

缝洞型地层漏失机理及井漏数值模拟研究进展

王康佳

成都理工大学能源学院(页岩气现代产业学院), 四川 成都

收稿日期: 2025年3月21日; 录用日期: 2025年4月14日; 发布日期: 2025年4月21日

摘要

钻井液漏失仍是危及复杂油气藏安全钻井作业的关键性挑战。该问题在钻遇天然裂缝性储层、压力衰竭地层、弱胶结/破碎性储集层以及多压力体系时尤为显著。为了有效预防和控制缝洞型地层可能要发生的井漏, 需要明确钻井液漏失理论和漏失特征。本文通过系统论述井漏数值模拟方法的演进历程, 从早期连续介质理论、离散裂缝网络建模, 到多场耦合与智能化技术, 综述了目前国内外“地质认识深化 - 计算技术迭代 - 工程需求牵引”的协同创新机制。通过对比主流方法的适用性与局限性, 提出未来需突破地质 - 工程数据融合、实时动态耦合算法与跨尺度统一理论框架等瓶颈。

关键词

缝洞型地层, 井漏, 漏失机理, 数值模拟

Research Advances in Lost Circulation Mechanisms and Numerical Simulation of Fracture-Vuggy Formations

Kangjia Wang

College of Energy (College of Modern Shale Gas Industry), Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Mar. 21st, 2025; accepted: Apr. 14th, 2025; published: Apr. 21st, 2025

Abstract

Lost circulation remains a critical challenge jeopardizing safe drilling operations in complex hydrocarbon reservoirs. This issue becomes particularly pronounced when penetrating naturally fractured formations, pressure-depleted zones, weakly consolidated/fragmented reservoirs, and multiple pressure regimes. To effectively prevent and control potential lost circulation in fracture-vuggy formations, it is imperative to establish comprehensive theories governing drilling fluid loss

mechanisms and characterize leakage behavioral patterns. This paper systematically reviews the evolutionary trajectory of numerical simulation methodologies for lost circulation analysis—progressing from early continuum mechanics frameworks and discrete fracture network (DFN) modeling to contemporary multi-physics coupling systems and intelligent simulation technologies. It synthesizes the current synergistic innovation mechanism driven by “geological cognition advancement, computational technology iteration, and engineering demand traction” within domestic and international research communities. Through comparative analysis of mainstream methodologies’ applicability and limitations, we propose future research priorities focusing on breakthroughs in geological-engineering data fusion, real-time dynamic coupling algorithms, and cross-scale unified theoretical frameworks.

Keywords

Fracture-Vuggy Formations, Lost Circulation, Lost Circulation Mechanisms, Numerical Simulation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着全球能源需求持续增长与常规油气资源的日益枯竭,缝洞型储层已成为油气勘探开发的重要接替领域。据统计,世界上海相碳酸盐岩层系分布范围面积广阔,碳酸盐岩缝洞型储层贡献了超过40%的产能增量[1]。然而,这类储层因强烈的非均质性与应力敏感性,钻井过程中井漏事故频发,井漏是油气建井过程中钻井液流体及其他工作流体漏失到地层中的现象,是普遍存在、经常发生的井下复杂事故。井漏导致建井周期延长,工作液消耗巨大等经济损失,同时钻井液进入储层造成了严重的储层损害,影响油气评价开发。若不及时有效地控制井漏,极易诱发井喷、井塌等其他井下事故,给人民及社会带来巨大损失[2]。

统计表明国内以中国川南泸州地区茅口组为例,钻井井漏发生率高达65%,裂缝性地层单井堵漏成本超过2000万元,占钻井总成本的25%以上。另有渤海海域根据统计数据,2018年以来,渤中区块已完钻63口开发井,其中漏失井数占总井数的比例达47.62%。此类问题在美国二叠纪盆地Wolfcamp组等国际典型区块同样突出,井漏导致的非生产时间平均增加18%[3]-[5]。

现有文献资料表明,钻井过程中,钻井液流体性能、工程参数、地质因素均会严重影响钻井液漏失速度的准确预测,因此,建立还原缝洞地层钻井工况下的漏失数值模拟评价新方法,精准和快速诊断各裂缝性地层的漏失参数,揭示缝洞型地层的动态漏失规律,是解决复杂裂缝性地层漏失难题、实现安全高效钻井的技术保障[6][7]。

