College and Job 职业教育发展, 2024, 13(6), 2201-2209
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2024.136339

Hans汉斯

GeoGebra环境下问题驱动式教学，助力数学问题解决

——以2023年高考卷圆锥曲线试题为例

余晓双[1]，李书海[1,2]

[1]赤峰学院数学与计算机科学学院，内蒙古 赤峰
[2]民族数学教育研究所，内蒙古 赤峰

收稿日期：2024年9月23日；录用日期：2024年11月8日；发布日期：2024年11月18日

摘 要

信息技术与数学课程相融合有利于发展学生数形结合能力，帮助学生建立模型思想。文章是以2023年高考卷的两道圆锥曲线试题为例，在数学问题驱动下，结合GeoGebra软件引导和启发学生对椭圆试题进行“提出、发现问题，分析、解决问题”，启发思考，得出结果，并在此基础上对双曲线试题进一步研究，即“发展问题”，为学生以后解决同类试题提供思路，从而在试题类教学中通过“四能”落实和发展学生的学科核心素养。

关键词

信息技术，GeoGebra，问题驱动，高考试题，圆锥曲线

Problem-Driven Teaching in GeoGebra Environment, Helping to Solve Mathematical Problems

—Taking the Conic Sections Test Questions of the 2023 College Entrance Examination Paper as an Example

Xiaoshuang Yu[1], Shuhai Li[1,2]

[1]School of Mathematics and Computer Science, Chifeng University, Chifeng Inner Mongolia
[2]Research Institute of Ethnic Mathematics Education, Chifeng Inner Mongolia

Received: Sep. 23rd, 2024; accepted: Nov. 8th, 2024; published: Nov. 18th, 2024

文章引用: 余晓双, 李书海. GeoGebra 环境下问题驱动式教学, 助力数学问题解决[J]. 职业教育发展, 2024, 13(6): 2201-2209. DOI: 10.12677/ve.2024.136339

Abstract

The integration of information technology and mathematics curriculum is conducive to the development of students' ability to combine numbers and shapes, and helps students to establish model ideas. This article takes two conic sections test questions of the 2023 college entrance examination paper as an example, driven by mathematical problems, combined with GeoGebra software to guide and inspire students to "put forward, find problems, analyze and solve problems", enlighten thinking and get results. On this basis, we further study the hyperbolic questions, that is, "development problems". The purpose of this paper is to provide ideas for students to solve similar examination questions in the future, so as to implement and develop students' subject core literacy through "four abilities" in the teaching of examination questions.

Keywords

Information Technology, GeoGebra, Question-Driven, College Entrance Examination Paper, Conic Sections

1. 引言

《普通高中数学课程标准》(2017 年版 2020 年修订)中指出在数学教学中要重视信息技术运用，注重信息技术与数学课程的深度融合[1]，实现传统教学手段难以达到的效果，不断优化课堂教学，转变教学与学习方式，为学生理解概念创设背景，为学生探索规律、启发思路和为学生解决问题提供直观。

GeoGebra 软件融合了代数与几何的优势，实现曲线和方程实时交互，是探究圆锥曲线问题的利器。在数学课堂上借助 GeoGebra 软件进行数学探究，引导学生经历“发现问题、提出问题、分析问题、解决问题”四个阶段[2]，能够解决传统教学的难点，充分体现学生为主体的教学理念和思想。同时，教师善于利用信息技术工具，能够激发学生学习兴趣，达到良好的课堂效果。

2. GeoGebra 环境下问题驱动式教学

问题驱动教学的方法是以教学内容与学生的认知规律为出发点，设计出一系列具有实际教育价值的问题或“问题串”，将知识有机地贯穿各个问题，在问题的观察、分析与总结中驱动学生的学习动机，产生探究行为，养成自主探究的良好习惯。

GeoGebra 环境下的问题驱动式教学是指以问题为指导，融入信息技术元素，提高学生在教学过程中的主动性，激起学生的求知欲，加强学生对题目的理解，最后使问题得以解决。那么这种教学模式与解决图形轨迹问题相切合，它优化了传统课堂中呈现“动点”运动轨迹的教学环节，教师通过设置达成任务的各个子问题，在软件中绘出图形运动情况，将问题与软件操作形成运动轨迹的过程结合，帮助学生对应去分析、解决问题，加深学生对问题的理解，使教学难点得以解决，从而提高课堂教学效率。

