College and Job 职业教育发展, 2024, 13(6), 2513-2520
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2024.136384

Hans汉斯

常微分方程在中学数学中的应用

樊喜爽，王立波

北华大学数学与统计学院，吉林 吉林

收稿日期：2024年10月14日；录用日期：2024年11月21日；发布日期：2024年11月29日

摘　要

在《常微分方程》的学习过程中，我们发现其中的很多思想方法都在中学数学中有着一定的应用，并且很多中学数学问题都可以用微分方程的方法来解答。本篇文章从《常微分方程》教材中借鉴了关于微分方程的部分理论依据，对《常微分方程》的发展历程和它在中学数学中的具体应用进行了总结。重点阐述了物体冷却、水池注水等问题，用微分方程证明欧拉三角公式，借助微分方程研究曲线性质与切线问题，确定基本初等函数的本质特征及常数变易法在中学数学解题中的应用等问题。其中的一些方法技巧对于提高中学数学教师教学能力有一定的指导作用。在文章的正文部分还通过一些详细的例题讲解来让更多的读者了解微分方程及其在中学数学中的具体应用，令广大读者加深对这一方面的理解。

关键词

微分方程，中学数学，初等函数，常数变易法

Application of Ordinary Differential Equations in Middle School Mathematics

Xishuang Fan, Libo Wang

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: Oct. 14th, 2024; accepted: Nov. 21st, 2024; published: Nov. 29th, 2024

Abstract

In the process of learning "Ordinary Differential Equations", we can find that many of them have certain applications in middle school mathematics, and many middle school mathematics problems can be solved by differential equations. This paper draws some theoretical basis on differential equations from the textbook "Ordinary Differential Equations" and summarizes the development of "Ordinary Differential Equations" and its specific application in middle school mathematics. It focuses on object cooling, water filling in pools, etc.; proving Euler's trigonometric formula with

文章引用: 樊喜爽, 王立波. 常微分方程在中学数学中的应用[J]. 职业教育发展, 2024, 13(6): 2513-2520.
DOI: 10.12677/ve.2024.136384

differential equations; using differential equations to study the properties of curves and tangent problems; determining the essential characteristics of basic elementary functions and the application of constant variation method in middle school mathematics problem-solving, etc. Some of these methods and skills have a certain guiding role in improving the teaching ability of middle school mathematics teachers. In the main part of the article, some detailed examples are also used to let more readers understand differential equations and their specific applications in middle school mathematics so that readers can deepen their understanding of this aspect.

Keywords

Differential Equation, Middle School Mathematics, Elementary Function, Constant Variation Method

1. 引言

1.1. 研究背景

常微分方程是一门理论性极强且应用十分广泛的数学学科之一。它在很多科学领域内都有着重要的应用，它不仅影响了数学领域的发展，还促进了物理和天文学等其他自然学科的发展。常微分方程是由人类生产实践的需要而产生的，它的出现具有划时代的重要意义。对于师范类数学专业的学生来说，大部分人未来的职业规划都是成为一名中学数学教师，所以我们会更关心常微分方程在中学数学中的应用。在搜集了各种文献资料和教材的基础之上，本文主要对常微分方程与中学数学之间的若干联系做出了相应的总结。我们还可以发现常微分方程与中学代数方程二者讨论的本质皆是方程，所以我们将二者结合在一起并寻求他们之间的联系，对学生学习常微分方程是有一定帮助的，而且对指导中学数学代数方程教学有着重要的作用。对于我们师范类专业毕业生来说，加深常微分方程与中学数学关联的讨论也是迫切需要的，一方面增加了对于微分方程的理论了解，另一方面也对构建基于常微分方程的中学教学观点起关键性作用。

近年来，国内(外)学者为将常微分方程在中学数学教学中加以应用做了很多努力，他们做的研究无论是在问题的深度还是广度上都取得了重大发展，这类问题的研究很有意义，也引起了国内外学者的广泛关注，得到了较好的结果。