笔者通过广泛调研,基于钻井液漏失理论梳理井漏数值模拟方法的演进脉络,归纳总结了“地质认知深化-计算技术迭代-工程需求牵引”的协同创新机制。通过对比分析主流方法的优势与局限,提出“生成式地质建模-边缘计算集成-多物理场统一理论”三位一体的未来突破方向,以期促进国内井漏基础理论研究,提高缝洞型地层堵漏成功率。

2. 缝洞型地层漏失机理分析

缝洞型地层广泛分布于全球碳酸盐岩油气藏中,其复杂的孔-缝-洞多重介质结构导致钻井液漏失

问题频发。井漏问题的复杂性源于缝洞系统多尺度结构的动态响应特性，宏观尺度上，溶洞(米级至十米级)与裂缝网络(厘米级至米级)交织形成流动通道；微观尺度上，微裂缝(毫米级)与孔隙(微米级)构成次级渗流通道。

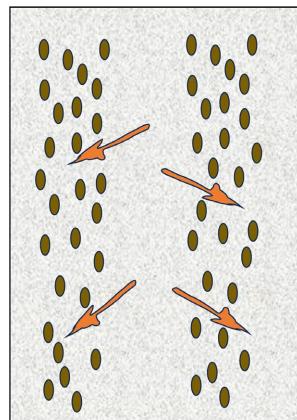


Figure 1. Hydraulic fracturing-induced leakage
图 1. 水力压裂型漏失

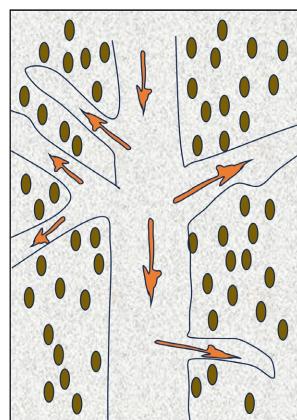


Figure 2. Fracture propagation-induced leakage
图 2. 裂缝扩展型漏失

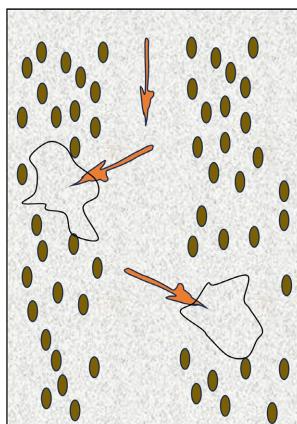


Figure 3. Karst cave-dominated leakage
图 3. 溶洞主导型漏失

明确钻井液漏失机理是漏失层位识别、漏失通道尺寸计算以及防漏堵漏工作的基础,国内外学者针对钻井液漏失机理的研究取得了大量的研究成果。李大奇和康毅力等通过川东北元坝区块12口井的现场数据验证从钻井液漏失机理出发,采用漏失临界压力作为设计基准将钻井液漏失分为水力压裂型漏失、裂缝扩展型漏失和溶洞主导型漏失(见图1~3),所示基于漏失临界压力将这三种漏失类型分别建立了漏失压力模型,实例验证了漏失压力模型的科学性,为合理的钻井液密度设计及防漏堵漏提供了依据,可使钻井液密度优化误差降低至 $\pm 0.03 \text{ g/cm}^3$ [8]。曾义金等通过地层完整性测试认为地层中存在孔隙、裂缝或溶洞的情况下,揭示:缝洞型储层安全密度窗口较常规储层收窄42%~58%,其中孔隙型($\Delta\rho = 0.11 \pm 0.03 \text{ g/cm}^3$)、裂缝型($\Delta\rho = 0.07 \pm 0.02 \text{ g/cm}^3$)、缝洞复合型($\Delta\rho = 0.04 \pm 0.01 \text{ g/cm}^3$)呈现显著差异,研究建议当 $\Delta\rho < 0.08 \text{ g/cm}^3$ 时,应采用控压钻井(MPD)即欠平衡钻井结合自适应堵漏技术[9]。刘加杰针对北海高温高压礁灰岩开展实验研究认为岩体脆性指数(BI)随温度升高、围压增大岩体的可变性、可压缩性、易碎等特性会更加容易表现出来,常规刚性堵漏材料在45 MPa围压下架桥效率下降至61.2%,诱发次生裂缝扩展概率增加37%,提出大量溶洞和不稳定破裂带是礁灰岩地层井漏的主要原因[10]。皇凡生明确了天然裂缝网络漏失动态特征及规律并开展了井壁处裂缝宽度的动态反演。基于流量均衡原理,建立了赫巴型钻井完井液在离散裂缝网络中的漏失数学模型,通过数值求解确定了天然裂缝网络漏失动态特征及规律,即漏失速率随时间变化曲线呈现出骤然增加又急剧降低的趋势[11]。