文章的研究受到了吴立宝教授的文章[3]启发，并借鉴了吴立宝教授高阶思维培养路径图。借助 GeoGebra 软件进行数学探究，引导学生经历“发现问题、提出问题、分析问题、解决问题、发展问题”五个环节，发现椭圆与双曲线试题中存在相似性的，引导学生将复杂的数学问题进行直观化、简单化，

形成解决问题的思路，从而提升学生直观想象、数学建模素养，提高学生解决问题能力[4]，见表 1。

Table 1. Content diagram of problem-driven teaching
表 1. 问题驱动教学环节内容图

教学环节	具体内容
发现问题	初步感知问题的来源，问题的位置，能够回忆起知识点的概念，特点及性质
提出问题	对试题进行分析、拆解，提取出关键的信息，设置合理的问题，启发学生思考
分析问题	运用 GeoGebra 软件，引导学生理解题目，找出问题答案
解决问题	在分析问题时，形成解题思路，将解题过程以文字叙述和数学符号的形式呈现出来
发展问题	激发学生的求知欲，教师将试题拓展，帮助学生建立解决这类试题的框架

3. GeoGebra 环境下问题驱动式教学，助力高中数学问题解决

3.1. 发现和提出问题：“直观感受定点存在”问题

问题是数学的心脏，问题驱动下的试题教学可以引导学生获得更深入的数学，问题与问题之间的跨度还为学生思维上的探索提供了可能性[5]。定点问题是环环相扣的，适合采用逆推的思想方法，那么在解决问题前，教师应该帮助学生对题目有系统的理解，设置层层问题，由浅入深逐渐深入，建立解题思路。

【试题 1】(2023 年高考全国乙卷数学 理 20):

已知椭圆 C：的离心率为 $\sqrt{5}/3$，点 A(−2, 0)在 C 上。

(1) 求 C 的方程：$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$。

(2) 过(−2, 3)的直线交 C 于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 与 y 轴交点分别为 M、N。

证明：线段 MN 中点为定点。

问题 1：椭圆离心率公式是什么？椭圆的性质有哪些？

问题 2：过定点的直线表达式怎么求？

问题 3：题目中的动直线有哪些，这些直线是否能建立联系？

问题 4：点 M、N 有何特点？如何用坐标来表示 M、N？

设计意图：试题呈现在学生面前，学生初步感知这是一道圆锥曲线类试题，理解题目中的数学符号，随后教师展示问题，根据问题在 GeoGebra 软件的辅助下，层层递进，启发学生思考，锻炼学生独立思考的能力，为解决本道试题做铺垫。

3.2. 分析问题：“以定点为目标，借助 GeoGebra 将题目具体化”

GeoGebra 等数学辅助软件究其最根本的体现是将抽象的数学问题及知识更加直观化和具体化，教师可以借助软件将数学中的数字和符号用图形进行表示，让学生可以体会问题的产生与发展过程，在初步接触题目时，学生的数学思维是没有完全打开，在试题 1 中，学生仅仅会对特殊值进行分析，而不会具体的去思考一般情况的特点，此时需要教师对其进行引导，但是引导不是将全部图形展现在学生面前，在运用软件时也要注意是循序渐进，学生根据数学软件展示的部分图形的变化，提高学生在数学角度去发现问题，提出问题，分析问题和解决问题的能力[6]。

【试题 1】分析过程：在试题中给了椭圆的一般表达式、离心率。而离心率公式为 $e=c/a$，那么利用椭圆方程的相关关系：$c/a=\sqrt{5}/3$，$b=2$，$a^2=b^2+c^2$。列出关于 a，b，c 的方程组，求得 a，b，c 的值，可求得椭圆 C 的方程为：$y\wedge 2/9+x\wedge 2/4=1$ 教师用数学符号语言规定好每个字母，坐标(−2, 3)用字母 B

表示，线段 M、N 的中点用字母 E 进行表示。题目中 A、B 是定点，从 B 点引出直线与椭圆相交两点 P、Q 两点，再通过 A 点引出过 P、Q 两点的直线与 y 轴交于 M、N 两点，那么在图形中直线 f(过点 B 与椭圆相交的直线)、直线 AP 与直线 AQ 是“动”直线(图 1)。我们所要证明的是点 P、Q 与 y 轴相交的动点 M、N 的中点是定点 E，那本题的关键是求出 M、N 点的坐标，M、N 的横坐标都是 0，那教师去引导学生去求出直线 AP、AQ 的函数表达式，那么就可以将 M、N 的坐标进行表示。