本文在研究过程中，以“常微分方程、中学数学”为关键词在知网上进行了相关文献检索。常微分方程教材中给出了关于常微分方程的一些基础知识和基本定义[1]；学者赵临龙在他的研究中提出了许多常微分方程在中学数学中应用的经典例题[2]；他还探讨了如何用常微分方程证明欧拉三角公式[3]等问题。魏明彬在他的文章中研究了常微分方程与曲线性质[4]；同时他也讨论了常微分方程是如何确定基本初等函数的本质特征的问题[5]。关于常微分方程在中学数学中的具体应用和其他相关联系，我国的多位学者也给出了诸多经典的理论和研究结果[6] [7]。同时，部分研究也强调了努力发掘常微分方程对初等及高等数学的深化、指导和巩固的重要性[8] [9]。此外，国内外对于常微分方程问题都有着更深的研究，这对常微分方程问题的解决做了进一步的补充[10] [11]，使得知识结构更完整。

1.2. 研究内容

通过建立常微分方程与中学数学的联系，有助于常微分方程的学习，体会常微分方程中的一些方法

技巧对于提高中学数学教师的教学水平有着一定的参考价值。本文的研究用常微分方程的思想方法解决了如下的问题：(1) 物体冷却、水池注水等问题。(2) 证明欧拉三角公式。(3) 研究曲线性质与切线问题。(4) 确定基本初等函数的本质特征。(5) 常数变易法在解题中的应用。

2. 常微分方程的发展历程及其重要性

2.1. 常微分方程的发展与简介

常微分方程是一门非常实用又有价值的学科，自 1693 年提出微分方程概念到动力系统的长足发展，常微分方程的发展经历了一个漫长而又迅速的过程，极大地丰富了数学的内涵和数学领域的研究内容。后来常微分方程与其他学科共同发展、相互促进，逐渐成为一个完整的数学分支。

常微分方程理论的形成历程充满了曲折与艰辛。莱布尼茨(Leibniz G.W., 1646-1716)在 1675 年写下数学史上第一个方程 $\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2$，这标志着常微分方程领域研究的开始，从此，无数的数学家们纷纷投身于常微分方程的研究。按照历史年代可以把常微分方程的研究划分为四个阶段。18 世纪及以前，是常微分方程的经典阶段；19 世纪初期和中期，是常微分方程的适定性理论阶段；19 世纪末期及 20 世纪初期，是常微分方程的解析理论阶段；20 世纪中期以后，常微分方程进入了定性理论阶段。

一般说来，微分方程就是联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数的等式。如果其中的未知函数只与一个自变量有关，则称为常微分方程；如果未知函数是两个或两个以上自变量的函数，并且在方程中出现偏导数，则称为偏微分方程[1]。本文所介绍的主要是常微分方程在中学数学中的应用，有时会简称微分方程。常微分方程的一般形式可以写作：$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$。

本文还介绍了微分方程中一类比较特殊的方程的应用，即克莱罗方程在中学数学中的应用，克莱罗方程的形式如下：$y=xy'+\varphi(y')$。

它的通解是一族直线，参数形式的解是通解的包络，也是克莱罗方程的奇解。而克莱罗方程就是一类通解有包络结构的特殊的一阶微分方程[1]。

2.2. 学习常微分方程的重要性

据有关调查，现在师范专业学生学习常微分方程的积极性并不高。他们认为日后的工作方向不是从事专门的学术理论研究，所以不需要深入学习大学的专业课程，只要学好中学数学，掌握适当的教学方法和技巧就能成为一名合格的中学数学教师。但是对于即将走向工作岗位的毕业生来说，这远远是不够的。

在日后的教学工作中，教师不应该只关注中学数学的教学内容，也应该逐渐向学生渗透数学思想，帮助学生构建完整的知识体系，同时还要学会用高等数学的思想方法武装自己，树立起“居高临下”的意识，这样才有可能成为一名优秀的中学数学教师。本文介绍的常微分方程属于方程范畴，可以与中学的代数方程进行联系。这样进行类比学习既可以增进对常微分方程的理解还可以在进行代数方程教学时起到指导性作用。在日常教学中，我们要自觉地去寻找常微分方程与中学数学的联系，积极的把所学到的常微分方程的思想方法运用到实际课堂教学中去，这样既能够提高学生学习新知识的兴趣，也能够更好地理解中学数学的内涵，从而对中学数学的教学起到良好的促进作用。