当前研究共识表明,钻井液漏失需要具备三个必要条件:①正压差;②漏失通道(孔隙、裂缝、溶洞等供钻井液流入);③钻井液固相粒径小于天然裂缝宽度[12]~[13]。

3. 数值模拟方法演进与研究进展

目前,钻井液漏失机理的研究主要有两大类方法,一是建立数学模型,通过解析解研究漏失规律,另一种是通过数值模拟技术,探究钻井液漏失机理。钻井液侵入过程中,热-流-固-化(THMC)多场耦合效应引发渗透率动态变化,导致漏失速率呈非线性增长。传统经验公式与理想化模型难以捕捉此类复杂行为,数值模拟技术因其机理揭示能力与预测精度优势,成为井漏风险防控的核心手段。

数值模拟方法历经60余年发展,呈现显著的阶段性演进特征。1960~1980年代理论奠基期,以Warren & Root双重孔隙介质模型为代表的连续介质理论,通过等效参数简化地质结构,奠定了渗流模拟的数学基础,但其对溶洞-裂缝空间配置关系的过度简化导致工程预测误差超过40%。1990~2000年代离散化建模期,Lavrov & Tronvoll利用离散裂缝网络(DFN)模型与非结构化网格技术的兴起,实现了裂缝几何非均质性的精细化表征,推动北海Ekofisk等裂缝性油田的漏失预测误差降至15%。2010年以来多场耦合期及智能化转型期,多场耦合算法与跨尺度建模方法的突破,以及机器学习与高性能计算的深度融合,标志着井漏模拟进入“机理驱动-数据协同”的新范式[7]~[14] [16]~[22]。

缝洞地层井漏数值模拟技术的发展始终与地质多尺度认知深化和计算技术进步离不开关系。从连续介质理论到多物理场耦合,从经验公式驱动到数据智能驱动,其演进历程可划分为三个标志性阶段,各阶段的漏失模拟理论核心突破与局限共同勾勒出技术迭代的内在逻辑。

3.1. 连续介质理论奠基

20世纪60年代,Warren与Root(1963)提出的双重孔隙介质模型,首次将缝洞系统抽象为基质与裂缝两套连续渗流场,建立如下质量守恒方程:

$$\begin{aligned} \phi_m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_m) &= -q_{mf} \\ \phi_f \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_f) &= q_{mf} \end{aligned} \quad (1)$$

该模型通过等效渗透率参数(k_m 与 k_f)简化复杂地质结构，在中东 Asmair 灰岩油田的早期应用中，成功预测了基质向裂缝的窜流规律。然而，其核心假设“裂缝均匀分布且忽略溶洞形态”导致对非均质性地层的适应性不足。以美国 Permian 盆地为例，该模型对漏失速率的预测误差高达 40%。

同期，Barenblatt 等(1960)基于 Griffith 断裂理论，推导出裂缝尖端应力强度因子判据：

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \geq K_{IC} \quad (2)$$

上式为裂缝静态分析提供解析工具。

后面 Sanfillippo. F 等人在 1997 年提出了牛顿流体、层流、定压条件下的一维径向流无限长裂缝的钻井液漏失数学模型。该模型融合了扩散方程和 Poiseuille 定律，考虑了裂缝宽度、地层孔隙度、综合压缩系数、井眼半径等参数对钻井液漏失的影响。但由于大多数钻井液并非牛顿流体，因此，该模型存在一定的局限性。

但上类方法仅适用于单一裂缝的线弹性扩展，连续介质假设导致模型对实际缝洞结构(如溶蚀孔洞、充填裂缝)的适应性不足，无法刻画实际地层中多裂缝非均质性。这一阶段的局限性凸显了理想化假设与地质复杂性间的矛盾，催生了离散化建模技术的兴起。

