

初中数学教学中融入数学美的教学设计 ——以“垂直于弦的直径”为例

阮子怡*, 红霞#, 张丽

洛阳师范学院数学科学学院, 河南 洛阳

收稿日期: 2024年9月25日; 录用日期: 2024年11月7日; 发布日期: 2024年11月14日

摘要

“美”常常由人的感觉来发现、创造，并通过感性去感受、鉴赏。然而，数学的美是充满逻辑与理性的。人教版初中数学九年级上册《圆》是学习图形性质的基础，也是培养学生发现数学美、欣赏数学美的重要内容。本文以“垂直于弦的直径”为例，将数学的学习与审美相结合，从而提升初中学生数学学习的效率和数学课堂教学有效性。

关键词

初中数学, 图形与几何, 数学美

Incorporating the Teaching Design of Mathematical Beauty into Junior High School Mathematics Teaching

—Taking the Example of “Perpendicular to the Diameter of the String”

Ziyi Ruan*, Xia Hong#, Li Zhang

Department of Mathematics, Luoyang Normal University, Luoyang Henan

Received: Sep. 25th, 2024; accepted: Nov. 7th, 2024; published: Nov. 14th, 2024

Abstract

“Beauty” is often found and created by human feeling, and is felt and appreciated through sensibility.

*第一作者。

#通讯作者。

However, mathematical beauty is full of logic and reason. “Circle”, the first volume of ninth-grade mathematics in junior high school, is the basis of learning the nature of figures and also an important content for training students to discover and appreciate mathematical beauty. Taking “perpendicular to the diameter of the string” as an example, this paper combines the learning of mathematics with the aesthetic, so as to improve the efficiency of junior high school students’ learning of mathematics and the effectiveness of mathematics classroom teaching.

Keywords

Junior High School Mathematics, Graphics and Geometry, Mathematical Beauty

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

徐利治教授指出：作为科学语言的数学具有一般语言文学和艺术所共有的美的特点，即数学在其内容和结构上和方法上也具有自身的某种美，即所谓数学美[1]。数学美是落实立德树人的重要环节，对发展学生的核心素养起着积极作用。义务教育新课标的总目标要求学生对数学有探索欲，就会去体会数学存在的价值，欣赏数学美。义务教育新课标的第四学段目标(7~9 年级)指出学生要体会数学在日常中的应用，数学存在着一定的价值，要学会欣赏数学美，养成良好的学习数学的习惯。数学课程标准对数学美越来越重视，在数学教学中渗透数学美，可以提高学生的学习兴趣，发展学生的创新思维，促进学生全面发展。

图形与几何领域是初中数学学习的重要领域之一，它可以帮助我们理解形状、空间和测量的概念，是人们更好地认识和描述现实世界的重要工具，其所包含的数学美是最直观且最容易感受到的[2]。将数学美融入图形与几何领域的教学中，发挥数学课堂教学的最大价值。本文主要研究人教版初中数学“图形与几何”中数学美的渗透。

2. 人教版初中数学“图形与几何”领域的内容

“图形与几何”是义务教育阶段学生数学学习的重要领域。初中阶段“图形与几何”领域包括“图形的性质”“图形的变化”和“图形与坐标”三个方面(见表 1)。

Table 1. Coding table for the “graphics and geometry” domain

表 1. “图形与几何”领域编码表

知识领域	知识板块	知识主题
1. 图形与几何	1.1. 图形的性质	1.1.1. 点、线、面、角 1.1.2. 相交线与平行线 1.1.3. 四边形 1.1.4. 圆 1.1.5. 定义、命题、定理
	1.2. 图形的变化	1.2.1. 图形的轴对称 1.2.2. 图形的旋转 1.2.3. 图形的平移

续表

	1.2.4. 图形的相似
	1.2.5. 图形的投影
1.3. 图形与坐标	1.3.1. 图形的位置与坐标
	1.3.2. 图形的运动与坐标

3. 图形与几何领域蕴含的数学美

数学美是一种科学的本质力量的感性和理性的呈现，在其内容和方法上都具有自身的某种美[3]。根据人教版初中数学教科书的教学内容安排，把数学美可分为简洁美、对称美、统一美和奇异美。