3. 常微分方程对中学数学的指导作用

常微分方程作为代数方程自然发展和延续的学科，必然传承了中学代数方程的一些本质特征，形成高观点下的数学观，对中学数学有着重要的指导作用。比如方程与切线问题，函数方程解法问题等，下

面就一些典型的问题加以举例说明。

3.1. 物体冷却问题

例 1：已知物体在冷却过程中，其温度变化速度与其本身的温度和环境的温度之差成反比。现有一个 120˚C 的物体，将其放在温度为 20˚C 的恒温介质中冷却，30 分钟后，该物体的温度已降为 30˚C，求将该物体温度降至 21˚C 还需要经过多长时间？

解：令 t 为时间，$T = T(t)$ 为物体温度，$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T-20)$，其中 $k>0$ 是比例系数。解得：$T = C\mathrm{e}^{-kt}+20$。将初始条件 $T(0)=120$ 代入上式，解得 $C=100$，故 $T=100\mathrm{e}^{-kt}+20$。将 $t=30$，$T=30$ 代入上式得 $k=\frac{\ln 10}{30}$，所以 $T=100\mathrm{e}^{-\frac{\ln 10}{30}t}+20$。当 $T=21$ 时，$t=60$，即再经过 $60-30=30(\min)$，物体的温度可降为 21˚C。

3.2. 水池注水问题

例 2 [2]：有一水池，若单独进水 24 小时可以灌满，若单独放水 48 小时可以排完，现同时进水和放水，多少小时可以灌满水池？

分析：本题是一个简单的中学数学应用题，我们可以用常微分方程的思想来完成。

解：若设水池容积为 V，水池灌满时刻为 T，建立中学代数方程：$T\left(\frac{V}{24}-\frac{V}{48}\right)=V$，即 $T=48(\text{小时})$。

但在现实生活中，进水量可以是衡量，而排水量确实会随水池水位下降而导致流量不断减少。于是，对深度为 H 的水池，单独进满水的时间为 t_1，单独排完水的时间 t_2，建立黎卡提方程如下：$\left[\frac{H}{t_1}-2\frac{\sqrt{H}}{t_2}\right]\mathrm{d}t=\mathrm{d}h$，即 $T=\frac{t_2^2}{2t_1}\ln\frac{t_2}{t_2-2t_1}-t_2$。此时，当 $t_1=24$，$t_2=48$ 时，则根本无法灌满水。所以说利用微分方程方法，不但可以解决特定的问题，而且可通过对一般问题的解决最终揭示事物的本质。

3.3. 用微分方程证明欧拉三角公式

在高中阶段，我们曾接触过许多三角函数，而它们作为中学数学的一个重要组成部分，我们把它统一为 Euler 三角公式(在复数范围内)，并且也可以使用微分方程的方法给出证明[3]。

例 3 [3]：证明欧拉三角公式：$\mathrm{e}^{ix}=\cos x+i\sin x$。

证明：设复数 $Z=\cos x+i\sin x$，则有柯西问题：$Z'=-\sin x+i\cos x=iZ$，$z(0)=1$。于是，$\mathrm{e}^{ix}=Z=\cos x+i\sin x$。同理，可证明其他三角公式。如三角中的和角公式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。由于微分方程：$x''+x=0$ 有特解：$x=\sin t$ 和 $\cos t$。则方程的通解为：$x=k_1\cos t+k_2\sin t=C_1\mathrm{e}^{it}+C_2\mathrm{e}^{-it}$。取 $t=0,\frac{\pi}{2}$，则有 $K_1=C_1+C_2, K_2=(C_1-C_2)i$，再取 $t=\alpha+\beta$，则：

$$
\begin{aligned}
&K_1\cos(\alpha+\beta)+K_2\sin(\alpha+\beta)\\
&=C_1\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)}+C_2\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)i}\\
&=C_1\mathrm{e}^{\alpha i}\mathrm{e}^{\beta i}+C_2\mathrm{e}^{-\alpha i}\mathrm{e}^{-\beta i}\\
&=C_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)+C_2(\cos\alpha-i\sin\alpha)(\cos\beta-i\sin\beta)\\
&=(C_1+C_2)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(C_1-C_2)i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)
\end{aligned}
$$