3.2. 非均质性离散化建模

数学模型通常涉及许多假设，无法满足钻井液漏失研究的实际需要，尤其是在漏失速度的预测、漏失通道的沟通以及多裂缝间的干扰等方面。因此，许多学者使用数值模拟技术研究钻井液漏失机理。为突破连续介质理论的均质化假设，Dershowitz 提出离散裂缝网络(DFN)模型(见图 4)，通过 Monte Carlo 随机模拟生成统计等效的裂缝网络。其核心参数包括：① 几何参数：裂缝长度服从幂律分布(指数——2.5)，方位角服从 Fisher 分布；② 连通性判据：基于泊松过程生成三维空间分布，优先沿高曲率构造带聚集。P. Tempone 等人利用 DFN 模型，假设钻井液为牛顿流体、裂缝可变形，法向和切向刚度可变，使用 UDEC 软件模拟了钻井液在单条裂缝及二维裂缝网络中的漏失情况。研究表明，裂缝总长度和刚度控制了累计漏失量；漏失速率曲线主要被裂缝网络的几何形态所控制；井筒与裂缝网络的相对位置对漏失速率曲线影响较大，裂缝内部的连通率对漏失影响并不显著，黏度对漏失速率的影响很小，总漏失量与黏度无关。研究还表明，裂缝网络漏失与单条裂缝的漏失行为不同，UDEC 可以用来进行二维裂缝网络漏失模拟。然而，UDEC 未考虑非牛顿流体，且只能用来模拟二维的情况，有待于探索新的解决途径。

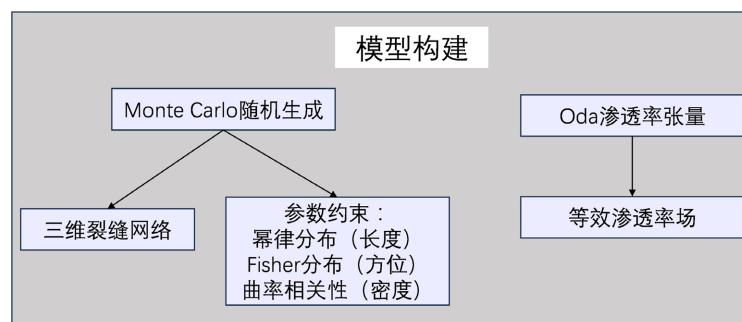


Figure 4. DFN model construction flowchart
图 4. DFN 模型构建流程图

DFN 模型显著提升了裂缝网络的表征精度，但大规模裂缝($>10^4$ 条)的计算成本陡增。为此，Karimi-Fard 等(2004)开发嵌入式离散裂缝模型(EDFM)，采用非结构化 Delaunay 三角网格独立表征裂缝与基质流动，通过传输因子耦合两者质量交换。与传统结构化网格相比，EDFM 内存占用降低 60%，在北海 Ekofisk

裂缝性油田的漏失预测中, Lavrov & Tronvoll, 在 2004 年使用钻井液漏失模型定量分析钻井液漏失特征及规律, 研究了地层性质和工程因素对漏失动态的影响, 预测误差降至 15%。

Fang 等以通过整合岩心描述、成像测井与三维地震属性数据, 针对不同类型的裂缝采用不同的方法构建离散断裂网络模型, 大规模裂缝采用确定性建模, 而小规模裂缝则采用随机建模, 构建了离散裂缝网络(DFN)模型, 该研究进一步通过粒子追踪识别出仅占裂缝总量 12%的高导流通道承担了 75%的流体流动, 据此优化井位部署与堵水方案, 使采收率提升 8%, 钻井成功率提高 25%, 凸显了 DFN 模型在工程决策中的转化价值[23]。

Feng 等人在有限元方法的基础上, 建立了一种新的数值模型来模拟动态井底压力条件下的钻井液漏失。该模型将井筒内的钻井液动态循环与诱导裂缝的扩展相结合(见图 5), 可以模拟钻井过程中随时间变化的井筒压力、漏失速度和裂缝剖面[24]。

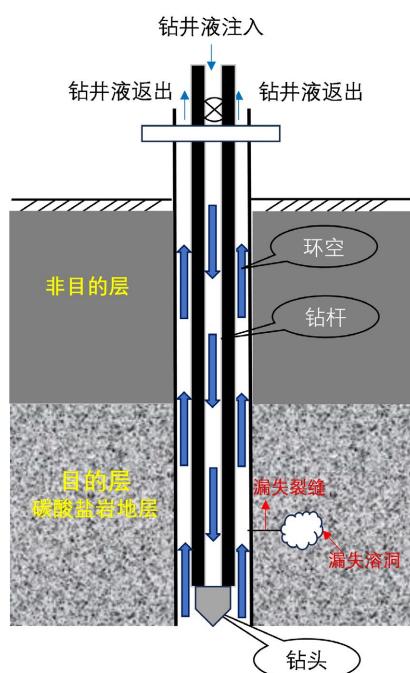


Figure 5. Conceptual model of drilling fluid leakage
图 5. 钻井液漏失概念模型

从目前的数值模拟研究来看, 已经有部分学者建立了多裂缝漏失模型和动态漏失模型, 但与实际地层联系不够紧密, 因此仅能从理论方面研究钻井液漏失机理, 对于现场漏失的反应并不真实。