3.1. 数学的简洁美

数学的简洁美可以是数学语言表达的简洁优美，表现在数学公式、符号、定理的简洁美，比如：“ \angle ”表示角，“ \perp ”“ \parallel ”分别表示垂直和平行关系，“ \odot ”表示圆，“ Δ ”表示三角形等；“矩形的四个角都是直角，对角线相等”、“等边三角形的各角都等于 60° ”等定理。

数学的简洁美也可以是数学思想方法的简洁美，主要表现在解题中的化繁为简，复杂的问题可利用数学思想或数学方法使其简单化。

例如，见图1，在矩形ABCD中，点E是BC上的一点， $AE = AD$ ， $DF \perp AE$ ，垂足为点F，求证： $DF = DC$ 。

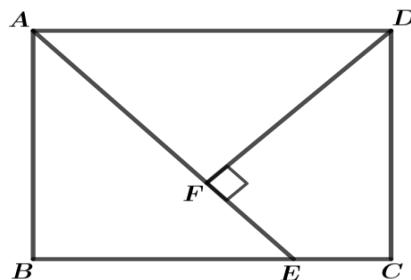


Figure 1. Bar chart
图1. 矩形图

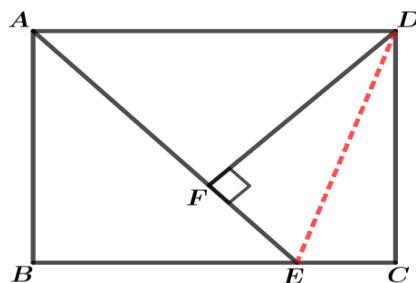


Figure 2. Diagram for problem-solving
图2. 解题示意图

证法1：见图2，连接DE， $\because AE = AD$ ， $\angle ADE = \angle AED$ ，又 \because 四边形ABCD是矩形， $\therefore AD \parallel BC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\therefore \angle ADE = \angle DEC$ ， $\therefore \angle AED = \angle DEC$ ，又 $\because DF \perp AE$ ， $\angle DFE = \angle C = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle DEF \cong \triangle EAB$ (AAS)， $\therefore DF = DC$ 。

证法 2：在矩形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\therefore \angle DAF = \angle AEB$ ，又 $\because DF \perp AE$ ， $\therefore \angle AFD = \angle B = 90^\circ$ ，又 $\because AE = AD$ ， $\therefore \triangle ADF \cong \triangle EAB(AAS)$ ， $\therefore DF = AB = DC$ 。

3.2. 数学的对称美

这里的对称美不仅限于几何图形中的旋转对称、平移对称、镜像对称，使图形处处充满美感，给人以视觉享受。几何中也存在对偶定理[4]，例如：两点确定一条直线，两直线确定一点；等腰三角形底边的垂线、中线及顶角的角平分线，三线重合。并且对称美也运用于数学解题中，例如：初中“求最短路程的问题”，当 A 、 B 两点在直线 l 同侧时，在直线 l 上找一点 P ，使得 PA 与 PB 的距离最短(见图 3)。解题关键就在于寻找点 B (或点 A)的对称点，作点 B 关于直线 l 的对称点 B' ，连接 AB' ，利用两点之间线段最短的基本事实，使难题迎刃而解。

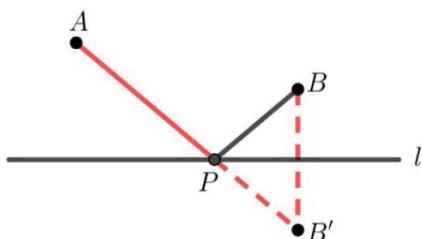


Figure 3. Diagram for seeking the shortest path
图 3. 求最短路径图

3.3. 数学的统一美

统一美是指看似不相同的数学概念、理论，在一定条件下，可以找到它们的关联之处，统一到数学知识体系中进行研究，而展现出数学各部分之间、部分与整体之间的和谐、统一的美[5]。例如，不管三角形的面积有多大，三角形的内角和始终为 180° ；直角三角形三边的长度有长有短，但不管哪一个直角三角形都可以用勾股定理来揭示它们三边之间的数量关系。统一美不仅存在于数学概念中，在数学思想方法上也有体现。例如，化归思想是指在不熟悉的问题中，找到不同数学对象之间存在的某种关联，在一定条件下转化或放入一个统一体中，化难为易，促进问题得以解决。数形结合思想则是“将抽象的数量关系与直观的图形统一起来，以数助形，以形辅数，进而解决问题”。