于是，公式得证。

3.4. 常微分方程与曲线问题

3.4.1. 曲线性质问题

定理 1 [4]：如果曲线 l 的每条切线都具有某种性质，而该性质只与切线有关(由等式给出)，而与切点无关，则所得方程一定是 Clairaut 方程。

推论 1 [4]：如果曲线 l 的每条切线都具有某种性质，而该性质只与切线有关(由等式给出)，而与切点无关，则 l 由一族直线及其包络线组成。下面，我们来看一看由该定理导出的几条曲线。

例 4 [4]：求一曲线 l 使由定点 $(1,1)$ 到 l 的任一切线的距离等于 1。

解：设 $l: y = y(x)$，$\forall P(x,y) \in l$，切线 $L: Y - y = y'(X - x)$，即 $L: y'X - Y + y - y'x = 0$。由题意有 $d(P_0, L) = \dfrac{|y' - 1 + y - y'x|}{\sqrt{y'^2 + 1}} = 1$，化简得 $y = y'x + 1 - y' \pm \sqrt{y'^2 + 1}$。这是 Clairaut 方程，通解为：$y = Cx + 1 - C \pm \sqrt{C^2 + 1}$，这是一族曲线，下求奇解。令 $y' = p$，则 $\varphi(p) = 1 - p \pm \sqrt{C^2 + 1}$，$\varphi'(p) = -1 \pm \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}$，$\begin{cases} x = -\varphi'(p) = 1 \mp \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} \\ y = xp + \varphi(p) = 1 \mp \dfrac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \end{cases}$。消去 p 得 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$，那么就得到了我们所求的曲线，显然，它是以 $(1,1)$ 为圆心，以 1 为半径的圆。

我们发现，若问题改为“求一曲线使由定点 (x_0, y_0) 到 l 的任一切线的距离等于常数 a”这一问题，那么可以求得它是以 (x_0, y_0) 为圆心，以 a 为半径的圆。这一性质可作为圆的定义。

例 5 [4]：求一条曲线 l，它的任意一条切线在两个坐标轴间的线段长等于 6。

解：设 $l: y = y(x)$，$\forall P(x,y) \in l$，切线 $LP: Y = y'(X - x) + y$，易知，LP 与坐标轴交于 $A\left(\dfrac{x-y}{y'}, 0\right), B(0, y - y'x)$。由题设有：$\left(x - \dfrac{y}{y'}\right)^2 + (y - y'x)^2 = 6^2$，化简得：$y = xy' \pm \dfrac{6y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$。这是 Clairaut 方程，通解为 $y = xC \pm \dfrac{6C}{\sqrt{1 + C^2}}$，这是直线族，非所求，下求奇解。令 $y' = p$，则 $\varphi(p) = xC + \dfrac{6C}{\sqrt{1 + C^2}}$，$\varphi'(p) = \pm \dfrac{6}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$，奇解为 $\begin{cases} x = -\varphi'(p) = \mp 6(1 + p^2)^{-\frac{3}{2}} \\ y = xp + \varphi(p) = \pm 6p^3(1 + p^2)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$。消去 p 得 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{2}{3}}$，为星形线。

我们发现, 若问题改为“求一条曲线 l，它的任意一条切线在两个坐标轴间的线段长等于 a”这一问题，那么可以求得星形线的直角坐标方程为 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$。

3.4.2. 曲线方程切线问题

曲线方程切线问题，一直以来都是解析几何的重要研究内容。对于常微分方程中较特殊的一类方程，即克莱洛方程，恰好是研究曲线方程的奇解和所有切线方程，也就是通解的结构，因此一直在数学领域内占据着重要的位置。

对于克莱罗方程：$y = xy' + \varphi(y')$，其通解为：$y = Cx + \varphi(C)$ (C 为常数)。由 $x + \varphi'(p) = 0$，有 $p = p(x)$，代入得特解为 $y = xp(x) + \varphi(p(x))$。注：克莱罗方程的通解恰好是方程中的 y' 被 C 取代。