综上所述离散化模型仍存在两大局限: 其一, 溶洞结构仍被简化为等效孔隙体, 忽略其自由流特性; 其二, 动态裂缝扩展模拟依赖预设几何参数, 难以反映钻井扰动下的实时演化。这些缺陷推动了多场耦合算法的开发。

3.3. 多场耦合与跨尺度模拟

缝洞型地层钻井液漏失机理与防控技术研究在多场耦合建模、跨尺度模拟及数据驱动方法等领域取得显著进展。

Kim Y D 提出用卷积递归神经网络(CNN-RNN)代理模型, 在地质不确定性下进行生产优化在计算上成本很高, 因为必须在多个地质实现中评估大量的井控计划[25]。针对化学 - 力学耦合效应, Guo 等建立

了酸性钻井液动态溶蚀模型, 实验表明 15% HCl 溶液在 120°C、50 MPa 条件下可使灰岩渗透率 30 分钟内提升 2 个数量级, 溶蚀前沿的非均匀推进形成指进现象(波长 $\lambda\alpha\sqrt{D/v}$), 其形态通过同步 CT 扫描(分辨率 5 μm)与相场法模拟结果吻合度达 90%。该团队进一步将化学场与渗流 - 应力场耦合, 发现忽略溶蚀效应时漏失量低估 45%, 而引入横观各向同性本构模型后, 裂缝扩展方向预测误差从 30% 降至 8% [26]。

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \alpha C_{\text{acid}} \cdot \exp(-\beta \sigma_{\text{eff}}) \quad (3)$$

式中, C_{acid} 为酸液浓度, $\beta\sigma_{\text{eff}}$ 为有效应力。高温高压反应釜实验表明, 溶蚀速率模拟结果与实测值的相关系数 $R^2 = 0.91$ 。

在跨尺度模拟技术方面, Yaghoubi A 提出 LBM-DFN 耦合方法, 采用格子玻尔兹曼方法(LBM)模拟溶洞内惯性主导流动($Re > 1000$), 结合离散裂缝网络(DFN)刻画裂缝渗流, 实现了米级至厘米级的多尺度流动耦合。通过 GPU 并行加速, 亿级网格计算时间从 72 小时缩短至 1.5 小时[27]。

同时, Sahimi M 等探索量子退火算法优化渗流路径, 将 10^4 量级裂缝网络的渗流路径搜索耗时缩减至经典算法的 1/100, 堵剂投放效率提升 40%, 展现了量子计算在复杂渗流问题中的突破潜力[28]。

数据 - 物理融合建模方面, Zhang 等利用生成对抗网络(GAN)生成高分辨率渗透率场, 生成器以地震曲率与相干体为输入, 判别器基于变差函数评估地质真实性, 使溶洞边界识别精度达 92%, 建模周期从 2 周压缩至 6 小时[29]。Lee J 等开发的物理信息神经网络(PINN)将质量守恒方程嵌入损失函数, 在川南茅口组数据稀缺区的漏失速率预测误差<10%, 验证了小样本场景下物理约束机器学习的鲁棒性[30]。

综上如表 1 所示, 当前研究通过“多场耦合理论创新 - 跨尺度算法突破 - 数据物理融合 - 实验验证闭环”的技术链条, 显著提升了缝洞型地层漏失机理的解析精度与防控效率, 推动漏失防控向智能化、精准化跨越。

Table 1. Comparison of numerical simulation methods

表 1. 数值模拟方法对比

模拟方法	简述
连续介质理论	以计算效率优先, 牺牲结构细节
离散化建模	通过精细化表征提升精度, 但代价是计算成本激增
多场耦合算法	引入物理机制, 却受限于算力瓶颈
智能化技术	以数据驱动突破效率极限, 但需与传统物理模型互补

