mathrm{d}A(z)=C\left\|g\right\|^2\cdot\pi=C\left\|g\right\|^2.$$

3. 卷积形 Toeplitz 算子的矩阵形式

当令符号函数 $f(z)=1$ 时，算子 A_f 的矩阵元由下式给出，

$$\left\langle A_f(e_m), e_n \right\rangle = \sqrt{(m+1)(n+1)}\int_{\mathbb{D}} \left(\varphi_z(w)\right)^m \overline{w}^n \mathrm{d}A(w).$$

利用 $|\overline{z}w|<1$ 时的几何级数展开，

$$\frac{1}{1-\overline{z}w} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{z}^k w^k,$$

将圆盘自同构 $\varphi_z(w)$ 展开：

$$\begin{aligned}\varphi_z(w) &= \frac{z-w}{1-\overline{z}w} = (z-w)\sum_{k=0}^{\infty}\overline{z}^k w^k, \\ &= z + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|z|^2-1\right)\overline{z}^{k-1}w^k.\end{aligned}$$

将 $\varphi_z(w)$ 表示为关于 w 的幂级数，

$$\varphi_z(w) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p w^p,$$

其中

$$c_0 = z, \quad c_p = \left(|z|^2-1\right)\overline{z}^{p-1} \quad (p \geq 1).$$

于是

$$\left(\varphi_z(w)\right)^m = \left(\sum_{p=0}^{\infty} c_p w^p\right)^m = \sum_{q=0}^{\infty} d_{m,q} w^q,$$

其中 $d_{m,q}$ 是 w^q 的系数，由多项式展开系数确定。

系数 $d_{m,q}$ 由多重项展开公式给出，

$$d_{m,q} = \sum_{\substack{\alpha_0+\alpha_1+\cdots=m \\ 0\cdot\alpha_0+1\cdot\alpha_1+\cdots+p\cdot\alpha_p=q}} \frac{m!}{\alpha_0!\alpha_1!\cdots\alpha_p!\cdots} c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1}\cdots.$$

其代入内积公式，并利用 Bergman 空间的正交关系，

$$\int_{\mathbb{D}} w^q \overline{w}^n \mathrm{d}A(w) = \delta_{q,n}\cdot\frac{1}{n+1},$$

可得算子矩阵元

$$\left\langle A_f(e_m), e_n \right\rangle = \sqrt{(m+1)(n+1)}\cdot d_{m,n}\cdot\frac{1}{n+1} = \sqrt{\frac{m+1}{n+1}}\cdot d_{m,n}.$$

该算子的矩阵表示为下三角矩阵，主对角线元素均为常数 z；当 $i>j\geq 0$ 时，

$$a_{ij} = \frac{\sqrt{j+1}\left(|z|^2-1\right)\overline{z}^{\,i-j-1}}{\sqrt{i+1}}.$$

接下来给出矩阵表示的具体形式，

算子 A_f 的 2×2 矩阵表示：

对于符号函数 $f(z)=1$，算子 A_f 在标准正交基 $\left\{e_0(z)=1, e_1(z)=\sqrt{2}z\right\}$ 下的 2×2 矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}_{ij}=\begin{pmatrix} z & 0 \\ \dfrac{|z|^2-1}{\sqrt{2}} & z \end{pmatrix}.$$

算子 A_f 的 3×3 矩阵表示：

对于符号函数 $f(z)=1$，算子 A_f 在标准正交基 $\left\{e_0(z)=1, e_1(z)=\sqrt{2}z, e_2(z)=\sqrt{3}z^2\right\}$ 下的 3×3 矩阵表示为

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ \dfrac{|z|^2-1}{\sqrt{2}} & z & 0 \\ \dfrac{\left(|z|^2-1\right)\bar{z}}{\sqrt{3}} & \dfrac{\sqrt{2}\left(|z|^2-1\right)}{\sqrt{3}} & z \end{pmatrix}.$$

算子 A_f 的 $n\times n$ 矩阵表示：

对于符号函数 $f(z)=1$，算子 A_f 在标准正交基 $\left\{e_k(z)=\sqrt{k+1}z^k\right\}_{k=0}^{n-1}$ 下的 $n\times n$ 矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}_{ij}=\begin{pmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{|z|^2-1}{\sqrt{2}} & z & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\left(|z|^2-1\right)\bar{z}}{\sqrt{3}} & \dfrac{\sqrt{2}\left(|z|^2-1\right)}{\sqrt{3}} & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\left(|z|^2-1\right)\bar{z}^{n-2}}{\sqrt{n}} & \dfrac{\sqrt{2}\left(|z|^2-1\right)\bar{z}^{n-3}}{\sqrt{n}} & \cdots & \dfrac{\sqrt{n-1}\left(|z|^2-1\right)}{\sqrt{n}} & z \end{pmatrix}.$$

其中 $z\in\mathbb{D}$ 是固定参数。

参考文献

[1] Zhu, K. (2007). Operator Theory in Function Spaces. 2nd Edition, American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/surv/138

[2] 胡睿, 刘丽君, 赵显锋. Bergman 空间上的加权复合算子[J]. 中国科学: 数学, 2025, 55(10): 1855-1866.

[3] 卢玉峰, 孙善利. Bergman 空间上 Toeplitz 算子的局部及 Fredholm 性质[J]. 数学学报, 1997, (5): 56-61.

[4] Padhy, C., Jena, P. and Paikray, S.K. (2022) Operator Matrices on the Bergman Space. *Filomat*, **36**, 3311-3320. https://doi.org/10.2298/fil2210311p

[5] Axler, S. and Čučković, Ž. (1991) Commuting Toeplitz Operators with Harmonic Symbols. *Integral Equations and Operator Theory*, **14**, 1-12. https://doi.org/10.1007/bf01194925

[6] Shu, Y.L. and Zhao, X.F. (2016) Positivity of Toeplitz Operators on Harmonic Bergman Space. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **32**, 175-186. https://doi.org/10.1007/s10114-016-5138-7

[7] 张元林. 积分变换[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社 2003: 39-51.