在教学中，我们常常利用以前学习过的内容将所学新知识联系起来，旧知带动新知学习，让学生明白知识学习是有关联的，不是割裂的。比如：人教版初中数学八年级下册第十八章《平行四边形》，平行四边形、菱形、矩形、正方形，它们之间既有联系由于区别。所以，学生容易混淆它们各自的性质。如果将这些特殊四边形的图形和性质通过列表的形式统一到一起，便能使学生直观地将它们的性质作对比，并更好地体会知识点之间的区别与联系。

3.4. 数学的奇异美

数学奇异美主要体现在奇妙的解题探究思路上，结果往往出乎意料却又在情理之中。在教学中，需要教师为学生提供新的思路，启迪学生的思维，引导学生发现数学的奇异性，感受数学的奇异美[6]。比如：数形结合思想。

在初中几何学中，学生需要学习相似三角形的性质，相似三角形的性质是一个抽象且复杂的内容，学生难以理解。为了帮助学生更好地理解和掌握相似三角形的性质，教师可以利用数形结合的方法进行教学。教师引导学生观察具有相似关系的三角形的各个边长和角度的关系，通过从代数的角度找到相似

三角形的一些共同特征，从而更好地理解相似三角形的性质和判定。

4. 《垂直于弦的直径》教学设计

《圆》是初中数学图形与几何领域的内容，涉及圆的数学内容较多，学习任务较重，并且这部分知识比较抽象，综合性强。如圆与直线的位置关系、垂径定理以及圆周角定理等内容，考查学生的逻辑推理能力和抽象能力，对初学者来说比较晦涩难懂，不利于教学目标的顺利达成。但如果能从圆的数学美的角度切入，引导学生从圆对称之美、定理的简洁美、方法的奇异美等角度学习圆，既能完成教学目标，突破重难点，也利于培养学生对数学美的认识。下面以《垂直于弦的直径》这节课为例来说明如何在教学中渗透数学美。

4.1. 教材分析

“垂直于弦的直径”是人教版初中数学九年级上册第二十四章《圆》第一节第二课时的内容，这部分属于图形与几何领域的内容。在前面学生已经学习了与圆有关的一些概念的内容、等腰三角形的性质以及轴对称图形的内容，垂径定理是在圆的轴对称性的基础上，借助构建等腰三角形得出的。

4.2. 学情分析

学生知识基础：学生已经具备轴对称图形、等腰三角形的性质、圆的一些基本概念等数学知识，为本节课的学习打下了良好的基础。

学生认知能力：九年级的学生已经具备一定的逻辑推理能力和知识迁移能力，具有通过实验操作等数学活动主动尝试归纳、合作交流的能力。

学生不足之处：学生在分清文字命题垂径定理的条件和结论方面存在困难。

4.3. 教学目标

知识技能：探索并证明垂径定理，掌握垂径定理。

数学思考：通过结合相关图形性质的探索和证明过程，进一步培养合情推理能力、发展推理能力，从抽象、建模和归纳的角度，加强对数学思想的深刻理解。

问题解决：能初步应用垂径定理进行计算。

情感态度：经历探索交流，感悟生活与数学的内在联系，体会垂径定理。

4.4. 教学重难点

教学重点：掌握垂径定理。

教学难点：垂径定理的条件和结论。

4.5. 教学过程

4.5.1. 引入新课

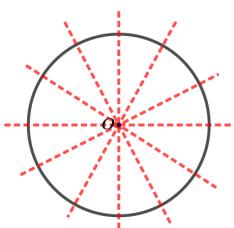


Figure 4. Diagram of a circle folded along its diameter
图4. 圆沿直径对折示意图

问题 1：毕达哥拉斯说：“立体图形中最美丽的是球，平面图形中最美丽的是圆。”这是为什么呢？请同学们沿着圆的任意一条直径进行对折(见图 4)，在折的过程中你有何发现？