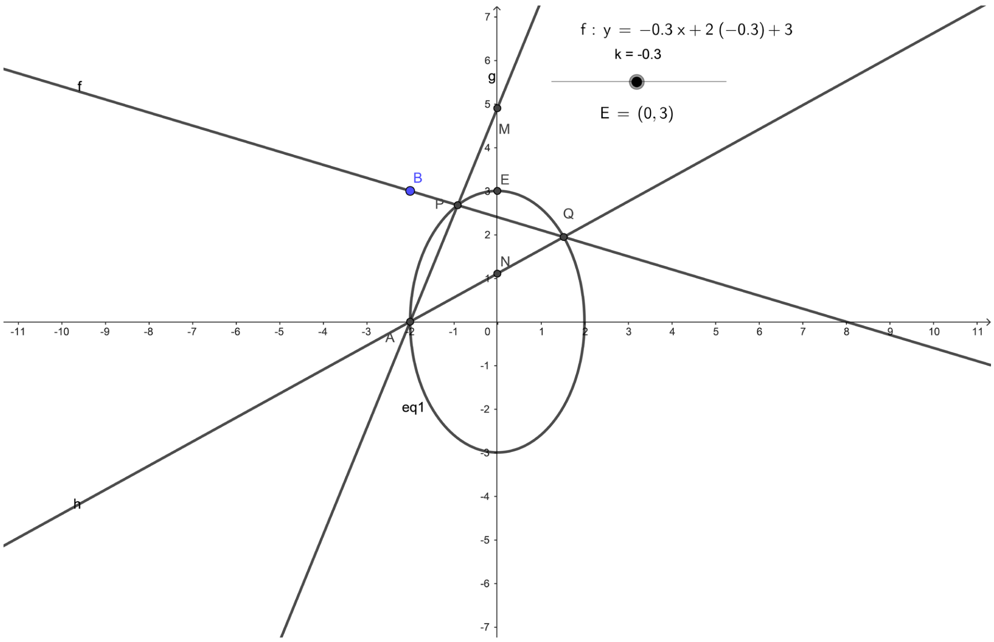

Figure 1. Midpoint E construction diagram of fixed-point MN
图 1. 定点 MN 的中点 E 构建图

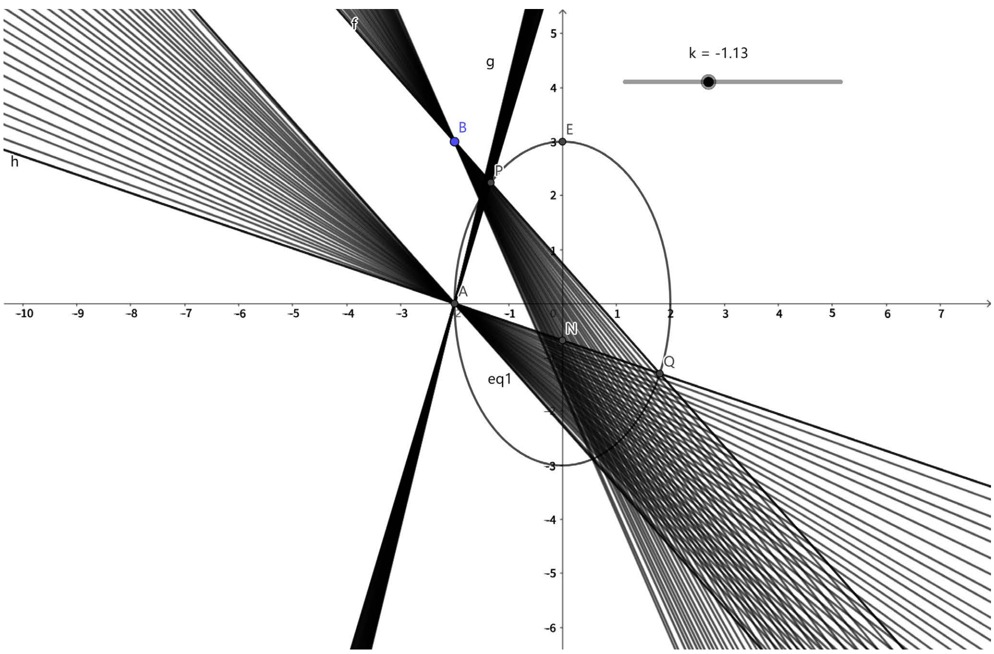

Figure 2. Midpoint E structure diagram of moving point MN
图 2. 动点 MN 的中点 E 结构图

GeoGebra 绘图操作如下：在左侧状态栏中输入椭圆 eq1、直线方程 f 的轨迹方程表达式、点 A 与点 B 的坐标。输入的直线方程 *f* 为：$y = kx + 2k + 3$，拖动滑动条，可以观察出形成三部分阴影区域，即图 2 中过点 B 的直线扫过的阴影部分轨迹(动直线 1)，直线 *f* 与椭圆方程 eq1 交于两点 P、Q，连接 AP、AQ (动直线 2、3)，并且 M、N 是运动的，而 M、N 的中点 E(0, 3)一直是没有发生改变的，初步得到结论：M、N 的中点是定点(0, 3) (图 2)。

绘图区滑动条中的 *k* 指的是直线 *f* 的斜率，题目中指出直线 *f* 与椭圆 eq1 交于两点，即直线 *f* 与椭圆 eq1 联立形成关于 *x* 的含有 *k* 值的一元二次方程中，判别式大于零，所以 *k* 的范围：k < 0。

设计意图：在进行展示时，启动 GeoGebra 软件的滑动条，形象地展现出来直线和椭圆之间不断地运动与变化，形成本题的数学模型。引导学生观察图像中直线 AP、AQ 与 y 轴交点(图 2：点 M、N)以及中点坐标 E 的运动情况，启发学生思考：如何求得直线 AP、AQ 学生在此过程中解决教师所设置的问题，教师帮助学生建立解题思路，提高了学生直观想象与数学建模的素养。

3.3. 解决问题：“以定点为终点，执行所思所想”

【试题 1】解题过程：GeoGebra 平台选择特殊点将图形呈现在学生面前，学生尝试估计定点坐标(3, 0)，拖动滑动条，使运动轨迹清晰地展现出来，学生通过 B 点坐标设出表达式 *f* (步骤①)；联立直线方程 *f* 与椭圆方程 eq1，化为关于 *x* 的一元二次方程(步骤②)；再利用根与系数的关系求得 $x_1 + x_2$，x_1x_2 的值，写出 AP，AQ 的方程，求出 M 与 N 的坐标(步骤③)；再利用由中点坐标公式(步骤④)；即可证明 MN 的中点为定值。