例 6. 求一条曲线，使曲线上每一点处的切线斜率与 y 轴上的截距成倒数。

解：设所求的曲线方程为 $y=\varphi(x)$，那么这条曲线上任意一点的切线方程可以写成： $y=xy'+b$ 。其中 b 为在 y 轴上的截距，由题意得： $by'=1$，即 $y=xy'+\frac{1}{y'}$，此系克莱罗方程，奇解的参数方程为：

$$\begin{cases} x=\frac{1}{p^2} \\ y=\frac{2}{p} \end{cases}$$

，消去参数 p 得到： $\forall x,y\in R^+$ 。为所求的曲线方程。

3.5. 用常微分方程确定初等函数的本质特征

在学习了常微分方程以后，我们知道在一些附加条件下可以用函数方程来定义基本初等函数[4]。在中学数学范围内，我们很难联想到这一事实，但是现在只要用一点简单的微分方程的知识，即可得到证明。

3.5.1. 幂函数

引理 1 [5]：设 $\forall x,y\in R^+$，都有 $f(xy)=f(x)f(y)$，且 $f'(1)\neq 0$， $f(x)$ 不恒为常数。则 $f(x)$ 必为幂函数。

定理 2 [5]：函数 $f(x)$ 为幂函数的充要条件为 $f(x)$ 具有性质：$\forall x,y\in R^+$，都有 $f(xy)=f(x)f(y)$，且 $f'(1)\neq 0$， $f(x)$ 不恒为常数。

定理 2 说明公式 $f(xy)=f(x)f(y)$ 反映了幂函数的本质特征，即一个函数当且仅当它具有性质 $f(xy)=f(x)f(y)$ 时，该函数为幂函数。

3.5.2. 指数函数

引理 2 [5]：设 $\forall x,y\in R^+$，都有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f'(0)\neq 0$， $f(x)$ 不恒为常数。则 $f(x)$ 必为指数函数。

定理 3 [5]：函数 $f(x)$ 为指数函数的充要条件为 $f(x)$ 具有性质：$\forall x,y\in R^+$，都有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f'(0)\neq 0$， $f(x)$ 不恒为常数。

定理 3 说明公式 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 反映了幂函数的本质特征，即一个函数当且仅当它具有性质 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 时，该函数为指数函数。

3.5.3. 对数函数

引理 3 [5]：设 $\forall x,y\in R^+$，有 $f(xy)=f(x)+f(y)$， $f'(1)\neq 0$， $f(x)$ 不恒为常数。则 $f(x)$ 必为对数函数。

定理 4 [5]：函数 $f(x)$ 为对数函数的充要条件为 $f(x)$ 具有性质：$\forall x,y\in R^+$，都有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f'(1)\neq 0$， $f(x)$ 不恒为常数。

定理 4 说明公式 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 反映了对数函数的本质特征，即一个函数当且仅当它具有性质 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 时，该函数为对数函数。

3.5.4. 正切函数

引理 4 [5]： $\forall x,y\in R$， $x,y,x+y\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$，其中 k 为任意整数。当 $f(x)f(y)\neq 1$ 时，都有 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$， $f'(0)=1$， $f(x)$ 必为正切函数。

定理 5 [5]：数 $f(x)$ 为正切函数的充要条件为 $f(x)$ 具有性质：设 $\forall x,y\in R$， $x,y,x+y\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$，

中 k 为任意整数，当 $f(x)f(y)\neq 1$ 时，都有 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$， $f'(0)=1$。

定理 5 说明公式 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 反映了正切函数的本质特征，即一个函数当且仅当它具有性质 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 时，该函数为正切函数。

3.6. 常数变易法在解题中的应用

常数变易法是微分方程中的一种特殊方法，在某些特定条件下简便易用，部分常微分方程教材在解一阶线性非齐次微分方程的时候都会用到这种方法，而常数变易法的思想在解中学数学题中应用非常广泛[6]。

下面介绍用常数变易法解一阶线性非齐次微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=f(x)$ 一般步骤：

(1) 求出其对应的一阶线性齐次方程的通解： $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$。

(2) 设想一阶线性非齐次方程的通解为： $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$。

(3) 将待定形式的通解代回一阶线性非齐次微分方程，确定 $C(x)$，再表出 y。

(4) 整理通解为： $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int f(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$。