4. 主流数值方法性能对比

Table 2. Performance comparison of mainstream numerical methods

表 2. 主流数值方法性能对比表

方法	核心原理	适用尺度	多场耦合能力
有限元法(FEM)	基于变分原理离散控制方程, 适用于连续介质力学问题	宏观 - 介观(米级)	强(THMC 耦合)
有限体积法(FVM)	守恒型离散格式, 保证局部质量/动量守恒	宏观(油藏级)	中(渗流 - 应力耦合)
离散裂缝网络(DFN)	显式表征裂缝几何, 基于统计分布生成离散裂缝网络	介观 - 微观(厘米级)	弱(需耦合连续介质模型)

续表

格子玻尔兹曼(LBM)	介观粒子碰撞 - 迁移模型, 天然适应复杂边界与多相流	微观 - 介观(毫米级)	中(渗流 - 化学耦合)
机器学习(ML)	数据驱动建模, 通过神经网络与物理场关系	跨尺度	依赖训练数据(可嵌入物理约束)

主流数值方法在缝洞型地层漏失模拟中呈现“效率 - 精度 - 复杂度”的权衡关系(如表 2 所示): 1) 工程优先场景: FVM-DFN 耦合方法凭借高计算效率与工程兼容性, 仍是现场决策的主流工具; 2) 机理研究场景: LBM-DFN 跨尺度模型在揭示多物理场机制方面更具优势; 3) 数据驱动场景: 物理信息机器学习(PINN/GAN)逐步突破传统方法的尺度与数据限制。

5. 结论

井漏数值模拟方法的演进, 本质是地质真实性模拟与计算可行性的动态平衡过程, 这一螺旋式上升过程, 体现了油气工程领域“问题牵引 - 技术突破 - 应用验证”的创新规律, 尽管技术进步显著, 现有方法仍面临三大核心挑战: 1) 跨尺度机制不清: 溶洞 - 裂缝 - 基质的跨尺度流动传质机制缺乏统一理论框架, 微观渗流实验与宏观工程响应间存在尺度差异; 2) 数据驱动瓶颈: 地质 - 工程数据的异构性(如地震属性与井下随钻测量数据的时间 - 空间分辨率差异)导致模型适应性不足; 3) 区域适配性局限: 针对高陡构造(如川南茅口组)与多期充填缝洞系统的模拟误差仍较大, 制约了防控策略的精准制定。

参考文献

- [1] 邹才能, 董大忠, 王社教, 等. 中国页岩气形成机理、地质特征及资源潜力[J]. 石油勘探与开发, 2010, 37(6): 641-653.
- [2] Kang, Y., You, L., Xu, X. and Liao, Z. (2012) Prevention of Formation Damage Induced by Mud Lost in Deep Fractured Tight Gas Reservoir in Western Sichuan Basin. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, **51**, 46-51. <https://doi.org/10.2118/131323-pa>
- [3] 孙金声, 白英睿, 程荣超, 等. 裂缝性恶性井漏地层堵漏技术研究进展与展望[J]. 石油勘探与开发, 2021, 48(3): 630-638.
- [4] 王中华. 复杂漏失地层堵漏技术现状及发展方向[J]. 中外能源, 2014(1): 39.
- [5] 张希文, 李爽, 张洁, 等. 钻井液堵漏材料及防漏堵漏技术研究进展[J]. 钻井液与完井液, 2009, 26(6): 74-76+79+97.
- [6] 彭浩. 裂缝性地层井漏分析与堵漏决策优化研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西南石油大学, 2016.
- [7] 吕开河. 钻井工程中井漏预防与堵漏技术研究与应用[D]: [博士学位论文]. 大庆: 东北石油大学, 2007.
- [8] 李大奇, 康毅力, 刘修善, 等. 基于漏失机理的碳酸盐岩地层漏失压力模型[J]. 石油学报, 2011, 32(5): 900-904.
- [9] 曾义金, 李大奇, 杨春和. 裂缝性地层防漏堵漏力学机制研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(10): 2054-2061.
- [10] 刘加杰, 康毅力, 王业众. 扩展钻井液安全密度窗口理论与技术进展[J]. 钻井液与完井液, 2007(4): 69-73+98-99.
- [11] 皇凡生. 天然裂缝网络系统钻井完井液漏失数值模拟[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西南石油大学, 2014.
- [12] 李松. 海相碳酸盐岩层系钻井液漏失诊断基础研究[D]: [博士学位论文]. 成都: 西南石油大学, 2014.
- [13] 王斌. 裂缝性漏层钻井液漏失与堵漏计算机模拟研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西南石油大学, 2019.
- [14] Majidi, R., Miska, S.Z., Yu, M. and Thompson, L.G. (2008) Fracture Ballooning in Naturally Fractured Formations: Mechanism and Controlling Factors. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Denver, September 2008, SPE-115526-MS. <https://doi.org/10.2118/115526-ms>
- [15] Wang, H., Towler, B. and Soliman, M. (2007) Fractured Wellbore Stress Analysis: Sealing Cracks to Strengthen a Wellbore. *Proceedings of SPE/IADC Drilling Conference*, Amsterdam, February 2007, SPE-104947-MS. <https://doi.org/10.2523/104947-ms>