步骤①：要使过点(−2, 3)的直线交 C 于点 P，Q 两点，则 PQ 的斜率存在且小于 0。

设 PQ：$y - 3 = k\left(x + 2\right)$ 即 $y = kx + 2k + 3$，$k < 0$，$P\left(x_1, y_1\right)$，$Q\left(x_2, y_2\right)$。

步骤②：联立 $y = kx + 2k + 3$ 与 $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$ 得：$\left(4k^2 + 9\right)x^2 + 8k\left(2k + 3\right)x + 16k\left(k + 3\right) = 0$。

$\Delta = -1728k > 0$，$x_1 + x_2 = \frac{-8k\left(2k + 3\right)}{4k^2 + 9}$，$x_1x_2 = \frac{16k\left(k + 3\right)}{4k^2 + 9}$。

步骤③：直线 AP：$y = \frac{y_1}{x_1 + 2}\left(x + 2\right)$，取 $x = 0$，得 $M\left(0, \frac{2y_1}{x_1 + 2}\right)$。直线 AQ：$y = \frac{y_2}{x_2 + 2}\left(x + 2\right)$，取 $x = 0$，得 $N\left(0, \frac{2y_2}{x_2 + 2}\right)$。

步骤④：
$$\begin{aligned}\frac{2y_1}{x_1 + 2} + \frac{2y_2}{x_2 + 2} &= \frac{2y_1\left(x_2 + 2\right) + 2y_2\left(x_1 + 2\right)}{\left(x_1 + 2\right)\left(x_2 + 2\right)} \\ &= 2\frac{2kx_1x_2 + \left(4k + 3\right)\left(x_1 + x_2\right) + 4\left(2k + 3\right)}{x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) + 4} = 6\end{aligned}$$
。