师生活动：圆是轴对称图形，任意一条直径所在直线都是它的对称轴。

【设计意图】引导学生动手操作，感知圆的对称美，引入课题。

根据圆的轴对称性来探讨圆的另一性质“垂直于弦的直径”。

4.5.2. 新课讲解，探究新知

问题 2：如图 5， AB 是 $\odot O$ 的一条弦，直径 $CD \perp AA'$ ，垂足为 M 。你能发现图中有哪些相等的线段和劣弧？为什么？

师生活动：线段： $AM = A'M$ 弧： $\widehat{AC} = \widehat{A'C}$ ， $\widehat{AD} = \widehat{A'D}$ ，如果 $\odot O$ 的直径 CD 垂直于弦 AA' ，垂足为 M ，那么点 A 和点 A' 是对称点，把圆沿着直径 CD 折叠时，点 A 和点 A' 重合， AM 与 $A'M$ 重合， \widehat{AC} 、 \widehat{AD} 分别与 $\widehat{A'C}$ 、 $\widehat{A'D}$ 重合。因此， $AM = A'M$ ， $\widehat{AC} = \widehat{A'C}$ ， $\widehat{AD} = \widehat{A'D}$ ，即直径 CD 平分弦 AA' ，并且平分 $\widehat{AA'}$ ， $\widehat{ACA'}$ 。

问题 3：请同学们继续思考，如何用一句话将这几个条件和结论表述出来？

师生活动：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧。

问题 4：如何用严谨的数学方式证明呢？

追问 1：命题的题设？

追问 2：命题的结论？

师生活动：已知： CD 是 $\odot O$ 的直径， AA' 是弦， $CD \perp AA'$ ，点 M 是垂足。

求证： $AM = A'M$ ， $\widehat{AC} = \widehat{A'C}$ ， $\widehat{AD} = \widehat{A'D}$ 。

追问 3：要证明三组等量，通过圆的对称性发现，关键是证明 $\odot O$ 沿直径 CD 对折时，点 A 和点 A' 重合，即证明直径 CD 垂直平分弦 AA' 。由已知可得 $CD \perp AA'$ ，只需要证明 CD 平分弦 AA' 即可。我们学过什么中垂线与中线重合的图形呢？

师生活动：等腰三角形底边的垂线、中线和顶角的角平分线三线合一。

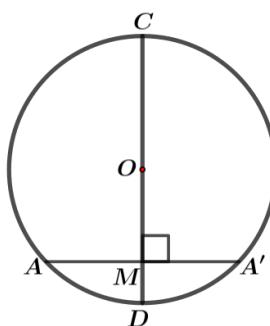


Figure 5. Diagram for question 2

图 5. 问题 2 示意图

如图 6，连接 OA 、 OA' ，在 $\triangle OAA'$ 中， $\because OA = OA'$ ， $\triangle OAA'$ 是等腰三角形。又 $AA' \perp CD$ ， $\therefore AM = MA'$ ，即 CD 是 AA' 的垂直平分线。这就是说， $\odot O$ 沿直径 CD 对折时，点 A 和点 A' 重合。因此， $AM = A'M$ ， $\widehat{AC} = \widehat{A'C}$ ， $\widehat{AD} = \widehat{A'D}$ 。

这样，我们就得到垂径定理：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧。

教师：为了帮助学生理解和应用垂径定理，强调两点：

(1) 定理的条件与结论: 条件有两条分别是 CD 是直径, $CD \perp AA'$, 结论有三条分别是 $AM = A'M$, $\widehat{AC} = \widehat{A'C}$, $\widehat{AD} = \widehat{A'D}$ 。

(2) 定理中的基本图形: 由半径、半弦和弦心距组成的直角三角形($Rt\triangle OAM$)。

追问 4: 如何用符号语言描述垂径定理呢?

师生活动: 几何语言: $\because CD$ 是直径, $CD \perp AA'$, $\therefore AM = A'M$, $\widehat{AC} = \widehat{A'C}$, $\widehat{AD} = \widehat{A'D}$ 。

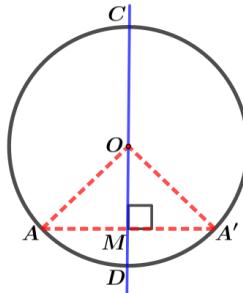


Figure 6. Circle

图 6. 圆

【设计意图】让学生经历“实验——猜想——证明”的数学活动, 利用已有的数学知识: 圆的轴对称性、等腰三角形三线合一, 建立起形与数的联系, 构建数学模型, 得出“垂径定理”。此过程培养学生的语言归纳能力以及知识迁移能力, 让学生感受数学语言的简洁美, 以及在证明垂径定理的过程中渗透数学的统一美、奇异美。

4.5.3. 典例精析

赵州桥(见图 7)是我国隋代建造的石拱桥, 距今约有 1400 年的历史, 是我国古代人民勤劳与智慧的结晶。它的主桥拱是圆弧形, 它的跨度(弧所对的弦的长)为 37 m, 拱高(弧的中心到弦的距离)为 7.23 m, 求赵州桥主桥拱的半径(结果保留小数点后一位)。