-
- [16] Warren, J.E. and Root, P.J. (1963) The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, **3**, 245-255. <https://doi.org/10.2118/426-pa>
 - [17] Barenblatt, G.I., Zheltov, I.P. and Kochina, I.N. (1960) Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks [Strata]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **24**, 1286-1303. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(60\)90107-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6)
 - [18] Sanfillippo, F., Brignoli, M., Santarelli, F.J. and Bezzola, C. (1997) Characterization of Conductive Fractures While Drilling. *SPE European Formation Damage Conference*, The Hague, June 1997, SPE-38177-MS. <https://doi.org/10.2118/38177-ms>
 - [19] Dershowitz, W.S. and Einstein, H.H. (1988) Characterizing Rock Joint Geometry with Joint System Models. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, **21**, 21-51. <https://doi.org/10.1007/bf01019674>
 - [20] Tempone, P. and Lavrov, A. (2008) DEM Modeling of Mud Losses into Single Fractures and Fracture Network. *12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Goa, 1-6 October 2008, 10-13.
 - [21] Karimi-Fard, M., Durlofsky, L.J. and Aziz, K. (2004) An Efficient Discrete-Fracture Model Applicable for General-Purpose Reservoir Simulators. *SPE Journal*, **9**, 227-236. <https://doi.org/10.2118/88812-pa>
 - [22] Lavrov, A. and Tronvoll, J. (2004) Modeling Mud Loss in Fractured Formations. *Abu Dhabi International Conference and Exhibition*, Abu Dhabi, October 2004, SPE-88700-MS. <https://doi.org/10.2118/88700-ms>
 - [23] Fang, J., Zhou, F. and Tang, Z. (2017) Discrete Fracture Network Modelling in a Naturally Fractured Carbonate Reservoir in the Jingbei Oilfield, China. *Energies*, **10**, Article No. 183. <https://doi.org/10.3390/en10020183>
 - [24] Feng, Y. and Gray, K.E. (2017) Modeling Lost Circulation through Drilling-Induced Fractures. *SPE Journal*, **23**, 205-223. <https://doi.org/10.2118/187945-pa>
 - [25] Kim, Y.D. and Durlofsky, L.J. (2023) Convolutional-Recurrent Neural Network Proxy for Robust Optimization and Closed-Loop Reservoir Management. *Computational Geosciences*, **27**, 179-202. <https://doi.org/10.1007/s10596-022-10189-9>
 - [26] Guo, Y. (2024) Multi-Scale Chemo-Mechanical Coupling Effects for Fluid-Infiltrating Porous Media: Theory, Implementation, and Validation.
 - [27] Yaghoubi, A. (2019) Hydraulic Fracturing Modeling Using a Discrete Fracture Network in the Barnett Shale. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **119**, 98-108. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2019.01.015>
 - [28] Sahimi, M. and Tahmasebi, P. (2022) The Potential of Quantum Computing for Geoscience. *Transport in Porous Media*, **145**, 367-387. <https://doi.org/10.1007/s11242-022-01855-8>
 - [29] Zhang, T., Zhu, P. and Lu, F. (2023) Stochastic Reconstruction of Porous Media Based on Attention Mechanisms and Multi-Stage Generative Adversarial Network. *Computational Geosciences*, **27**, 515-536. <https://doi.org/10.1007/s10596-023-10208-3>
 - [30] Lee, J. and Chang, J.S. (2024) Physics-Informed Neural Network Model for Predictive Risk Assessment and Safety Analysis. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*. <https://doi.org/10.1177/03611981241297662>