∴ MN 的中点为(0, 3)，为定点。

设计意图：信息技术软件呈现研究过程，为教师指导学生探究提供了清晰的思路，学生根据图像展示出的直线，体会方程之间的变化运动过程，列出含参方程表达式，将直线方程与椭圆方程联立，求得 M，N 的坐标，进而解决问题，形成解决圆准曲线问题的思路。但是圆锥曲线的相关试题计算是有一定难度的，所以在进行求解过程中，应注重几何知识与代数相结合，即不断提高自身数学运算能力。

圆锥曲线内容在高考中试题的出现通常是结合多个知识点出现，在计算时坐标中是存在未知数，并且运用了韦达定理等公式，计算量比较大，通过图形展示，学生可能仅仅知道在图像上具体的变化，而对计算无从入手，讲解过程中应该结合图像对代数相关知识点进行拆分和衔接，通过设置问题、层层提

问，学生独立计算，逐渐引导学生到达目标答案。在丰富学生对信息技术软件的认识和提高学生直观想象能力外，也要提升学生的数学运算能力。

3.4. 发展问题：若“定点”在定直线上

【试题 2】(2023 全国新高考 2 卷 21)：双曲线：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$，记双曲线的左右顶点分别为 A_1，A_2，过点(−4, 0)的直线与双曲线左支交于 M，N 两点，M 在第二象限，直线 MA_1，NA_2 交于点 P。证明：点 P 在定直线上。

题目中的已知条件有 A_1，A_2 的坐标，M 在第二象限，直线 MA_1，NA_2 交于点 P，未知条件是证明 P 点的位置是否在定直线上。与试题 1 一样，先设字母 O 代表的是坐标(−4, 0)，试题中提到过点(−4, 0)的直线与双曲线左支相交于两点。

问题 1：与上一个题目相比，有什么异同点？

问题 2：过定点(−4, 0)的函数解析式如何表示？

我们不妨设直线方程 g 为 $x=my-4$，由于与双曲线交于两点，需要注意 m 的范围，双曲线的渐近线为 $y=\pm 2x$，所以 m 的范围为：$-1/2<m<1/2$。