常数变易法中所含的变元求异思维在中学数学中也有着广泛的应用，它作为创新的基础，在提高学生学习兴趣和创新能力方面起着重要作用，接下来我们通过两个例题看一下这种思维在中学数学解题中的具体应用。

例 7：解方程 $x^3+2\sqrt{5}x^2+5x+\sqrt{5}-1=0$。

分析：此题为关于 x 的一元三次方程，直接求解是有一定难度的，并且复杂费力。现在我们不妨将 x 视为常量，而反将 $\sqrt{5}$ 看作未知数，那么问题就变为解关于 $\sqrt{5}$ 的一元二次方程。

解：设 $W=\sqrt{5}$，则有关于 W 的方程： $xW^2+(2x^2+1)W+(x^3-1)=0$，

则 $\begin{aligned} W&=\dfrac{-(2x^2+1)\pm\sqrt{(2x^2+1)^2-4x(x^3-1)}}{2x}\\ &=\dfrac{-(2x^2+1)\pm(2x+1)}{2x}\end{aligned}$，其中 $x\neq 0$，于是， $\sqrt{5}=\dfrac{-(2x^2+1)+(2x+1)}{2x}=1-x$，

或 $\sqrt{5}=\dfrac{-(2x^2+1)+(2x+1)}{2x}=-\dfrac{x^2+x+1}{x}$。

从而，求得原方程的解： $x_1=1-\sqrt{5}$， $x_{2,3}=\dfrac{1}{2}\left[-(\sqrt{5}+1)\pm\sqrt{2\sqrt{5}+2}\right]$。

例 8：设 k 为实数，试求出关于 x 的方程 $x^4-2kx^2+k^2+2k-3=0$ 的实根范围。

分析 将原方程整理为关于 k 的二次方程： $k^2+2(1-x)k+(x^4-3)=0$，当 k 为实数时，判别式大于或等于 0，即 $-x^2+2\geq 0$，可解得 $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$。

4. 总结

总之，常微分方程与中学数学在许多方面都有着密切的关联，关键在于我们如何理解二者之间的关系，体会其中融汇的数学思想，以达到灵活应用各种解决问题的方法，保证更快、更简洁地解决问题。

在中学教学中，不能仅仅就中学论中学，应自觉地利用常微分方程的思想、观点和方法从更深层次、多角度、全面地掌握中学数学的教学体系，深刻地领会中学数学的教学内容，充分地把握中学数学问题的实质与背景。教师站在较高的观点，才能居高临下，站得高，想得深，做到深入浅出，诲人致深。让学生在老师的带领下对已有的知识体系进行再发掘、再创造，因材施教，摒弃教条的教学模式，采用适应新时代的创新性教学模式，有利于提高学生的数学思维能力，拓宽解题思路，使学生们对数学学习更感兴趣。

参考文献

[1] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2005.

[2] 赵临龙. 常微分方程的思想方法及在中学数学中的应用[J]. 安康师专学报, 2000(2): 47-52+85.

[3] 赵临龙, 张祥生. 常微分方程与中学数学的关联[J]. 安康师专学报, 1999(2): 79-83.

[4] 魏明彬. 常微分方程与曲线性质[J]. 四川教育学院学报, 2007(6): 59-60.

[5] 魏明彬. 常微分方程与初等函数[J]. 四川教育学院学报, 2012, 28(5): 111-112+124.

[6] 肖杰. "常数变易法"在中学数学中的应用[J]. 数学学习与研究(教研版), 2008(10): 90.

[7] 赵临龙, 王在后. 一类一阶线性常微分方程组的解法及其与中学数学代数方程的联系[J]. 安康师专学报, 2005(1): 84-86.

[8] 陈玉娟, 钟志华. 高师常微分方程教学中需注意的问题[J]. 滁州学院学报, 2005(4): 95-96.

[9] 都长清. 在常微分方程课程的教学中如何体现"高初结合" [J]. 数学教育学报, 1994(1): 74-78.

[10] 刘小慧. 高中数学教师学科知识研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 西南大学, 2019.

[11] Demsie Abraha, J. (2020) Comparison of Numerical Methods for System of First Order Ordinary Differential Equations. *Pure and Applied Mathematics Journal*, **9**, 32-36. https://doi.org/10.11648/j.pamj.20200902.11