Figure 7. Diagram of the Zhaozhou bridge

图 7. 赵州桥示意图

解: 用 \widehat{AB} 表示主桥拱, 设 \widehat{AB} 所在圆的圆心为 O , 半径为 R (见图 8)。

经过圆心 O 作弦 AB 的垂线 OC , D 为垂足, OC 与 \widehat{AB} 相交于点 C , 连接 OA 。根据垂径定理, D 是 AB 的中点, C 是 \widehat{AB} 的中点, CD 就是拱高。

由题设知, $AD = 1/2 AB = 1/2 \times 37 = 18.5$, $OD = OC - CD = R - 7.23$ 在 $Rt\triangle OAD$ 中, 由勾股定理, 得 $OA^2 = AD^2 + OD^2$, 即 $R^2 = 18.5^2 + (R - 7.23)^2$, 解得 $R \approx 27.3$ 。

因此, 赵州桥主桥拱的半径约为 27.3 m。

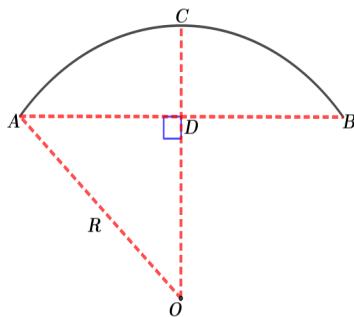


Figure 8. Main arch of the bridge
图 8. 主桥拱

【设计意图】通过引入生活中的例子，让学生领悟数学与生活的联系。利用数形结合的思想解决问题，一方面及时将所学的知识运用于问题中，巩固所学的知识；另一方面，体现垂径定理的实际应用的数学价值，启迪学生的思维，感受数学的奇异美。

4.5.4. 课堂小结

问题 3：本节课你学到了哪些知识？获得哪些体验？掌握了什么思想？

师生活动：学生积极发言，教师归纳学生的发言情况，给出具有针对性的总结。

【设计意图】让学生在总结中收获美。通过先对学生提问，之后教师及时总结，有利于培养学生语言表达能力，也有利于教师准确了解学生对本节课知识的掌握、情感体验和思想方面达成的情况，同时为学生今后课堂总结提供示范。

4.5.5. 布置作业

- (1) 完成教材 87 页 7、8 题；
 - (2) 思考“如果具备下列五个条件中任意两个，是否一定具备另外三个？”
- ① 过圆心；② 垂直于弦；③ 平分弦；④ 平分弦所对的劣弧；⑤ 平分弦所对的优弧。

【设计意图】基本作业：进一步加深对本节课所学知识的理解；思考题：除了培养学生知识的迁移能力和独立思考能力之外，还可以让学生感悟数学的统一和谐美。

5. 结语

数学美在初中数学“图形与几何”领域的体现是多方面的。通过简洁美、对称美、统一美以及奇异美等几方面的学习和体验，学生不仅能够更好地理解和掌握数学知识，还能提高自己的审美能力。因此，教师在教学过程中应该注重数学美的渗透和展示，让学生在学习过程中感受到数学的美和魅力。

基金项目

河南省青年骨干教师培养计划(2023GGJS126)，河南省高等教育教学改革研究与实践立项(2024SJGLX0163)，洛阳师范学院青年骨干教师培训计划(2021XJGGJS-07)。

参考文献

- [1] 吴茂焕. 初中数学渗透数学美的路径和方法[J]. 初中数学教与学, 2021(16): 3-6.
- [2] 马阳帆. 美育在小学数学图形与几何教学中的渗透方法[J]. 智力, 2023(30): 21-24.
- [3] 贾亚男. 小学图形与几何教学中渗透数学美的行动研究[D]: [硕士学位论文]. 聊城: 聊城大学, 2019.
- [4] 耿秀芳. 初中数学教学中融入数学文化的教学策略研究[D]: [硕士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古师范大学, 2016.

-
- [5] 李琦. 数学美在中学数学教学中的应用探究[D]: [硕士学位论文]. 牡丹江: 牡丹江师范学院, 2018.
 - [6] 秦秀美. 数学美融入小学第二学段“图形与几何”教学的策略研究[D]: [硕士学位论文]. 伊宁: 伊犁师范大学, 2023.