问题 3：可以用分析椭圆定点的思路分析双曲线试题中定点在定直线上吗？

问题 4：通过 GeoGebra 软件，能否确定题目中的动点、运动的直线分别是什么？

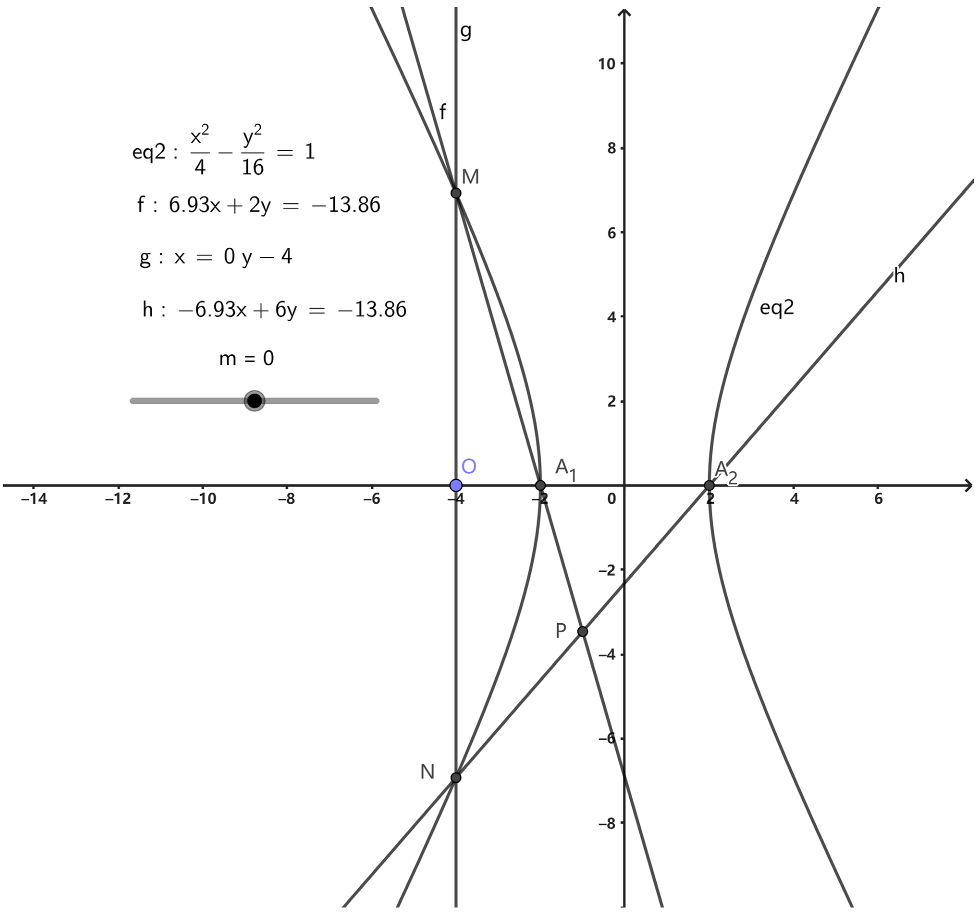

Figure 3. Question 2 preliminary construction diagram
图 3. 试题 2 初步构建图

将试题中的文字语言转化为数学符号语言，挖掘试题的本质内容。

本题的“动”直线：直线 g、直线 MA_1 和直线 NA_2，正是三条直线运动促使直线 MA_1，NA_2 的交点 P 运动，产生 P 点所在的定直线，所以与试题 1 一样，解题的关键在于求出直线 MA_1，NA_2 的函数表达式。那么，将直线方程 g 与双曲线方程 eq2 联立，形成关于 y 且含有 m 值的一元二次方程，通过 y_1y_2 和 y_1+y_2 及 A_1，A_2 的坐标可以写出含有直线 MA_1，NA_2 的方程，学生尝试猜想定直线的位置，进而将方程计算、整理得出定直线(图 3)。

GeoGebra 操作如下：在左侧状态栏中输入双曲线 eq2、直线方程 g 的轨迹方程表达式、点 O，A_1 和 A_2 的坐标。输入的直线方程 g 为 $x=my-4$，拖动滑动条，直线 g 运动，牵动直线 MA_1，NA_2 运动，即三条阴影轨迹部分(图 4 所示)。

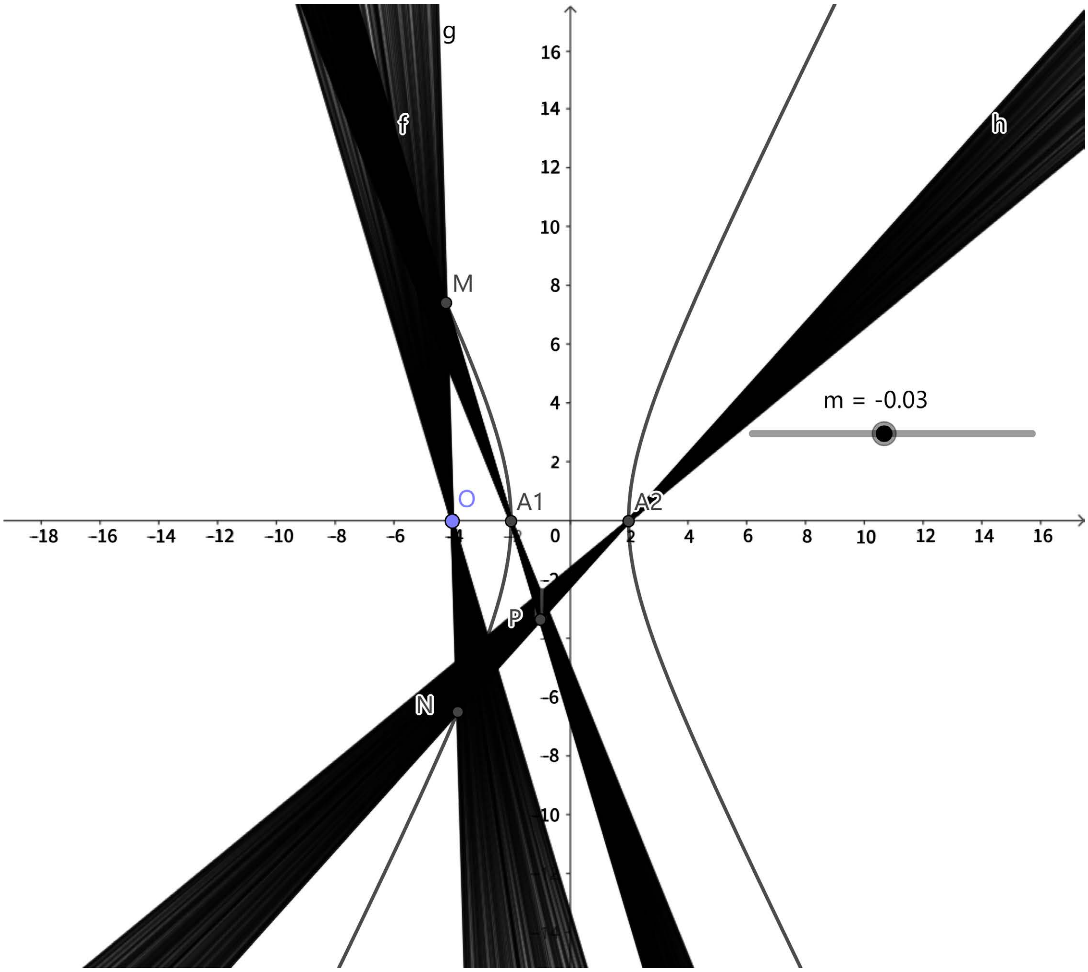

Figure 4. Straight line g pull straight line MA_1, NA_2 motion structure diagram

图 4. 直线 g 牵动直线 MA_1，NA_2 运动结构图

当光标停留在 P 点，右键，选择“显示轨迹”(图 5 所示)；引导学生初步推断出点 P 在定直线 $x=-1$ 上，在通过拖动滑动条进一步观察分析，初步猜想结论。

解决问题：将直线 g 与双曲线 eq2 联立，化为关于 y 的一元二次方程，写出直线 MA_1，直线 NA_2 的表达式，猜想定直线为 $x=-1$，所以只需将两个式子做商消去 y 即可，那么得出的结果即为定直线。

由题意可知 $A_1(-2,\ 0)$，$A_2(2,\ 0)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 显然直线的斜率不为 0，所以设直线 MN 的方程为 $x=my-4$，且 $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$ 与 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$。

联立可得：$(4m^2-1)y^2-32my+48=0$，且 $\Delta=64(4m^2+3)>0$。

直线 MA_1 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 NA_2 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，联立直线 MA_1 与直线 NA_2 的方程可得：

$$\frac{x+2}{x-2}=\frac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}=\frac{y_2(my_1-2)}{y_1(my_2-6)}=\frac{my_1y_2-2(y_1+y_2)+2y_1}{my_1y_2-6y_1}$$

$$=\frac{m\cdot\frac{48}{4m^2-1}-2\cdot\frac{32m}{4m^2-1}+2y_1}{m\times\frac{48}{4m^2-1}-6y_1}=\frac{\frac{-16m}{4m^2-1}+2y_1}{\frac{48}{4m^2-1}-6y_1}=\frac{1}{3}$$

由 $\frac{x+2}{x-2}=-\frac{1}{3}$，可得 $x=-1$ 即 $x_p=-1$，所以可得点 P 在定直线 $x=-1$ 上运动。

设计意图：在试题 1 的基础上，学生初步建立解决圆锥曲线“定点”的问题思路，紧接着探索点在“定”直线的试题，起到对知识点巩固的作用，有利于教师、学生更加熟悉软件，与时俱进，学生更好地掌握这类试题的做题步骤。

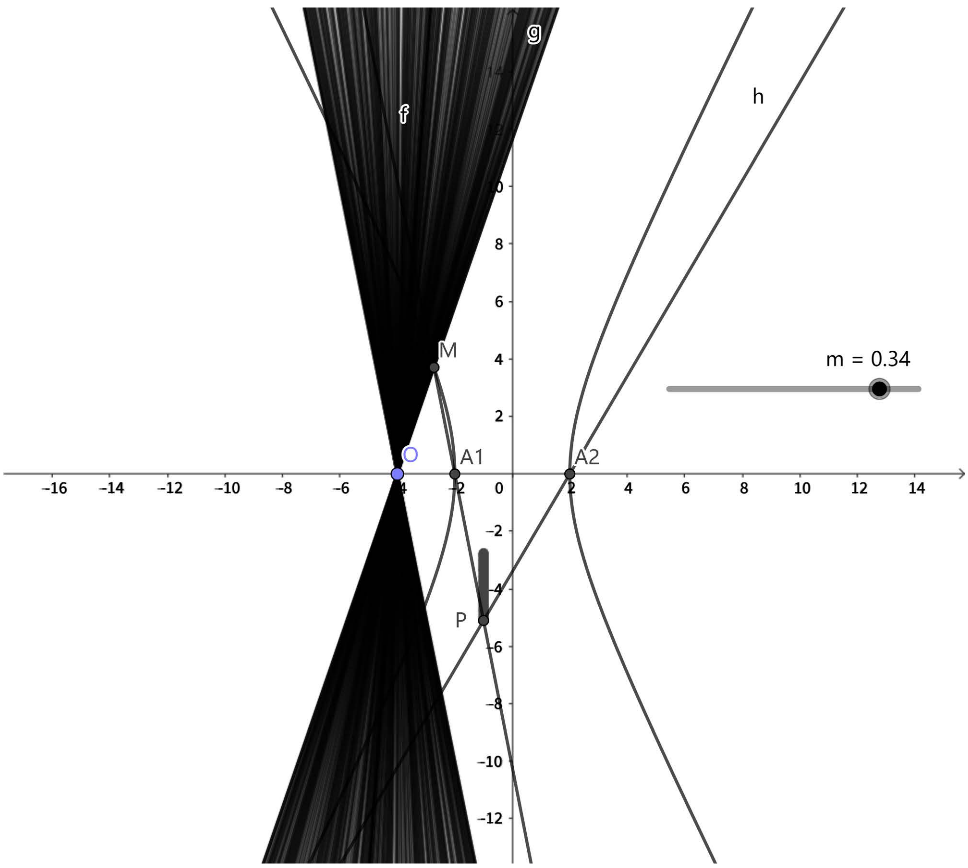

Figure 5. Point P motion structure diagram
图 5. 点 P 运动结构图

通过上面两道试题，发现 GeoGebra 软件可以将轨迹运动清晰地展现在学生面前，在数学问题的驱动下结合软件的教学过程中，培养了学生的直观想象素养[7]。同时，在试题中，学生感受到数学问题与信息技术在数学中都具有很重要的作用，两道题都是“定点”、“点在定直线”的相关问题，体会到数学圆锥曲线的试题中是存在相似性的，那么我们可以通过分析问题、解决问题的过程，形成一种相对固定的循环型思路图，提高学生对同类型的试题解决能力[8]，见图 6。

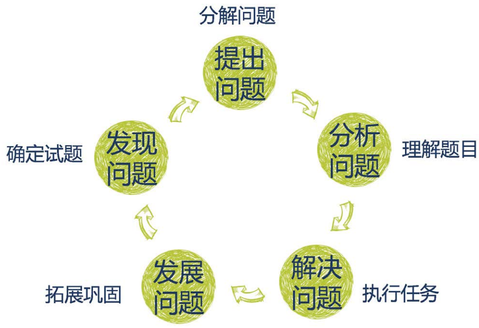

Figure 6. Problem-driven teaching cycle diagram
图 6. 问题驱动教学循环图

4. 结语

数学课程标准强调要将信息技术与数学教学结合，GeoGebra 与圆锥曲线试题是相匹配的，圆锥曲线试题讲解时采用由浅入深的问题驱动教学，运用 GeoGebra 软件进行展示形成过程，使学生构建解题思路，进而对内容结构与课堂教学起到创新的作用，达到良好的课堂效果。在教学过程中不断丰富教师、学生信息化方面的认知，激发学生学习兴趣，使学生可以站在数学的角度感受数与形的变化，通过“四能”不断提高学生的数学学科核心素养。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 高中数学课程标准(2017 版 2020 修订) [J]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 张巧, 刘佛莲, 王喆, 等. 基于 GeoGebra 平台, 以问题促探究——以一道解析几何教材习题为例[J]. 中学数学月刊, 2023(4): 48-51+57.

[3] 吴立宝, 刘颖超, 曹雅楠. 基于问题链的初中数学课堂高阶思维培养路径研究[J]. 天津市教科院学报, 2022, 34(1): 21-27.

[4] 葛永. “问题驱动教学”在数学教学中的应用研究[J]. 数学教学通讯, 2023(15): 59-61.

[5] 曾鑫洋, 孙悦, 胡典顺. GeoGebra 环境下基于问题链的数学问题解决[J]. 数学通讯, 2020(8): 39-41.

[6] 张俊峰, 柳军. 信息技术助力直观想象素养落实的案例研究——以几何画板软件教学为例[J]. 中小学电教, 2022(10): 33-36.

[7] 闫伟. 运用 GeoGebra 软件助力数学实验探究教学——以一类解析几何定点问题为例[J]. 中学数学研究, 2022(7): 9-12.

[8] 吴克霞. 初中数学探究教学的引导策略[J]. 中小学教学研究, 2009(6): 10-11.